Analytische ZAHLENTHEORIE

Skriptum zur Vorlesung
von
Prof. Michael DRMOTA

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Zahlentheoretische Funktionen

Definition 1.1 Eine Abbildung $a : \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *zahlentheoretische Funktion*. Jeder zahlentheoretischen Funktion entspricht eine (formale) *Dirichletsche Reihe*

$$A(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s}.$$

Definition 1.2 Durch $c(n) = (a + b)(n) = a(n) + b(n)$ wird die *Summe* zweier zahlentheoretischer Funktionen definiert. Ihr entspricht die Dirichletsche Reihe

$$C(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n) + b(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b(n)}{n^s} = A(s) + B(s).$$

Definition 1.3 Durch

$$c(n) = (a * b)(n) = \sum_{d|n} a(d)b(\frac{n}{d}) = \sum_{d_1 \cdot d_2 = n} a(d_1) \cdot b(d_2)$$

wird das *Dirichletprodukt* zweier zahlentheoretischer Funktionen definiert. Ihm entspricht die Dirichletsche Reihe

$$C(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{d_1 \cdot d_2 = n} \frac{a(d_1)b(d_2)}{{d_1}^s \cdot {d_2}^s} = A(s) \cdot B(s).$$

Satz 1.1 Die zahlentheoretischen Funktionen bilden mit $+, *$ einen Integritätsbereich, insbesondere ist $*$ assoziativ und kommutativ. Weiters besteht die Einheitengruppe genau aus jenen zahlentheoretischen Funktionen a mit $a(1) \neq 0$.

Definition 1.4 Eine zahlentheoretische Funktion a heißt *multiplikativ*, falls für alle $m,\ n \geq 1$ mit $(m,n) = 1 \quad a(m \cdot n) = a(m) \cdot a(n)$ gilt und $a(0) = 1$ ist.
Eine zahlentheoretische Funktion a heißt *vollständig* (oder *stark*) *multiplikativ*, falls für alle $m,\ n \geq 1 \quad a(m \cdot n) = a(m) \cdot a(n)$ gilt und $a(0) = 1$ ist.

Satz 1.2 Sind die zahlentheoretischen Funktionen $a,\ b$ multiplikativ, so auch $a * b$ und a^{-1}.

Bemerkung 1.1 Sind $a,\ b$ vollständig multiplikativ, so ist i.a. $a*b$ bzw. a^{-1} nicht mehr vollständig multiplikativ, aber multiplikativ.

Bemerkung 1.2 Multiplikative Funktionen a sind durch die Werte $a(p^k),\ p \in \mathbb{P},\ k \geq 1$, wohlbestimmt. Ist $n = {p_1}^{k_1} \cdots {p_l}^{k_l}$, so gilt $a(n) = a({p_1}^{k_1}) \cdots a({p_l}^{k_l})$ und für die Dirichletsche Reihe gilt (formal)

$$A(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s} = \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 + \frac{a(p)}{p^s} + \frac{a(p^2)}{p^{2s}} + \cdots\right).$$

Für vollständig multiplikative Funktionen a gilt überdies, dass sie bereits durch die Werte $a(p),\ p \in \mathbb{P}$, wohldefiniert sind:

$$a({p_1}^{k_1} \cdots {p_l}^{k_l}) = a(p_1)^{k_1} \cdots a(p_l)^{k_l}.$$

Für die Dirichletsche Reihe gilt daher

$$A(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s} = \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 + \frac{a(p)}{p^s} + \left(\frac{a(p)}{p^s}\right)^2 + \cdots\right) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - \frac{a(p)}{p^s}}.$$

Die Produktdarstellung heißt *Eulersches Produkt.*

Spezielle zahlentheoretische Funktionen:
($\mathbb{M}\ldots$ multiplikative Funktion, $\mathbb{VM}\ldots$ vollständig multiplikative Funktion)

1.

$$I(n) = S_{n1} = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 0 & n > 1 \end{cases} \in \mathbb{VM} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I(n)}{n^s} = 1$$

$$I * a = a * I = a$$

2.

$$J(n) = 1 \text{ für } n \geq 1 \quad \in \mathbb{VM} \qquad\qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \zeta(s)$$

...**Riemannsche Zetafunktion**

3. $N_\alpha(n) = n^\alpha$

$$J = N_0 \quad \in \mathbb{VM} \qquad\qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{N_\alpha(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^\alpha}{n^s} = \zeta(s-\alpha)$$

4. $d(n) = \sum_{d|n} 1$ ... Anzahl der Teiler von n

$$d = J * J \quad \in \mathbb{M} \qquad\qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{n^s} = \zeta(s)^2$$

5. $\sigma(n) = \sum_{d|n} d$ ... Summe aller Teiler von n

$$\sigma = N_1 * J \quad \in \mathbb{M} \qquad\qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma(n)}{n^s} = \zeta(s)\zeta(s-1)$$

6. $\sigma_\alpha(n) = \sum_{d|n} d^\alpha$

$$\sigma_\alpha = N_\alpha * J \quad \in \mathbb{M} \qquad\qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_\alpha(n)}{n^s} = \zeta(s)\zeta(s-\alpha)$$

7.

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ (-1)^k & n = p_1 \cdots p_k \text{ und alle } p_1, \ldots, p_k \text{ verschieden} \\ 0 & sonst \end{cases} \quad \in \mathbb{M}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \frac{1}{\zeta(s)}$$

$\mu * J = I,\ \mu = J^{-1} \in \mathbb{M}$ ... **Möbiussche My-Funktion**

8.

