

47. Man bestimme alle Normalteiler der S_4 . Hinweis: Man beachte, dass Normalteiler Vereinigung von Klassen konjugierter Elemente sind (das sind Äquivalenzklassen der Relation \sim aus Beispiel 45) und dass diese Klassen mit dem „Zyklentypus“ zusammenhängen.
48. Man beweise: Eine abelsche Gruppe G mit $|G| > 1$ ist genau dann einfach, wenn sie von Primzahlordnung ist.
49. Man beweise: Der Matrizenring $M_n(K)$ über einem Körper K ist stets einfach.
50. Seien G, H Gruppen mit den neutralen Elementen e, e^* und $f : G \rightarrow H$ ein Homomorphismus. Man zeige:
- $\ker f := \{a \in G \mid f(a) = e^*\}$ ist ein Normalteiler von G .
 - f ist ein Monomorphismus $\Leftrightarrow \ker f = \{e\}$.
51. Für eine Gruppe G sei $Z(G) := \{x \in G \mid \forall g \in G : xg = gx\}$ das *Zentrum* von G .
- Man zeige: $Z(G)$ ist ein Normalteiler von G .
 - Man bestimme das Zentrum der S_n .
52. Man bestimme bis auf Isomorphie alle vierelementigen Ringe mit zyklischer additiver Gruppe.
53. Sei G eine Gruppe, und für $a, b \in G$ sei der *Kommutator* $K(a, b)$ definiert durch $K(a, b) := aba^{-1}b^{-1}$. Weiters sei $K := \langle \{K(a, b) \mid a, b \in G\} \rangle$ die von allen Kommutatoren erzeugte Untergruppe von G . Man beweise:
- K ist Normalteiler von G .
 - Ist N Normalteiler von G , dann gilt: G/N abelsch $\Leftrightarrow N \supseteq K$.
54. Man beweise: Sind A, B Ideale des Ringes R , so auch $A + B$ und $A \cap B$.
55. Man beweise: Sind G, G_1, \dots, G_n Gruppen, dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:
- $G \cong G_1 \times \dots \times G_n$.
 - Es gibt Untergruppen U_1, \dots, U_n von G mit $U_i \cong G_i, i = 1, \dots, n$, sodass G das innere direkte Produkt von U_1, \dots, U_n ist.
56. Man formuliere und beweise eine zu Beispiel 55 analoge Aussage für Ringe.
57. Man zeige an Hand der A_4 , dass es nicht zu jedem positiven Teiler der Gruppenordnung eine Untergruppe dieser Ordnung geben muss.
58. Sei G eine endliche Gruppe, N ein Normalteiler von G und $m := [G : N]$. Man zeige, dass $a^m \in N$ für alle $a \in G$.
59. Die Gruppe G sei das innere direkte Produkt der Untergruppen U, V . Man zeige, dass $G/U \cong V$ und $G/V \cong U$.
60. Sei $(R, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring. Ein Element $a \in R$ heißt *nilpotent*, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $a^n = 0$. Man zeige, dass die Menge I aller nilpotenten Elemente von R ein Ideal von R ist und der Faktorring R/I außer dem Nullelement keine nilpotenten Elemente enthält.

61. Man zeige, dass in jedem Verband gilt:

$$a \leq b \text{ und } c \leq d \Rightarrow a \wedge c \leq b \wedge d \text{ und } a \vee c \leq b \vee d$$

(Monotonie von \wedge und \vee).

62. Man zeige, dass in jedem Verband (V, \wedge, \vee) die so genannten „distributiven Ungleichungen“ gelten:

$$x \wedge (y \vee z) \geq (x \wedge y) \vee (x \wedge z), \quad x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z).$$

63. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $T_n := \{k \in \mathbb{N} \mid k \text{ teilt } n\}$. Man zeige, dass T_n mit den Operationen

$$a \wedge b := \text{ggT}(a, b), \quad a \vee b := \text{kgV}(a, b) \quad (a, b \in T_n),$$

einen distributiven Verband mit Null- und Einselement bildet. Für welche n ist dieser Verband ein Boolescher Verband?

64. Man bestimme die Hasse-Diagramme aller Verbände mit höchstens 6 Elementen.

65. Sei (M, \leq) eine geordnete Menge, sodass $\inf A$ für alle $A \subseteq M$ existiert. Man zeige, dass dann für alle $A \subseteq M$ auch $\sup A$ existiert.

66. Man zeige, dass die Menge aller Unterhalbgebren einer Algebra $(A, (\omega_i)_{i \in I})$ mit der mengentheoretischen Inklusion eine verbandsgeordnete Menge bildet, wobei $\inf\{U_1, U_2\} = U_1 \cap U_2$, $\sup\{U_1, U_2\} = \langle U_1 \cup U_2 \rangle$.

67. Man zeige, dass die Menge aller Normalteiler einer Gruppe mit der mengentheoretischen Inklusion eine verbandsgeordnete Menge bildet, wobei $\inf\{N_1, N_2\} = N_1 \cap N_2$, $\sup\{N_1, N_2\} = N_1 \cdot N_2$ (Komplexprodukt).

68. Man zeige, dass die Menge aller Ideale eines Ringes mit den Operationen \cap und $+$ (vgl. Beispiel 54.) einen Verband bildet.

69. Sei A eine Algebra und $\text{Con}(A)$ die Menge aller Kongruenzrelationen von A . Man zeige, dass dann $(\text{Con}(A), \subseteq)$ eine verbandsgeordnete Menge ist.

70. Man bestimme das Hasse-Diagramm des Verbandes der Untergruppen der Symmetriegruppe D_4 des Quadrats.

71. Sei $(B, \wedge, \vee, 0, 1, ')$ eine Boolesche Algebra und $+$, $-$, \cdot definiert durch

$$x + y := (x \wedge y') \vee (x' \wedge y), \quad -x := x, \quad x \cdot y := x \wedge y \quad (x, y \in B).$$

Man zeige, dass dann $(B, +, 0, -, \cdot, 1)$ ein kommutativer Ring mit Einselement ist, in dem $x^2 = x$ für alle $x \in B$ gilt.

72. Sei $(B, +, 0, -, \cdot, 1)$ ein kommutativer Ring mit Einselement, in dem $x^2 = x$ für alle $x \in B$ gilt, und $\wedge, \vee, '$ definiert durch

$$x \wedge y := x \cdot y, \quad x \vee y := x + y + x \cdot y, \quad x' := x + 1 \quad (x, y \in B).$$

Man zeige, dass dann $(B, \wedge, \vee, 0, 1, ')$ eine Boolesche Algebra ist.

73. Man zeige, dass die Zuordnungen in den Beispielen 71 und 72 zueinander invers sind.