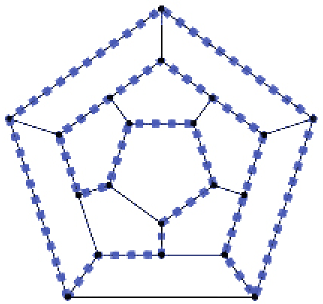
Projekt mit Bachelorarbeit Praktikum aus Diskreter Mathematik SS 2021

Themen D. Dorninger

1. Hamiltonsche Wege und Kreise in transitiven Graphen – Lovász‘s Vermutung

Ein Graph G heißt *(knoten-) transitiv*, falls es zu je zwei beliebigen Knoten v_1 und v_2 einen Automorphismus f von G gibt mit $f(v_1)= v_2$. Jeder transitive Graph ist regulär (aber nicht umgekehrt).



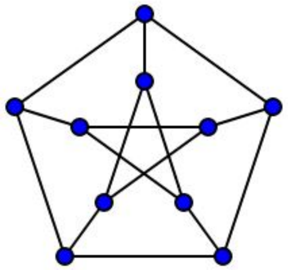
Dodekaeder

Lovász conjecture (offen seit 1969): Jeder endliche zusammenhängende transitive Graph enthält einen Hamiltonschen Weg, bzw:

Jeder endliche zusammenhängende transitive Graph außer 5 bekannten Graphen (u.A. der Petersen-Graph) enthält einen Hamiltonschen Kreis.

Schwächere Version für Caleygraphen (Graphen definiert anhand von Gruppen und deren Erzeugendensystemen).

Lovacz Vermutung wurde für verschiedene Graphenklassen bewiesen. Dies soll unter einheitlichen Gesichtspunkten und Berücksichtigung der neuesten Publikationen zusammenzufasst, erklärt und durch Beispiele illustriert werden. Auch auf Anwendungen (Gray-Codes, Combinatorial design,…) ist einzugehen.

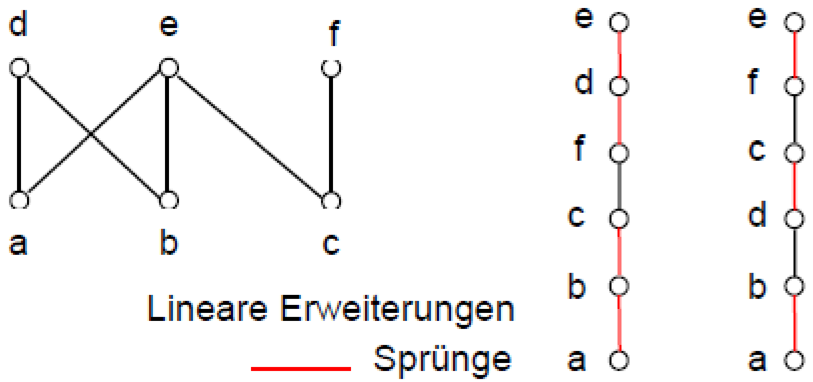


Petersen-Graph

2. Lineare Erweiterung von Halbordnungen - Algorithmen, Komplexität, Anwendungen

Jede Halbordnung H kann zu einer Vollordnung (Lineare Erweiterung von H) fortgesetzt werden.

Beispiel: $H=\{(a,d), (a,e), (b,d), (b,e), (c,e), (c,f)\} \cup \{(x,x) \mid x \in \{a,b,c,d,e,f\}\}$



Die beiden wichtigsten algorithmischen Probleme:

1. Alle Linearen Erweiterungen einer gegebenen Halbordnung (eines bestimmtem Typs) mit n Elementen finden.
2. Das Sprungzahlproblem: Lineare Erweiterung finden, bei der die Anzahl von benachbarten Paaren von Elementen minimal ist, welche in H unvergleichbar sind.

Anwendungen: Präferenzen bestimmen, Sortieren bei partieller Information, Folgenanalysen, ...

Die Literatur (bis einschließlich 2020) ist aufzubereiten, Algorithmen sind zu implementieren und Komplexitätsvergleiche anzustellen.