$\varphi(n) = |\{k | 1 \leq k \leq n,\ (k,n) = 1\}| \in \mathbb{M}$ ... **Eulersche Phi-Funktion**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}$$

$$\varphi * J = N_1,\ \varphi = \mu * N_1,\ \varphi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right),\ \varphi^{-1}(n) = \prod_{p|n} (1-p)$$

9.

$$\lambda(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ (-1)^{k_1+\cdots+k_l} & n = {p_1}^{k_1} \cdots {p_l}^{k_l} \end{cases} \in \mathbb{VM}$$

... **Liouvillesche Lambda-Funktion**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^s} = \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)}$$

$$(\lambda * J)(n) = \begin{cases} 1 & n = m^2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} , \lambda^{-1} = |\mu|$$

10.

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & n = p^k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \notin \mathbb{M} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$$

... **Mangoldtsche Lambda-Funktion**
$(\Lambda * J)(n) = \log n$

Satz 1.3 Ist a vollständig multiplikativ, so gilt $a^{-1}(n) = a(n) \cdot \mu(n)$.

Definition 1.5 Eine zahlentheoretische Funktion χ heißt *Dirichlet-Charakter* modulo k (D-Char.), falls folgende Eigenschaften gelten:

1.

$$\chi(a \cdot b) = \chi(a) \cdot \chi(b) \text{ für alle } a, b \geq 1$$

2.

$$|\chi(a)| = 1 \text{ für } (a, k) = 1$$

3.

$$\chi(a) = \chi(b) \text{ für } a \equiv b \quad \textit{modulo } k$$

4.

$$\chi(a) \;=\; 0 \;\;\text{für}\;\; (a,k) \;>\; 1$$

Sie gehört außerdem zu den vollständig multiplikativen Funktionen ($\in \mathbb{VM}$).

Bemerkung 1.3 Sei E_k die multiplikative Gruppe der $\varphi(k)$ zu k teilerfremden Restklassen *modulo k*. Dann korrespondiert ein Dirichlet-Charakter *modulo k* χ genau zu einem Homomorphismus $\chi^* : \; E_k \;\rightarrow \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Allgemein heißt ein solcher Homomorphismus *„Charakter“* einer Gruppe.

Bemerkung 1.4 Sei $(a,k) \;=\; 1$. Dann gilt $a^{\varphi(k)} \;\equiv\; 1$ *modulo* (k) und daher auch $\chi(a)^{\varphi(k)} \;=\; 1$. Der Wertebereich eines Dirchlet-Charakters umfaßt daher 0 und die $\varphi(k)$-ten Einheitswurzeln.

Bemerkung 1.5 Ist der Wertebereich nur 0 und 1, so heißt χ auch *Hauptcharakter* und wird oft mit χ_0 bezeichnet. Weiters gibt es reelle Dirichlet-Charaktere, d.h. der Wertebereich ist $0,\; 1$ und -1, und natürlich auch komplexwertige Dirchilet-Charaktere.

Lemma 1.6 Ist $b \;\not\equiv\; 1$ *modulo* (k), so existiert ein Dirichlet-Charakter χ *modulo k* mit $\chi(b) \;\neq\; 1$.

Satz 1.4 Durchläuft a ein volles Restsystem *modulo k*
(z.B.: $a = 1, 2, \ldots, k$) so ist

$$\sum_{a \;mod\; k} \chi(a) \;=\; \begin{cases} \varphi(k) & \text{für } \;\chi \;=\; \chi_0 \\ \quad 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Durchläuft χ alle Dirichlet-Charaktere *modulo k*, so ist

$$\sum_{\chi \;mod\; k} \chi(a) \;=\; \begin{cases} \varphi(k) & \text{für } \;a \;\equiv\; 1 \;\; (k) \\ \quad 0 & \text{für } \;a \;\not\equiv\; 1 \;\; (k)\;. \end{cases}$$

Es gibt daher genau $\chi(k)$ Dirichlet-Charaktere *modulo k*.

Definition 1.6 Sei χ ein Dirichlet-Charakter. So bezeichnet man die dazugehörige Dirichletsche Reihe

$$L(s,\chi) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$$

als *Dirichletsche L-Reihe.*

Satz 1.5 Bezeichnet man mit $\zeta(s,a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+a)^s}$ $(0 < a \leq 1)$ die *Hurwitzsche Zetafunktion*, so gilt

$$L(s,\chi) = k^{-s} \cdot \sum_{a=1}^{k} \chi(a)\zeta(s, \frac{a}{k}).$$

Für den Hauptcharakter gilt auch

$$L(s,\chi_0) = \zeta(s) \cdot \prod_{p|k} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right).$$

Lemma 1.7 (Orthogonalitätsrelation für Dirichlet-Charaktere)

$$\sum_{a=1}^{k} \chi_1(a) \cdot \overline{\chi_2(a)} = \begin{cases} \varphi(k) & \text{für } \chi_1 = \chi_2 \\ 0 & \text{für } \chi_1 \neq \chi_2 \end{cases}$$

$$\sum_{\chi \ mod \ k} \chi(a_1) \cdot \overline{\chi(a_2)} = \begin{cases} \varphi(k) & \text{wenn } a_1 \equiv a_2 \ (k) \text{ und } (a_1,k) = (a_2,k) = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Satz 1.6 Ist $n_1 < n_2 < \ldots$ eine Folge natürlicher Zahlen und f eine zahlentheoretische Funktion, so ist für $(a,k) = 1$

$$\sum_{\substack{j \leq J \\ n_j \equiv a \ (k)}} f(n_j) = \frac{1}{\varphi(k)} \cdot \sum_{\chi \ mod \ k} \overline{\chi(a)} \cdot \sum_{j \leq J} f(n_j)\chi(n_j).$$

