74. Die Menge $V = \{0, 1\}$ mit der (natürlichen) Ordnung $0 < 1$ ist verbandsgeordnet. Man bilde die direkten Produkte $V \times V$ und $V \times V \times V$ als Verbände und gebe die Hassediagramme dieser Verbände an.

75. Man bestimme die kleinste Unteralgebra B der (vollen) Potenzmengenalgebra $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \cap, \cup, \emptyset, \mathbb{N}, ')$, die alle einelementigen Teilmengen $\{n\}$, $n \in \mathbb{N}$, enthält? Wie groß ist die Kardinaltität von B? Hat die Kette $\{1\} \subset \{1, 3\} \subset \{1, 3, 5\} \subset \ldots$ ein Supremum in B?

76. Sei $(B, \wedge, \vee, 0, 1, ')$ eine Boolesche Algebra und $a, b \in B$ mit $a \leq b$. Man zeige, dass das Intervall $[a, b] := \{x \in B \mid a \leq x \leq b\}$ mit den Operationen $\wedge, \vee$, der Komplementbildung * definiert durch $x^* := a \vee (x' \wedge b)$, dem Nullelement a und Einselement b eine Boolesche Algebra bildet.

77. Sei $(B, \wedge, \vee, ', 0, 1)$ eine Boolesche Algebra, und für $a \in B$ werden die Intervalle $[0, a]$ bzw. $[0, a']$ als Boolesche Algebren aufgefasst (siehe voriges Beispiel). Man zeige, dass dann für die Booleschen Algebren gilt:

$$B \cong [0, a] \times [0, a'].$$

(Hinweis: Als Isomorphismus $\varphi : B \to [0, a] \times [0, a']$ betrachte man $\varphi(x) = (x \wedge a, x \wedge a')$.)

78. Sei $M = \{1, 2, 3\}$ und seien $a_1 = \emptyset$, $a_2 = \{1\}$, $a_3 = \{2\}$, $a_4 = \{3\}$, $a_5 = \{1, 2\}$, $a_6 = \{1, 3\}$, $a_7 = \{2, 3\}$ und $a_8 = \{1, 2, 3\}$. Man gebe für die folgende Polynomfunktion p aus $P_2(\mathcal{P}(M))$ eine Minimalform an und vergleiche diese mit der disjunktiven Normalform von p:

$$p = (((a_1 \wedge x_2')' \vee (a_3 \wedge x_1) \vee x_2')' \wedge ((x_1 \vee a_3') \wedge x_2)) \vee (((a_2 \wedge a_3) \vee a_7)' \wedge (x_2 \vee a_6) \wedge (a_5 \vee a_4))$$

79. Man gebe eine zweistellige Funktion auf der Booleschen Algebra $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$ an, welche keine Polynomfunktion ist.

80. Man zeige, dass für einen distributiven beschränkten Verband $(V, \wedge, \vee, 0, 1)$ alle einstelligen Polynomfunktionen eindeutig dargestellt werden können in der Form

$$p(x) = a \vee (x \wedge b)$$

mit $a, b \in V$, $a \leq b$. (Hinweis: Die einstelligen Polynomfunktionen eines Verbandes $(V, \wedge, \vee)$ sind (ganz analog wie bei Booleschen Algebren, siehe VO) die Elemente der Unteralgebra des Verbandes der einstelligen Funktion $(F_1(V), \wedge, \vee)$, die erzeugt wird von der Identität $p(x) = x$ und allen konstanten Funktionen.)

81. Sei W die zweielementige Boolesche Algebra $W = \{0, 1\}$. Man schreibe die folgenden Funktionen p und q aus $P_3(W)$ sowohl in disjunktiver als auch in konjunktiver Normalform an und stelle ihre Wertetabellen auf:

$$p = ((x_1 \vee x_2)' \wedge ((x_2' \wedge x_3) \vee x_1')) \vee (x_1 \vee x_2' \vee x_3)'$$
$$q = (((x_1 \vee x_2)' \wedge x_3)' \vee (((x_1' \wedge x_2) \vee x_3) \wedge x_1')') \wedge (x_1 \vee x_3)$$