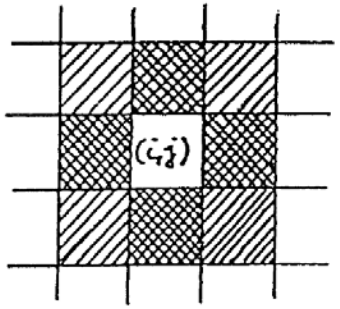
3. Ring-ähnliche Quantenlogiken

	Zu Grunde liegende Logik	Ring-ähnliche äquivalente Struktur
Klassische Physik	Boolesche Algebra	Boolescher Ring
Quantenmechanik	Verband der abgeschlossenen Unterräume eines separablen Hilbertraumes - und Verallgemeinerungen davon	Ring-ähnliche Logiken **?**

Vorteil des Rechnens mit Ring-ähnlichen Strukturen: unmittelbare Interpretation der Multiplikation und Addition als logisches „und“ und ausschließendes „oder“ sowie daraus ableitbare logische Operatoren und Schlüsse. (In der Quantenmechanik muss z.B. die doppelte Verneinung nicht notwendigerweise eine Bejahung sein.)

Eine Serie von Publikationen, in welchen logische, algebraische und für die Physik relevante Aspekte von solchen Ring-ähnlichen Quantenlogiken untersucht werden, ist überblicksmäßig zusammenzufassen und mit Beispielen zu illustrieren. Insbesondere sind Logiken mit wenigen Elementen eigenständig zu konstruieren.

4. Design und Analyse eines Spiels mithilfe von Zellulären Automaten



Zellulärer Automat: 1-, 2- oder 3-dimensionales Gitter gewisser Bauart , z.B.

x(i,j,t): Zustand der Zelle (i,j) zum Zeitpunkt t.
Überführungsfunktion F: x(i,j,t) $\rightarrow$ (i,j,t+1) in Abhängikkeit von Nachbarn von (i,j);
kann durch den Eingriff von Spielern mehrfach verändert werden.

Bekanntestes Beispiel: Conway Spiel des Lebens.

Eigenschaften: Grenzzyklen, Randeffekte, Entscheidbarkeit , Reversibilität, Erhaltungssätze, u.Ä.

Es ist ein einfaches Spiel zu entwickeln und anschließend sind dessen Eigenschaften zu analysieren.

WS 2021/22: Seminar aus Diskreter Mathematik mit Seminararbeit

Themen bei D. Dorninger

1. Bruhat- Ordnungen und Bruhat- Graphen

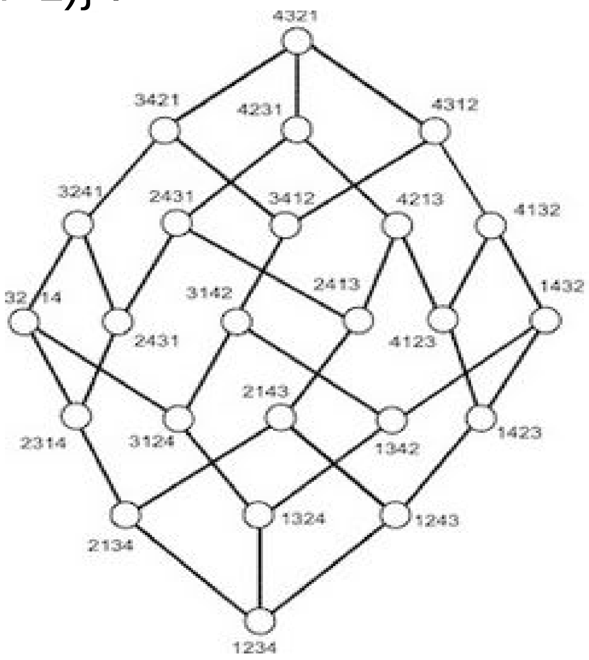
Coxeter Gruppe: Gruppe G mit einem Erzeugendensystem E= $\{e_1, \ldots, e_n\}$ mit $e_i^2 = 1$und $(e_i e_k)^{m(i,k)} = 1$ für ein $m(i,k) \geq 2$, $i \neq k$. Das Paar (G,E) heißt *Coxeter-System.*

Reduziertes Wort $g \in G$: Darstellung von g als Produkt von einer minimalen Anzahl $l(g)$ von $e_i \in S$.

Wichtiges *Beispiel*: G= Symmetrische Gruppe S_n , E= {Transpositionen (i,i+1)} .

Bruhat-Ordnung auf (G,E): $g_1 \leq g_2$ für $g_1, g_2 \in G$ $\Leftrightarrow$ ein Teilstring eines reduzierten Wortes für g_2 ist ein reduziertes Wort für g_1 .

Bruhat-Graph: Knotenmenge G, eine gerichtete Kante von g_1 nach g_2 $\Leftrightarrow l(g_1) < l(g_2)$ und $g_1 = tg_2$, t eine Spiegelung *(d.h. $t = geg^{-1}$ mit $g \in G$, $e \in E$)*
Beispiel (S_n ,E) von oben für n=4 *;* t ist dann eine beliebige Transposition:



Aufgabe: Motivation, Zielsetzungen, wichtigste Zusammenhänge und Ergebnisse sind, illustriert durch Beispiele, darzustellen .