Kapitel 2

Analytische Funktionen und Dirichletsche Reihen

Definition 2.1 Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein einfachzusammenhängendes Gebiet. Eine Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ heißt *analytisch*, wenn sie in jedem Punkt (lokal) in eine Potenzreihe entwickelbar ist, d.h. für alle $z \in G$ gibt es ein $r > 0$ und $a_n \in \mathbb{C}$ mit $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n(z - z_0), \quad | z - z_0 | < 1$.
Eine Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ heißt *komplex (stetig) differenzierbar*, wenn für alle $z_0 \in G$ der Grenzwert $f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ existiert (und die Zuordnung $z_0 \mapsto f'(z_0)$ stetig ist).

Definition 2.2 Sei $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ eine stückweise glatte Kurve und $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine (stetige) Funktion. [$\gamma(t) = \gamma_1(t) + i\gamma_2(t)$ und $f(u + iv) = f_1(u, v) + if_2(u, v)$ können auch als Paare reellwertiger Funktionen interpretiert werden.]
Dann bezeichnet man

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_0^1 f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt$$

als komplexes Kurvenintegral. Der Wert des Integrals ist natürlich von der Wahl der speziellen Parametrisierung der Kurve γ unabhängig.

Satz 2.1 Folgende drei Eigenschaften sind äquivalent:

1. $f : G \to \mathbb{C}$ ist analytisch
2. $f : G \to \mathbb{C}$ ist komplex stetig differenzierbar
3. Für alle $z_0 \in G$ und alle geschlossenen Kurven γ, die z_0 einfach im negativen Uhrzeigersinn umrunden, gilt

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_\gamma \frac{f(z)}{z_0 - z}dz.$$

Satz 2.2 Ist $f : G \to \mathbb{C}$ analytisch und γ eine geschlossene Kurve, so gilt

$$\int_\gamma f(z)dz \;=\; 0.$$

Satz 2.3 Sei $f : G \to \mathbb{C}$ analytisch und ist $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n$ die Potenzreihenentwicklung von $f(z)$ an der Stelle $z_0 \in G$, so gilt für jede geschlossene Kurve γ, die z_0 im negativen Uhrzeigersinn einfach umrundet,

$$a_n \;=\; \frac{1}{2\pi i}\cdot\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz.$$

Satz 2.4 Seien $f : G_1 \to \mathbb{C},\quad g : G_2 \to \mathbb{C}$ zwei analytische Funktionen und sei $A \subseteq G_1 \cap G_2$ eine Menge mit $\overline{A} \neq \emptyset$, für die $f(z) = g(z)$ gilt, dann gilt $f(z) = g(z)$ für alle $z \in G_1 \cap G_2$.

Satz 2.5 Seien $f_n : G \to \mathbb{C}$ analytische Funktionen und gilt für jede kompakte Menge $K \subseteq G$, dass f_n in K gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion $f : G \to \mathbb{C}$ konvergiert, so ist $f : G \to \mathbb{C}$ auch analytisch.

Definition 2.3 Sei $f : G\backslash\{z_0\} \to \mathbb{C}$ analytisch ($z_0 \in G$). z_0 heißt *Pol* von f, wenn es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt, sodass die Funktion $g(z) = (z-z_0)^k \cdot f(z)$ zu einer analytischen Funktion $g : G \to \mathbb{C}$ fortgesetzt werden kann. Der *Pol* ist *k-fach*, wenn $g(z_0) \neq 0$ ist. Ist $g(z) = a_{-k} + a_{-k+1}(z-z_0)^1 + a_{-k+2}(z-z_0)^2 + \ldots$ die Potenzreihenentwicklung von g an der Stelle z_0, so hat $f(z)$ für $z \neq z_0$ die Darstellung

$$f(z) \;=\; \sum_{n\geq -k} a_n \cdot (z-z_0)^n \;=\; \frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k} + \cdots + a_0 + a_1(z-z_0)^1 + \cdots$$

Der Koeffizient $a_{-1} = \mathrm{Res}(f, z_0)$ heißt *Residuum* von f an z_0.

Satz 2.6 Sei $f : G \to \mathbb{C}$ analytisch bis auf endlich viele Pole und γ eine geschlossene Kurve, die diese Pole im negativen Uhrzeigersinn einfach umrundet. Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi i}\cdot\int_\gamma f(z)dz \;=\; \sum_i \mathrm{Res}(f, z_i)$$

Satz 2.7 Konvergiert eine Dirichletsche Reihe $\sum_{n=1}^\infty a_n n^{-s}$ für ein $s_0 \in \mathbb{C}$, dann konvergiert sie auch für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(s_0)$ und stellt dort eine analytische Funktion dar. Weiters sei $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Dann gilt

$$\lim_{\substack{s\to s_0,\\ arg(s-s_0)\leq\alpha}} \sum_{n\geq 1} a_n n^{-s} \;=\; \sum_{n\geq 1} a_n n^{-s_0}\;.$$

Satz 2.8 Konvergiert eine Dirichletsche Reihe $\sum_{n\geq 1} a_n n^{-s}$ für ein $s_0 \in \mathbb{C}$, dann konvergiert sie für alle s mit $\mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(s_0)+1$ sogar absolut.