82. Man schreibe die vier durch die folgende Tabelle gegebenen Booleschen Polynomfunktionen f_1, f_2, f_3 und f_4 aus $P_3(W)$ in einer Normalform an vereinfache diese dann auf

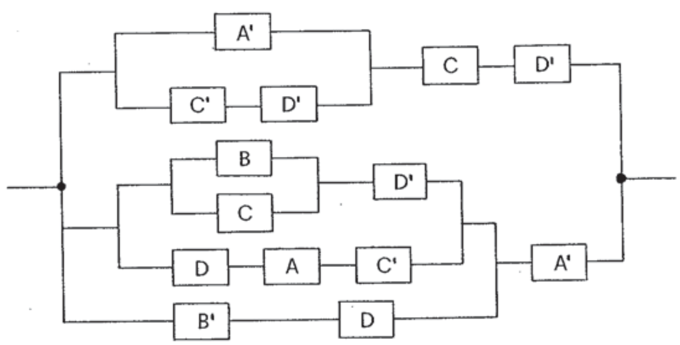
Minimalform.

x_1	x_2	x_3	f_1	f_2	f_3	f_4
1	1	1	0	0	0	1
1	1	0	1	0	0	1
1	0	1	1	1	1	0
1	0	0	0	0	0	1
0	1	1	1	0	0	1
0	1	0	1	1	1	0
0	0	1	0	1	0	1
0	0	0	1	1	1	0

83. Man suche Schaltungen, welche die durch die folgende Tabelle gegebenen Booleschen Polynomfunktionen f_1, f_2, f_3 und f_4 als zugehörige Schaltfunktionen haben:

x_1	x_2	x_3	f_1	f_2	f_3	f_4
1	1	1	1	1	0	0
1	1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	0	1
0	1	0	0	0	1	0
0	0	1	0	1	0	1
0	0	0	0	0	1	1

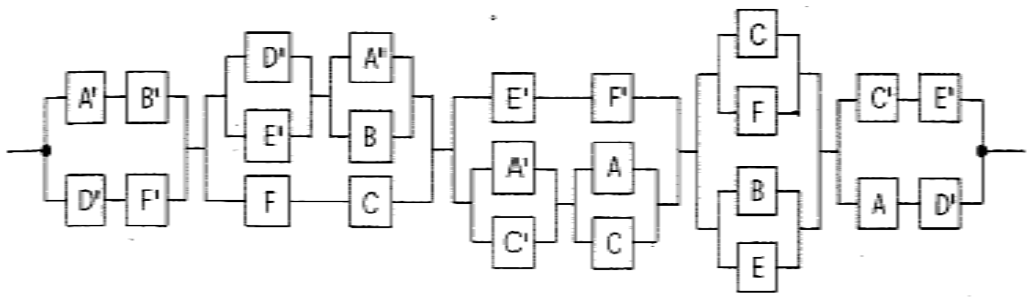
84. Man analysiere die folgende Schaltung:



85. Man suche eine Schaltung mit möglichst wenigen Kontakten, welche die in der folgenden Tabelle gegebene Polynomfunktion F als zugehörige Schaltfunktion hat:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	F
0	0	1	1	0	1
0	1	0	0	0	1
0	1	0	1	0	1
0	1	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	1
1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	1
alle übrigen Werte					0

86. Man vereinfache die folgende Schaltung und zeichne eine Schaltskizze der vereinfachten Schaltung:



87. Man suche Schaltungen mit möglichst wenig Kontakten, welche die in der folgenden Tabelle gegebenen Funktionen f_1 und f_2 als zugehörige Schaltfunktionen haben (b steht in der Tabelle für einen beliebigen Wert aus $\{0,1\}$):

x_1	x_2	x_3	f_1	f_2
1	1	1	b	1
1	1	0	b	1
1	0	1	0	0
1	0	0	0	b
0	1	1	1	b
0	1	0	1	0
0	0	1	b	b
0	0	0	1	1

88. Man suche eine Serienparallelschaltung mit möglichst wenig Kontakten, welche dieselbe Schaltfunktion hat wie die folgende Schaltung: