
Fehlerkorrigierende Codes, Übungen

Sommersemester 2023

Beispiele für die Übung am 23.3.2023

6. Man gebe einen systematischen $(6, 2, 4)$ -Code über $A = \{0, 1\}$ an. Welche Fehlerkorrektureigenschaften hat dieser Code? Gibt es einen $(6, 2, 5)$ -Code über A ?
7. Wir betrachten einen gedächtnislosen Binärkanal mit folgenden Übertragungswahrscheinlichkeiten:

$$P(0 \text{ erhalten} \mid 0 \text{ gesendet}) = 0,9 \quad P(1 \text{ erhalten} \mid 1 \text{ gesendet}) = 0,991$$

Der Code bestehe aus den Wörtern $\{000, 111\}$. Man decodiere das Empfangswort 110 mittels *Maximum Likelihood Decodierung* und vergleiche mit der *Nearest Neighbor Decodierung*. Hinweis: Der Kanal heißt *gedächtnislos*, wenn gilt:

$$P(a_1 \dots a_n \text{ erhalten} \mid b_1 \dots b_n \text{ gesendet}) = \prod_{i=1}^n P(a_i \text{ erhalten} \mid b_i \text{ gesendet})$$

8. Man möchte einen $(n, 5, 5)$ -Code über dem Alphabet mit 3 Elementen konstruieren. Wie groß muss n der Hamming-Schranke nach mindestens sein?
9. Wie viele Nachrichtenstellen kann ein Code der Länge 10 über einem Alphabet mit 4 Elementen höchstens haben, wenn er 3-fach Fehler korrigiert?
10. Ein Systemspieler beim Österreichischen Fußball-Toto geht so vor, dass er zunächst 8 Banken auswählt (d.h. er setzt an diesen Positionen immer gleich) und dann an den restlichen 4 Positionen auf folgende Art variiert: Sind a_1, \dots, a_4 die Tipps an diesen 4 Stellen, so werden für a_1 und a_2 unabhängig voneinander jeweils alle drei Möglichkeiten $x, 1, 2$ genommen, und a_3 bzw. a_4 werden dann daraus so errechnet, dass

$$a_1 + a_2 + a_3 \equiv 0 \pmod{3}, \quad a_2 + 2a_3 + a_4 \equiv 0 \pmod{3}$$

gilt, wobei hier der Tipp x mit 0 identifiziert wird. Insgesamt füllt er daher 9 Tipp-Kolonnen auf diese Weise aus. Man zeige: Wenn seine Banken halten, hat er auf diese Weise mindestens einen Elfer.