

20. Man zeige: Eine Gruppe  $G$  mit der Verknüpfung  $\circ$  und dem Einselement  $e$  ist abelsch, wenn eine der folgenden drei Bedingungen erfüllt ist:

- a)  $a \circ a = e$  für alle  $a \in G$ .
- b)  $(a \circ b)^2 = a^2 \circ b^2$  für alle  $a, b \in G$ .
- c)  $b^{-1} \circ a^{-1} \circ b \circ a = e$  für alle  $a, b \in G$ .

Gilt auch die Umkehrung dieser Aussagen?

21. Man zeige: Ist  $\pi$  eine Äquivalenzrelation auf der Menge  $M$  und für  $a \in M$

$$[a]_\pi := \{b \in M \mid b \pi a\},$$

so ist  $M/\pi := \{[a]_\pi \mid a \in M\}$  eine Klasseneinteilung von  $M$  und es gilt:  $[a]_\pi = [b]_\pi \Leftrightarrow a \pi b$ .

22. Man zeige: a) Ist  $\mathcal{P}$  eine Klasseneinteilung von  $M$  und die Relation  $\pi$  auf  $M$  definiert durch  $a \pi b : \Leftrightarrow \exists C \in \mathcal{P} : a, b \in C$ , dann ist  $\pi$  eine Äquivalenzrelation und  $M/\pi = \mathcal{P}$ .

b) Durch  $\pi \mapsto M/\pi$  ist eine bijektive Abbildung von der Menge aller Äquivalenzrelationen auf die Menge aller Klasseneinteilungen von  $M$  definiert.

23. Man zeige: Seien  $M, N$  Mengen,  $f : M \rightarrow N$  eine Abbildung und die Relation  $\pi_f$  definiert durch

$$x \pi_f y : \Leftrightarrow f(x) = f(y), \quad x, y \in M.$$

Dann gilt: a)  $\pi_f$  ist eine Äquivalenzrelation auf  $M$ .

b) Durch  $[x]_{\pi_f} \mapsto f(x)$  ist eine bijektive Abbildung von  $M/\pi_f$  auf  $f(M)$  definiert.

24. Zeigen Sie, dass der Durchschnitt von beliebig vielen Äquivalenzrelationen (auf einer festen Menge  $M$ ) wiederum eine Äquivalenzrelation ist. Schließen Sie, dass die Menge der Äquivalenzrelationen (geordnet durch  $\subseteq$ ) ein Verband ist (d.h., dass jede zweielementige Menge  $\{\theta_1, \theta_2\}$  von Äquivalenzrelationen eine kleinste obere und eine größte untere Schranke hat).

25. Man zeige, dass für eine Primzahl  $p$  die Menge  $\{a + b\sqrt{p} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$  mit der gewöhnlichen Addition und Multiplikation reeller Zahlen einen Integritätsbereich bildet.

26. Man zeige: Ein Ring  $(R, +, \cdot)$ , in dem jedes Element idempotent ist, d. h., in dem für alle  $a \in R$  gilt:  $a^2 = a$ , ist notwendigerweise kommutativ.

27. Sei  $(R, +, \cdot)$  ein Ring mit genau einem Rechtseinselement  $e$  bezüglich der Multiplikation. Man zeige, dass dann  $e$  sogar Einselement des Ringes ist.

28. Man zeige: Ein kommutativer Ring  $(R, +, \cdot)$  mit  $|R| > 1$  ist genau dann ein Körper, wenn für jedes  $a \in R \setminus \{0\}$  die Gleichung  $axa = a$  in  $R$  genau eine Lösung besitzt.

29. Man bestimme die Ordnungen aller Elemente der  $S_4$ .

30. Man bestimme alle Untergruppen der symmetrischen Gruppe  $S_3$ .

31. Man zeige: Sei  $(G, \cdot)$  eine Gruppe, dann ist jede endliche nichtleere Unterhalbgruppe von  $(G, \cdot)$  eine Untergruppe.

32. Man zeige:  $\{(12), (13), \dots, (1n)\}$  ist ein Erzeugendensystem der symmetrischen Gruppe  $S_n$ ,  $n \geq 2$ . Hinweis: Man verwende, dass die Menge aller Transpositionen ein Erzeugendensystem von  $S_n$  ist.