2. Anzahlberechnungen von Halbordnungen

Berechnung und Abschätzung der Anzahlen von HO (Halbordnungen) von n paarweise verschiedenen Elementen (=Anzahlen von T_0-Topologien) bzw. deren Isomorphieklassen sowie auch von speziellen Klassen von HO: Zusammenhängende HO, HO mit einer fixen Anzahl von vergleichbaren Elementen, zweidimensionale HO, HO mit Rangfunktion (gradierte HO), HO mit vorgegebener Länge,…

Aufgabe: Die wichtigsten Ergebnisse, Algorithmen, Beweise, Beweisskizzen sind zusammenzustellen, eigene Beispiele sind zur Illustration anzugeben sowie ggf. ein Verfahren für die Berechnung für HO mit wenigen Elementen zu implementieren .

Anzahl der Isomorphie - klassen von HO mit n Elementen

n	$t_0(n)$
1	1
2	2
3	5
4	16
5	63
6	318
7	2 045
8	16 999
9	183 231
10	2 567 284
11	46 749 427
12	1 104 891 746
13	33 823 827 452
14	1 338 193 159 771

3. Dedekind-Zahlen

Dedekind-Zahl D(n)

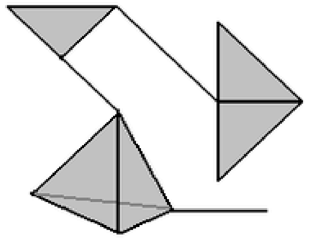
= Anzahl der monotonen Booleschen Funktionen f: $\{0,1\}^n \to \{0,1\}$

= Anzahl der Elemente eines von n Elementen frei erzeugten distributiven Verbandes

= Anzahl der Antiketten in der Menge der Teilmengen einer n-elementigen Menge

= Anzahl der abstrakten Simplizialkomplexe mit n Elementen

=Anzahl der kombinatorischen Schaltungen, die nur durch AND und OR-Gatter aufgebaut sind.



D(n) bekannt für $n \leq 8$, darüber hinaus gibt es nur Abschätzungen. Z.B.:

$$D(n) \sim 2^{\binom{n}{n/2}} \cdot \exp\left[\binom{n}{\frac{n}{2}-1}\left(2^{-n/2} + n^2 2^{-n-5} - n 2^{-n-4}\right)\right], \text{ for even } n$$

Auch Teilklassen der genannten Strukturen werden abgezählt.

Aufgabe: Es ist ein Überblick in die Thematik zu geben, wichtigste Ergebnisse und deren Beweise sind (in Skizzen) darzustellen, Algorithmen zu erklären und ggf. ein Verfahren zu implementieren.

4. Bell-ähnliche Ungleichungen für numerische Ereignisse

Einstein: Teilchen besitzen individuelle Eigenschaften, die ihr unterschiedliches Verhalten bei Messungen steuern und dadurch einen quantenmechanischen Zufall vortäuschen. Bell hat unter dieser Annahme 1964 bewiesen, dass für verschränkte Teilchenpaare eine Ungleichung der Gestalt
$|P(a,b) - P(a,c)| \leq 1 + P(b,c)$
(a,b,c Richtungen von Messungen) erfüllt sein müsste. 1982 wurde an Hand eines Experiments gezeigt, dass die Bellsche Ungleichung bisweilen verletzt wird und damit Einstein unrecht hatte.Es gibt eine Reihe von Erweiterungen und Verallgemeinerungen dieser Ungleichung, insbesondere die folgende:

Sei S eine Menge von Zuständen eines physikalischen Systems und p(s) die Wahrscheinlichkeit des Eintritts eines Ereignisses, wenn sich das System im Zustand $s \in S$ befindet. Die Funktion p von S in [0,1] heißt ein *numerisches Ereignis*. Eine gegebene Menge von numerischen Ereignissen (entsprechende Messungen) bildet hinsichtlich ≤ von reellen Funktionen eine Halbordnung und korrelierte Elemente davon geben Anlass zu Ungleichungen mit deren Hilfe man unterscheiden kann, ob es sich um ein klassisches physikalisches Phänomen handelt oder ein quantenmechanisches.

Aufgabe: Die angeführten Sachverhalte sind in der Seminararbeit darzustellen und zu bearbeiten, einzelne Sätze und ggf. auch Verfahren sind darüber hinaus an Hand selbstgewählter mathematischer Beispiele (mit wenigen Elementen) zu erklären.