Satz 2.9 Konvergiert eine Dirichletsche Reihe $\sum_{n\geq 1} a(n)\, n^{-s}$ absolut, und ist die zahlentheoretische Funktion $a(n)$ multiplikativ, so gilt

$$\sum_{n\geq 1} a(n)\, n^{-s} \;=\; \prod_{p\in\mathbb{P}} \left(1 + \frac{a(p)}{p^s} + \frac{a(p^2)}{p^{2s}} + \cdots\right) .$$

Ist $a(n)$ überdies vollständig multiplikativ, so gilt sogar

$$\sum_{n\geq 1} a(n)\, n^{-s} \;=\; \prod_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{1 - \frac{a(p)}{p^s}} .$$

[Dies ist die *Eulersche Produktdarstellung* einer Dirichletschen Reihe.]

Satz 2.10 Die Dirichletsche Reihe $f(s) = \sum_{n\geq 1} a_n n^{-s}$ konvergiere für $\mathrm{Re}(s) > \sigma$ absolut. Dann gilt für $c > \sigma$

$$\sum_{n\leq x}{}^{*} a_n \;=\; \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{f(s)}{s} x^s ds \quad \left[= \frac{1}{2\pi i} \lim_{T\to\infty} \int_{c-iT}^{c+iT} \frac{f(s)}{s} x^s ds\right] ,$$

wobei $\sum^{*}$ bedeutet, dass der letzte Summand mit $\frac{1}{2}$ multipliziert werden muss, falls x eine natürliche Zahl ist.

Lemma 2.1 Sei $c, a \in \mathbb{R}^+$. Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} a^z \frac{dz}{z} \;=\; \begin{cases} 1 & \text{für } \; a > 1 \\ \frac{1}{2} & \text{für } \; a = 1 \\ 0 & \text{für } \; 0 < a < 1 \end{cases} .$$

Weiters gilt

$$\left|\frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{c-iT}^{c+iT} a^z \frac{dz}{z} - 1\right| \;\leq\; \frac{a^c}{\pi T \log a} \quad \text{für } \; a > 1$$

$$\left|\frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{c-iT}^{c+iT} a^z \frac{dz}{z} - \frac{1}{2}\right| \;\leq\; \frac{c}{\pi T} \quad \text{für } \; a = 1$$

$$\left|\frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{c-iT}^{c+iT} a^z \frac{dz}{z}\right| \;\leq\; \frac{a^c}{\pi T \log \frac{1}{a}} \quad \text{für } \; 0 < a < 1.$$

Satz 2.11 (Eigenschaften der Gammafunktion) Für $\mathrm{Re}(s) > 0$ sei $\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} \exp(-x) dx$. Wegen $\Gamma(n+1) = n!$ stellt dieses Integral eine analytische Fortsetzung von $n!$ dar. Diese (sogenannte) *Gammafunktion* $\Gamma(s)$ lässt sich bis auf Pole 1. Ordnung an den Stellen $s = 0, -1, -2$ mit Residuen $\mathrm{Res}(\zeta(s), s = -n) = \frac{(-1)^n}{n!}$ in die ganze komplexe Ebene analytisch fortsetzen. Für $s \neq 0, -1, -2, \ldots$ gilt auch

$$\Gamma(s) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^s \, n!}{s(s+1)\cdots(s+n)} \ .$$

Weiters erfüllt die Gammafunktion die Funktionalgleichungen

$$\Gamma(s+1) = s \cdot \Gamma(s), \quad \Gamma(s) \cdot \Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}$$

und für alle natürlichen Zahlen $m \geq 1$

$$\Gamma(s) \cdot \Gamma(s + \frac{1}{m}) \cdots \Gamma(s + \frac{m-1}{m}) = (2\pi)^{\frac{m-1}{2}} \cdot m^{\frac{1}{2} - ms} \cdot \Gamma(ms) \ .$$

Die reziproke Funktion $\frac{1}{r(s)}$ ist eine ganze Funktion und hat die Darstellungen

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = s \cdot \exp(cs) \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{s}{n}\right) \exp\left(\frac{-s}{n}\right) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_\gamma \frac{\exp z}{z^s} dz \ ,$$

wobei c die *Eulersche Konstante* bezeichnet und γ ein Hankelintegral der Form:

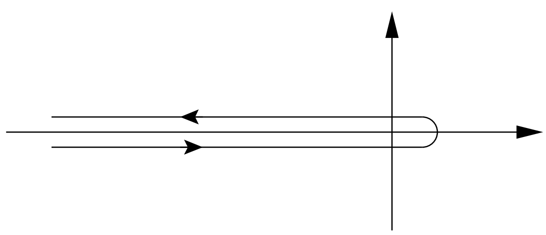

Abbildung 2.1: Kurve γ

Kapitel 3

Der Primzahlsatz mit Restglied

Lemma 3.1 Seien komplexe Zahlen a_n und eine Folge $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n \to \infty$ reeller Zahlen gegeben. Die komplexwertige Funktion g sei im Intervall $[\lambda_1, x]$ stetig und (stückweise) differenzierbar. Dann ist

$$\sum_{\lambda_n \leq x} a_n g(\lambda_n) \;=\; g(x) \cdot \sum_{\lambda_n \leq x} a_n \;-\; \int_{\lambda_1}^{x} \left(\sum_{\lambda_n \leq u} a_n \right) \cdot g'(u) du \;.$$

Lemma 3.2 Sei $\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1,\;\; \vartheta(x) = \sum_{p \leq x} \log p$ und $\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) = \sum_{p^m \leq x} \log p$.
Dann gilt:

1. $$\psi(x) \;=\; \sum_{m \geq 1} \vartheta(x^{\frac{1}{m}}) \;=\; \sum_{n \leq [\log x / \log 2]} \vartheta(x^{\frac{1}{m}})$$

2. $$\psi(x) \;=\; \vartheta(x) + \mathcal{O}(x^{\frac{1}{2}} \log x)$$

3. $$\vartheta(x) \;=\; \mathcal{O}(x) \;\Rightarrow\; \psi(x) \;=\; \vartheta(x) + \mathcal{O}(x^{\frac{1}{2}})$$

4. $$\pi(x) \;=\; \vartheta(x)(\log x)^{-1} + \int_2^x \vartheta(u)(u \log^2 u)^{-1} du$$

5.

$$\vartheta(x) \;=\; \pi(x)\log x - \int_2^x \pi(u)u^{-1}du\;.$$

Lemma 3.3 Es gilt die folgende Implikationskette: $(c > 0,\ 0 < \alpha < 1)$

$$\int_2^x \psi(u)du \;=\; \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^2\exp\left(-c(\log x)^\alpha\right))$$

$$\Rightarrow \psi(x) \;=\; x + \mathcal{O}(x\exp\left(-\frac{1}{2}c(\log x)^\alpha\right))$$

$$\Rightarrow \vartheta(x) \;=\; x + \mathcal{O}(x\exp\left(-\frac{1}{2}c(\log x)^\alpha\right))$$

$$\Rightarrow \pi(x) \;=\; \int_2^x \frac{du}{\log u} + \mathcal{O}(x\exp\left(-\frac{1}{2}2^{-\alpha}c(\log x)^\alpha\right))$$

Bemerkung 3.4

$$\int_2^x \frac{du}{\log u} \;=\; \frac{x}{\log x} + \frac{x}{\log^2 x} + 2\frac{x}{\log^3 x} + \cdots + k!\frac{x}{(\log x)^{k+1}} + \mathcal{O}(\frac{x}{(\log x)^{k+2}}).$$

Lemma 3.5 $(c > 1)$

$$\psi_1(x) \;=\; \int_2^x \psi(u)du \;=\; \sum_{n\le x}\Lambda(n)(x-n) \;=\; \frac{1}{2\pi i}\cdot\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{x^{s+1}}{s(s+1)}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)ds$$

Definition 3.1 Sei $0 < a \le 1$ und $\mathrm{Re}(s) > 1$. Dann ist durch

$$\zeta(s,a) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+a)^s}$$

die *Hurwitzsche Zetafunktion* definiert. Speziell gilt $\zeta(s,1) \;=\; \zeta(s)$.
Sie stellt für $\mathrm{Re}(s) > 1$ eine analytische Funktion dar.

Lemma 3.6 Sei γ:

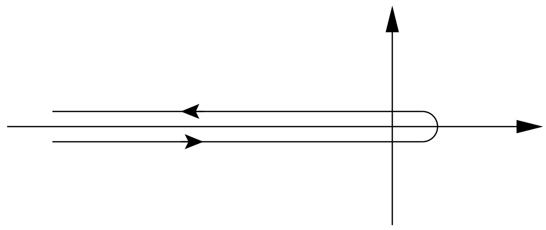

Abbildung 3.1: Kurve γ

jene Hankelkurve, die auch bei der Hankelschen Integraldarstellung der Γ-Funktion auftritt und $0 < a \leq 1$. Dann stellt das Integral

$$I(s,a) \;=\; \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{z^{s-1}\exp(az)}{1-\exp z}dz$$

eine in ganz $\mathbb{C}$ analytische Funktion [= ganze Funktion] dar.
Für $\mathrm{Re}(s) > 1$ gilt überdies

$$\zeta(s,a) \;=\; \Gamma(1-s)\cdot I(s,a).$$

Bemerkung 3.7 Mit dieser Darstellung lässt sich, bis auf $s = 1$, $\zeta(s,a)$ auf $\mathbb{C}$ fortsetzen.

Satz 3.1 Die fortgesetzte *Hurwitzsche Zetafunktion* $\zeta(s,a)$ ist analytisch bis auf einen Pol 1. Ordnung im Punkt $s = 1$ mit Residuum
$\mathrm{Res}(\zeta(s,a),1) = 1$.

Satz 3.2 (Hurwitzsche Formel) Sei $F(x,s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\exp(2\pi inx)}{n^s}$ für $x \in \mathbb{R}$ und $\mathrm{Re}(s) > 1$. Für $0 < a \leq 1$ und $\mathrm{Re}(s) > 1$ gilt

$$\zeta(1-s,a) \;=\; \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s}\left(\exp(-\pi is/2)F(a,s) + \exp(\pi is/2)F(-a,s)\right).$$

Satz 3.3 (Funktionalgleichung für die Zetafunktion)

1.

