Fehlerkorrigierende Codes, Übungen

Sommersemester 2023

Beispiele für die Übung am 25.5.2023

36. Man zeige, dass der Dualcode eines Reed-Solomon Codes ebenfalls eine Reed-Solomon Code ist.

37. Sei α ein primitives Element in $\mathbb{F}_q$, $n = q-1$ und $1 \leq k \leq n$. Wir betrachten folgenden Codierung: Einem Nachrichtenwort $u = (u_0, \ldots, u_{k-1}) \in \mathbb{F}_q^k$ entspricht das Polynom $u(x) = u_0 + u_1 x + \ldots + u_{k-1} x^{k-1}$, und diesem ordnen wir das Codewort $c = (u(1), u(\alpha), \ldots, u(\alpha^{n-1}))$ zu.

    (a) Man zeige, dass der so konstruierte Code ein Reed-Solomon Code ist.

    (b) Man zeige auf direktem Weg, dass dieser Code ein MDS Code ist.

38. (Möbiussche Umkehrformel) Sei $(G, +)$ eine abelsche Gruppe, $h, H : \mathbb{N} \to G$ zwei Funktionen und μ die Möbius-Funktion. Dann gilt für alle $m \in \mathbb{N}$

$$H(m) = \sum_{t|m} h(t)$$

genau dann, wenn für alle $m \in \mathbb{N}$

$$h(m) = \sum_{t|m} \mu\left(\frac{m}{t}\right) H(t)$$

gilt (die Summen werden jeweils nur über die positiven Teiler gebildet). (Hinweis: Man beachte $\sum_{t|m} \mu(t) = 0$ für alle $m > 1$ und $\sum_{t|m} \mu(t) = 1$ für $m = 1$.)

39. Bezeichne $N_q(t)$ die Anzahl der normierten irreduziblen Polynome in $\mathrm{GF}(q)$ vom Grad t. Man beweise die Formel

$$q^m = \sum_{t|m} t \cdot N_q(t)$$

für alle $m \in \mathbb{N}$ und leite daraus die Formel für $N_q(m)$ aus der VO her.

40. Man betrachte den zum Reed-Solomon Code über $\mathbb{F}_8$ mit Generatorpolynom

$$g(x) = (x-1)(x-T)(x-T^2)(x-T^3)$$

gehörenden Binärcode. Bündelfehler welcher Länge kann dieser Binärcode korrigieren? Man demonstriere dies an einem Beispiel.