33. Man zeige: a)  $\{(12), (23), \dots, (n-1 n)\}$  und  
 b)  $\{(12), (12 \dots n)\}$  sind Erzeugendensysteme der  $S_n$ ,  $n \geq 2$ .  
 Hinweis für a): Verwende Beispiel 32.
34. Sei  $(G, \cdot)$  eine Gruppe und  $a \in G$ . Man zeige:  $N(a) := \{x \in G \mid xa = ax\}$  ist eine Untergruppe von  $G$ , genannt der *Normalisator* von  $a$ .
35. Man zeige: Ist  $H$  eine Untergruppe der Gruppe  $G$  und  $a \in G$ , dann ist auch  $a^{-1}Ha := \{a^{-1}xa \mid x \in H\}$  eine Untergruppe von  $G$ .
36. Man zeige:  $\mathbb{Q}$  ist der kleinste Unterkörper von  $\mathbb{R}$ .

In den Beispielen 37 – 40 sei  $G = \langle x \rangle$  eine zyklische Gruppe.

37. Man zeige: a) Ist  $o(x) = m \in \mathbb{N}$ , so ist  $G$  isomorph zu  $(\mathbb{Z}_m, \oplus)$  (vgl. Beispiel 19).  
 b) Ist  $o(x) = \infty$ , so ist  $G$  isomorph zu  $(\mathbb{Z}, +)$ .
38. Man zeige: Jede Untergruppe  $H$  von  $G$  ist ebenfalls zyklisch.
39. Man zeige: Ist  $o(x) = m \in \mathbb{N}$ , so gilt für alle  $k \in \mathbb{Z}$ :  $o(x^k) = m/\text{ggT}(k, m)$ .
40. Man zeige: Für  $o(x) = m \in \mathbb{N}$  gibt es zu jedem Teiler  $t$  von  $m$  genau eine Untergruppe  $H$  von  $G$  mit  $|H| = t$ .
41. Man bestimme alle Untergruppen der symmetrischen Gruppe  $S_4$ . Hinweis: Ihre Anzahl ist 30.
42. Seien  $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^*, \mathfrak{A}^{**}$  Algebren vom selben Typ. Man beweise:  
 a) Ist  $f$  ein Homomorphismus von  $\mathfrak{A}$  nach  $\mathfrak{A}^*$  und  $g$  ein Homomorphismus von  $\mathfrak{A}^*$  nach  $\mathfrak{A}^{**}$ , so ist  $g \circ f$  ein Homomorphismus von  $\mathfrak{A}$  nach  $\mathfrak{A}^{**}$ . Sind  $f, g$  Isomorphismen, so ist auch  $g \circ f$  ein Isomorphismus.  
 b) Ist  $f$  ein Isomorphismus von  $\mathfrak{A}$  nach  $\mathfrak{A}^*$ , so ist  $f^{-1}$  ein Isomorphismus von  $\mathfrak{A}^*$  nach  $\mathfrak{A}$ .
43. Man beweise: a) Die Endomorphismen einer Algebra  $\mathfrak{A}$  bilden bezüglich der Komposition  $\circ$  eine Halbgruppe.  
 b) Die Automorphismen von  $\mathfrak{A}$  bilden bezüglich  $\circ$  eine Gruppe. Man bestimme ferner diese Gruppe für  $\mathfrak{A} = S_3$ .
44. Seien  $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^*$  Algebren vom selben Typ und  $f$  ein Homomorphismus von  $\mathfrak{A}$  nach  $\mathfrak{A}^*$ . Man beweise:  
 a) Ist  $U$  eine Unteralgebra von  $\mathfrak{A}$ , dann ist  $f(U)$  eine Unteralgebra von  $\mathfrak{A}^*$ .  
 b) Ist  $U^*$  eine Unteralgebra von  $\mathfrak{A}^*$ , dann ist  $f^{-1}(U^*)$  eine Unteralgebra von  $\mathfrak{A}$ .
45. Sei  $(G, \cdot)$  eine Gruppe. Man zeige, dass durch

$$h \sim g :\Leftrightarrow \exists x \in G : h = xgx^{-1}$$

eine Äquivalenzrelation auf  $G$  definiert wird, und bestimme für  $G = S_3$  die dazugehörige Klasseneinteilung. Welches Ergebnis kann man daraus für  $G = S_4$  (allgemein für  $G = S_n$ ) vermuten?

46. Sei  $(G, \cdot)$  eine Gruppe und für  $x \in G$  sei  $\varphi_x : G \rightarrow G$  definiert durch  $\varphi_x(g) := xgx^{-1}$ ,  $g \in G$ . Man zeige:  $\varphi_x$  ist ein Automorphismus von  $G$  (genannt *innerer Automorphismus*), und  $\{\varphi_x \mid x \in G\}$  ist eine Untergruppe der Automorphismengruppe von  $G$ .