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\cdot\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\cdot\zeta(s) \;=\; \pi^{-\frac{1-s}{2}}\cdot\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\cdot\zeta(1-s)$$

2.

$$\zeta(1-s) \;=\; 2(2\pi)^{-s} \cdot \Gamma(s) \cdot \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \cdot \zeta(s)$$

3.

$$\zeta(s) \;=\; 2(2\pi)^{s-1} \cdot \Gamma(1-s) \cdot \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \cdot \zeta(1-s).$$

Satz 3.4 $h,\, k \in \mathbb{Z}, \quad 1 \leq h \leq k \;:$

$$\zeta\left(1-s, \frac{h}{k}\right) \;=\; \frac{2\Gamma(s)}{(2\pi k)^s} \cdot \sum_{r=1}^{k} \cos\left(\frac{\pi s}{2} - \frac{2\pi r h}{k}\right) \cdot \zeta\left(s, \frac{r}{k}\right)$$

Lemma 3.8 Es gelten folgende Abschätzungen für die Zetafunktion:

1. Sei $0 < \delta \leq \frac{1}{2}$ vorgegeben. So gilt für $\sigma \geq 1-\delta$ und $t \in \mathbb{R}$

$$\left|\zeta(\sigma+it) - \frac{1}{\sigma+it-1}\right| \;\leq\; (8+\frac{2}{\delta}) \cdot (|t|+2)^{\delta} \cdot \log(|t|+2).$$

2. Sei $A > 0$. Dann gilt für alle t und $\sigma \geq \max\{\frac{1}{2}, 1 - \frac{A}{\log(|t|+2)}\}$

$$\left|\zeta(\sigma+it) - \frac{1}{\sigma+it-1}\right| \;\leq\; \left(\exp(2A)\left(6+\frac{2}{A}\right)\right) \cdot \log(|t|+2).$$

3. Sei $A > 0$. Dann gilt für alle t und $\sigma \geq \max\{\frac{1}{2}, 1 - \frac{A}{\log(|t|+2)}\}$

$$\left|\zeta'(\sigma+it) - \frac{1}{(\sigma+it-1)^2}\right|$$

$$\leq\; \max\{\exp(4A)(6+\frac{1}{A})\frac{1}{A}; (1+2\exp(4A))/(\log 2)^2\} \cdot (\log(|t|+2))^2.$$

4. Es gibt positive Konstanten $c_1 = (2160)^{-4}$, $c_2 > 0$, sodass für alle $|t| \geq \frac{1}{2}$ und $\sigma \;\geq\; 1 - c_1 \cdot (\log(|t|+2))^{-9}$ die Abschätzung

$$|\zeta(\sigma+it)| \;\geq\; c_2 \cdot (\log(\mid t \mid +2))^{-7}$$

gilt. Insbesondere hat $\zeta(s)$ dort keine Nullstellen.

5. Für $\frac{2}{3} \leq \sigma \leq \frac{4}{3}, \quad |t| \leq \frac{1}{2}, \quad \sigma+it \neq 1$ gilt $\mid \zeta(\sigma+it) \mid > \frac{2}{5}$.

Satz 3.5 Es gilt

$$\pi(x) \;=\; \int_2^x \frac{du}{\log u} + \mathcal{O}\left(x \exp\left(-0,01(\log x)^{0,1}\right)\right).$$

Satz 3.6 Ist $\rho = \sigma_0 + it_0$ mit $\frac{1}{2} \leq \sigma < 1$ eine Nullstelle der Zetafunktion, so ist die Abschätzung

$$\psi(x) \;=\; x + o\left(x^{\sigma_0}\right) \quad (x \;\to\; \infty)$$

falsch.

Satz 3.7

$$M(x) \;=\; \sum_{n \leq x} \mu(n) \;=\; \mathcal{O}\left(x \exp\left(-c(\log x)^{\frac{1}{10}}\right)\right)$$

$$Q(x) \;=\; \sum_{n \leq x} \mid \mu(n) \mid = \frac{x}{\zeta(2)} + \mathcal{O}\left(x^{\frac{1}{2}} \exp\left(-c(\log x)^{\frac{1}{10}}\right)\right)$$

Kapitel 4

Primzahlen in arithmethischen Folgen

Definition 4.1 Sei χ ein Dirichlet-Charakter (modulo k). Dann bezeichnet man die Dirichletsche Reihe

$$L(s, \chi) = \sum_{n \geq 1} \frac{\chi(n)}{n^s}$$

als *Dirichletsche L-Reihe.*

Lemma 4.1 Für $\chi \neq \chi_0$ stellt $\sum_{n \geq 1} \chi(n) n^s$ eine für $\mathrm{Re}(s) > 0$ analytische Funktion dar.
Für $\chi = \chi_0$ gilt

$$L(s, \chi_0) = \zeta(s) \cdot \prod_{p|k} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right).$$

$L(s, \chi_0)$ ist daher bis auf einen Pol 1. Ordnung im Punkt $s = 1$ mit Residuum $\mathrm{Res}(L(s, \chi_0), 1) = \frac{\varphi(k)}{k}$ analytisch.

Lemma 4.2 Sei $0 < A \leq \frac{1}{2} \log 2$, dann gilt für $L(s, \chi)$, $\chi \neq \chi_0$, im Bereich $1 - A / \log(k(|t| + 2)) \leq \sigma \leq 2 \quad (s = \sigma + it)$

$$| L(s, \chi) | \leq c_1(A) \cdot \log(k(|t| + 2))$$

$$| L'(s, \chi) | \leq c_2(A) \cdot \log^2(k(|t| + 2)).$$

Ist $\chi \neq \chi_0$ nichtreell (d.h. $\chi^2 \neq \chi_0$) und t beliebig oder $\chi \neq \chi_0$ reell und $|t| \geq 1$, so existieren Konstanten δ, c_3, sodass für $1 - \delta \log(k(|t| + 2))^{-9} \leq \sigma \leq 2$

$$| L(s, \chi) | \geq c_3 \cdot \log(k(|t| + 2))^{-7}$$

gilt.

Satz 4.1 (Siegel) Zu jedem $c > 0$ existiert ein $k_0(\varepsilon)$, sodass für alle reellen Dirichlet-Charaktere $\chi \neq \chi_0 \quad modulo\, k$ mit $k \geq k_0(\varepsilon)$ und $1 - k^{-\varepsilon} \leq \sigma \leq 1$

$$L(\sigma, \varphi) \neq 0$$

gilt.

Lemma 4.3 Sei $B > 0$ und $\varepsilon = \min\left(\frac{1}{B}, \frac{1}{3B}\right)$. Ist $\chi \neq \chi_0$ reell, so existieren Konstanten $c_4(\varepsilon), c_5(\varepsilon)$, sodass für $\mid s - 1 \mid \leq c_4(\varepsilon) k^{-\varepsilon}$

$$\mid L(s, \chi) \mid > c_5(\varepsilon) k^{-\varepsilon} \log^2(4k)$$

gilt. Schließlich existiert noch ein $\delta(\varepsilon)$, sodass für $|t| \leq 1$, $|s - 1| \geq c_4(\varepsilon) k^{-\varepsilon}$ und $1 - \delta(\varepsilon) k^{-\varepsilon} (\log 3k)^{-8} \leq \sigma \leq 2$

$$\mid L(s, \chi) \mid > c_6(\varepsilon) k^{-\varepsilon} \log(3k)^{-6}$$

mit einer Konstanten $\sigma_6(\varepsilon) > 0$.

Satz 4.2 Sei $B > 0$ und

$$\psi(x; \chi) = \sum_{n \leq x} \chi(n) \cdot \Lambda(n),$$

so gilt für alle Dirichlet-Charaktere $\chi \quad modulo\, k, \quad k \leq (\log x)^B$

$$\psi(x; \chi_0) = x + \mathcal{O}\left(x \exp\left(-c(\log x)^{\frac{1}{10}}\right)\right),$$

$$\psi(x; \chi) = \mathcal{O}\left(x \exp\left(-c(\log x)^{\frac{1}{10}}\right)\right), \quad \text{für } \chi \neq \chi_0.$$

Folgerung 4.1 Sei $\psi(x; k, a) = \sum_{n \leq x,\ n \equiv a(k)} \chi(n) \cdot \Lambda(n)$ und $B > 0$. Dann gilt für alle $k \leq (\log^q x)^B$ und alle a mit $\mathrm{ggT}(a, k) = 1$

$$\psi(x; k, a) = \frac{x}{\varphi(k)} + \mathcal{O}\left(x \exp\left(-c(\log x)^{\frac{1}{10}}\right)\right).$$

Satz 4.3 (Page-Siegel-Walfisz) Sei $B > 0$. Dann gilt für alle $k \leq (\log x)^B$ und alle a mit $\mathrm{ggT}(a, k) = 1$

$$\pi(x; k, a) = \mid \{p \leq x \mid p \equiv a(k)\} \mid = \frac{1}{\varphi(k)} \cdot \int_2^x \frac{du}{\log u} + \mathcal{O}\left(x \exp\left(-c(\log x)^{\frac{1}{10}}\right)\right).$$

Kapitel 5

Der Satz von Goldbach-Vinogradov

Goldbachsche Vermutung (1742, Brief an Euler)
(A) Jede gerade natürliche Zahl $N \geq 4$ ist Summe zweier Primzahlen.
(B) Jede ungerade natürliche Zahl $N \geq 7$ ist Summe von drei Primzahlen.

$$(A) \Rightarrow (B)$$

Lemma 5.1 Sei $r(N) = |\{(p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{P}^3 \mid N = p_1 + p_2 + p_3\}|$ und $S(\alpha) = \sum_{p \leq N} e(\alpha p)$, wobei $e(x) = \exp(2\pi i x)$ bezeichnet, dann gilt

$$r(N) = \int_0^1 S(\alpha)^3 e(-\alpha N) d\alpha.$$

Bezeichnungsweise
Sei $w_0 = \frac{(\log N)^A}{N}$ und $I = [-w_0, 1 - w_0]$.
Für jede rationale Zahl $\frac{a}{q}$, $0 < q \leq (\log N)^A$, $0 \leq a < q$, $\mathrm{ggT}(a, q) = 1$ bezeichne

$$\mathcal{M}_{a,q} = \left[\frac{a}{q} - w_0, \frac{a}{q} + w_0\right]$$

und

$$\mathcal{M} = \bigcup_{0 < q \leq (\log N)^A} \bigcup_{\substack{0 \leq a < q \\ ggT(a,q)=1}} \mathcal{M}_{a,q}.$$

Es gilt $\mathcal{M} \subseteq J$ und alle $\mathcal{M}_{a,q}$ sind disjunkt für $N \geq N_0$, $\mathcal{M}$ wird als *„major arc“* (Hauptteil) und $m = [-w_0, 1 - w_0] \backslash \mathcal{M}$ als *„minor arc“* bezeichnet.

Lemma 5.2 Zu jedem $\alpha \in m$ existieren a, q, $0 \leq a < q$, $\mathrm{ggT}(a, q) = 1$, $(\log N)^A < q \leq N/(\log N)^A$ mit $\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \leq \frac{w_0}{q} \leq \frac{1}{q^2}$.

Satz 5.1 (Vinogradov) Ist $\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}$ mit $\mathrm{ggT}(a, q) = 1, \ \ 1 < q \le N$ und $|\theta| \le 1$, so gilt für $S(\alpha) \ = \ \sum_{p \le N} e(\alpha p)$ die Abschätzung

$$| \ S(\alpha) \ | \le \ C \cdot N(logN)^{\frac{9}{2}} \left(\sqrt{\frac{1}{q} + \frac{q}{N}} + \exp\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\log N} \right) \right)$$

mit einer absoluten Konstanten $C > 0$.

Lemma 5.3

$$\sup_{\alpha \in m} | \ S(\alpha) \ | \ = \ \mathcal{O}\left(N(\log N)^{\frac{9-A}{2}} \right)$$

Lemma 5.4

$$\int_0^1 | \ S(\alpha) \ |^2 \ d\alpha \ = \ \pi(N) \ \sim \ \frac{N}{\log N}$$

Folgerung 5.1

$$\int_m S(\alpha)^3 e(-\alpha N) d\alpha \ = \ \mathcal{O}\left(N^2 (\log N)^{\frac{7-A}{2}} \right)$$

Lemma 5.5 Sei $\alpha \in \mathcal{M}_{a,q}$, d.h. $\alpha = \frac{a}{q} + \beta$ mit $|\beta| \le w_0$ und $(a, q) = 1$, und $q \le (\log N)^A$. Dann gilt

$$S(\alpha) \ = \ S\left(\frac{a}{q} + \beta \right) \ = \ W_q(\beta) + \mathcal{O}\left(q \cdot N(\log N)^A \exp\left(-c(\log N)^{\frac{1}{10}} \right) \right) \ ,$$

wobei

$$W_q(\beta) \ = \ \frac{\mu(q)}{\varphi(q)} \cdot \sum_{n=2}^{N} \frac{e(n\beta)}{\log N}$$

bezeichnet.

Folgerung 5.2

$$S^3 \left(\frac{a}{q} + \beta \right) \ = \ W_q(\beta)^3 + \mathcal{O}\left(N^3 (\log N)^{3A} \exp\left(-c(\log N)^{\frac{1}{10}} \right) \right)$$

Lemma 5.6 Sei $I_{a,q}(w) \ = \ \int_{-w}^{w} W_q(\beta)^3 e(-(\frac{a}{q} + \beta)N) d\beta$, so gilt für $q \le (\log N)^A$, $\mathrm{ggT}(a, q) \ = \ 1$:

$$\left| I_{a,q}\left(\frac{1}{2} \right) \ - \ I_{a,q}(w_0) \right| \ = \ \mathcal{O}\left(\frac{N^2}{\varphi(q)^3 (\log N)^{2A}} \right) \ .$$

Lemma 5.7 Es bezeichne

$$c_q(m) \;=\; \sum_{\substack{0\le a<q \\ ggT(a,q)=1}} e\left(\frac{a}{q}m\right),$$

$$\rho(N) \;=\; \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\mu(q)}{\varphi(q)^3} c_q(-N) \quad \text{und}$$

$$\rho(N) \;=\; \sum_{\substack{2\le n_1,n_2,n_3\le N \\ n_1+n_2+n_3=N}} \frac{1}{\log n_1 \cdot \log n_2 \cdot \log n_3} \;.$$

Dann gilt

$$\int_{\mathcal{M}} S(\alpha)^3 e(-\alpha N) d\alpha \;=\; \zeta(N)\cdot\rho(N) + \mathcal{O}\left(N^2(\log\log N)^2(\log N)^{-A}\right) \;.$$

Lemma 5.8

$$\rho(N) \;=\; \sum_{\substack{2\le n_1,n_2,n_3\le N \\ n_1+n_2+n_3=N}} \frac{1}{\log n_1 \cdot \log n_2 \cdot \log n_3} \;=\; \frac{N^2}{2(\log N)^3} \;+\; \mathcal{O}\left(\frac{N^2 \log\log N}{(\log N)^4}\right)$$

Lemma 5.9

$$c_q(m) \;=\; \sum_{\substack{0\le a<q \\ ggT(a,q)=1}} e(\frac{a}{q}m) \;\; \text{ist multiplikativ in } q$$

Lemma 5.10

$$\zeta(N) \;=\; \prod_p \left(1 \;-\; \frac{c_p(-N)}{\varphi^3(p)}\right) \;=\; \prod_{p \text{ teilt nicht } N} \left(1 \;+\; \frac{1}{(p-1)^3}\right) \cdot \prod_{p|N} \left(1 \;-\; \frac{1}{(p-1)^2}\right).$$

Für ungerades N gilt $\zeta(N) \;\ge\; \frac{6}{\pi^2}$ und für gerades N ist $\zeta(N) \;=\; 0$.

Satz 5.2 Jede hinreichend große ungerade Zahl N kann als Summe dreier Primzahlen dargestellt werden.
Es gilt auch die asymptotische Beziehung

$$r(N) \;=\; \frac{1}{2}\zeta(N)\cdot \frac{N^2}{(\log N)^3} \;+\; \mathcal{O}\left(\frac{N^2 \log\log N}{(\log N)^4}\right),$$

wobei

$$\zeta(N) \;=\; \prod_{p \text{ teilt nicht } N} \left(1 \;+\; \frac{1}{(p-1)^3}\right) \cdot \prod_{p|N} \left(1 \;+\; \frac{1}{(p-1)^2}\right)$$

für ungerades N $\quad \zeta(N) \;\ge\; \frac{6}{\pi^2}$ erfüllt.