# Moore - Penrose - Pseudoinverse

**Motivation** $\quad f: V \to W \quad$ ($V, W$ endlich)

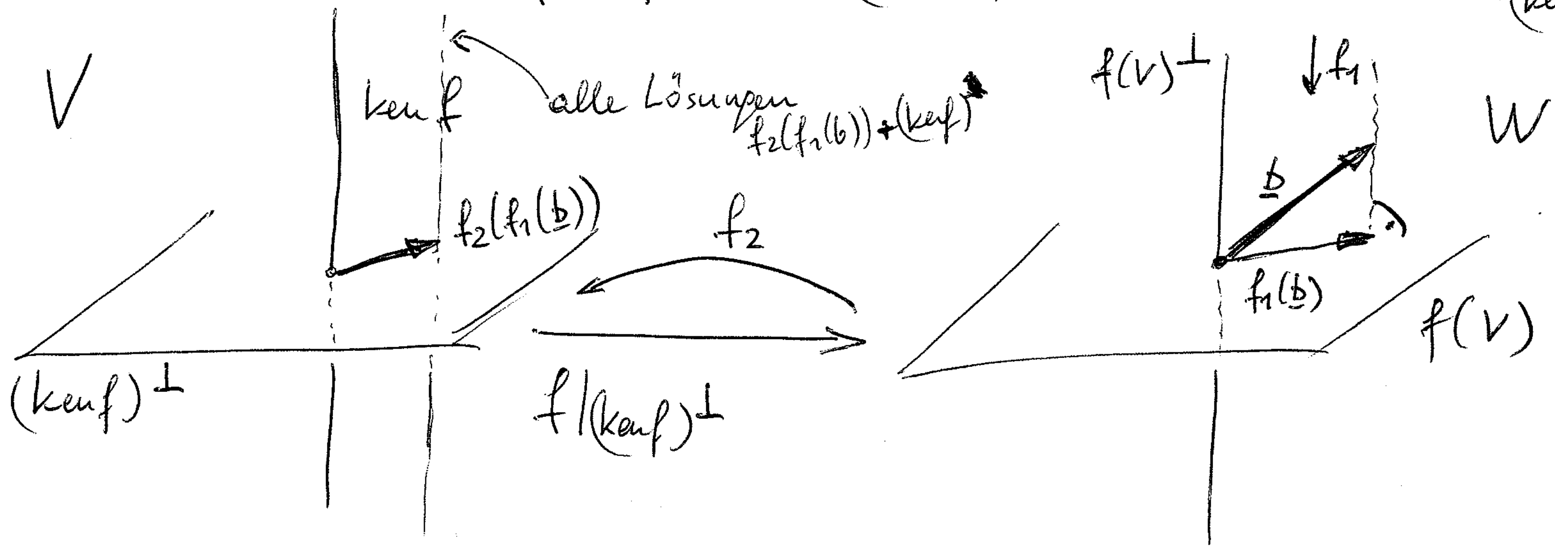
Gegeben: $\underline{b} \in W$

Gesucht: $\underline{a} \in V$ mit
- $\| f(\underline{a}) - \underline{b} \|$ minimal
- $\| \underline{a} \|$ minimal

**Lösung**: $\underline{a} = (f_2 \circ f_1)(\underline{b})$

$f_1 : W \to f(V)$ Orthogonalprojektion

$f_2 : f(V) \to (\ker f)^\perp$ Inverse von $f|_{(\ker f)^\perp} : (\ker f)^\perp \to f(V)$



- Eigenschaften von $\quad g(y) := (f_2 \circ f_1)(y)$

$$f \circ g \circ f = \underbrace{f \circ f_2}_{id|_{f(V)}} \circ f_1 \circ f = f_1 \circ f = f$$

$$f_1|_{f(V)} = id|_{f(V)}$$

$$g \circ f \circ g = f_2 \circ f_1 \circ \underbrace{f \circ f_2}_{id|_{f(V)}} \circ f_1 = f_2 \circ \underbrace{f_1 \circ f_1}_{f_1} = f_2 \circ f_1 = g$$

$$f \circ g = \underbrace{f \circ f_2}_{id|_{f(V)}} \circ f_1 = f_1 \text{ ... Orthogonalproj. auf } f(V)$$

$\Rightarrow f \circ g$ selbstadj.

$$g \circ f = f_2 \circ f_1 \circ f = f_2 \circ f \text{ .... Orthogonalproj. auf } (\ker f)^{\perp}$$

$$f_1|_{f(V)} = id|_{f(V)}$$

$\Rightarrow g \circ f$ selbstadj

**Def** $(V, z_V), (W, z_W)$ ... ω-symm., endlich dim.

$f \in L(V, W)$

$g \in L(W, V)$ ist <u>Moore-Penrose-Pseudoinverse</u> von $f$

$:\Longleftrightarrow$ (1) $f \circ g \circ f = f$

(2) $g \circ f \circ g = g$

(3) $f \circ g$ selbstadj.

(4) $g \circ f$ selbstadj.

**Bem** $g$ mit (1), (2) heißt pseudoinverse Abb. von $f$
(und ist i. Allg. nicht eindeutig)

**Satz** $(V, \tau_V), (W, \tau_W)$ ... $\omega$-symm., endlichdim.

$f \in L(V, W)$,

$f_1 : W \to f(V)$ Orthogonalproj.

$f_2 : f(V) \to (\ker f)^\perp$ Inverse von $f|_{(\ker f)^\perp} : (\ker f)^\perp \to f(V)$

$\Rightarrow f^+ := f_2 \circ f_1$ ist die einzige Moore-Penrose-Pseudoinverse von $f$.

**Bew.**

- $f_2 \circ f_1$ erfüllt alle Eigenschaften (1)–(4) einer M-P-Pseudoinversen (wurde gerade nachgerechnet)
- Sei $g \in L(W, V)$ M-P-Pseudoinverse von $f$.

$f \circ g \circ f = f \Rightarrow f \circ g \circ f \circ g = f \circ g$

$\Rightarrow f \circ g$ Projektion + selbstadj. $\Rightarrow f \circ g$ Orth.proj.

analog: $g \circ f$ ist Orthogonalproj.

$\underline{f \circ g = f_1}$

$f(V) = (f \circ g \circ f)(V) \subseteq (f \circ g)(W) \subseteq f(V)$

$\Rightarrow f(V) = (f \circ g)(W) \Rightarrow f \circ g$ Orth.proj. auf $f(V)$ ✓

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow g = g \circ f \circ g = g \circ f_1 \\ \underline{g|_{f(V)} = f_2} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{g = f_2 \circ f_1}$$

$y \in f(V) \Rightarrow \underline{(f \circ g)(y) = y}$, da $f \circ g$ Orth.proj. auf $f(V)$

$g \circ f$ Orth.proj. auf $g(W)$ [analog]

$\ker g \subseteq \ker(f \circ g) \subseteq \ker(g \circ f \circ g) = \ker g$

$\Rightarrow \ker g = \ker(f \circ g) = f(V)^{\perp}$

analog: $\ker f = g(W)^{\perp} \Rightarrow g(W) = (\ker f)^{\perp} \Rightarrow g \circ f$ O.P. auf $(\ker f)^{\perp}$

$\underline{x} \in (\ker f)^{\perp} \Rightarrow \underline{(g \circ f)(\cancel{x}) = x}$

**Def** $A \in K^{m \times n}$

$B \in K^{n \times m}$ M-P-Pseudoinv. matrix von $A$

$:\Leftrightarrow$ $ABA = A$

$BAB = B$

$AB, BA$ $(\omega$-) symmetrisch.

**Satz** $A \in K^{m \times n}$, $\omega \circ \omega = id$

$\Rightarrow$ Es gibt eine eindeutig bestimmte M-P-pseudoinverse Matrix $A^+ \in K^{n \times m}$

<u>Spezialfälle</u> $\quad f \in L(V,W)$ $\quad$ dim $V = n$, dim $W = m$

$r = \operatorname{rg} f$

- <u>$r = n$</u> $\iff$ <u>$f$ inj</u> $\Rightarrow \ker f = \{0\} \Rightarrow \ker(\hat{f} \circ f) = \{0\} \Rightarrow \hat{f} \circ f$ bijektiv.

$$\Rightarrow \boxed{f^+ = (\hat{f} \circ f)^{-1} \circ \hat{f}}$$

$$f \circ f^+ \circ f = f \circ \underbrace{(\hat{f} \circ f)^{-1} \circ \hat{f} \circ f}_{id} = f \quad \checkmark$$

$$f^+ \circ f \circ f^+ = \underbrace{(\hat{f} \circ f)^{-1} \circ \hat{f} \circ f}_{id} \circ (\hat{f} \circ f)^{-1} \circ \hat{f} = (\hat{f} \circ f)^{-1} \circ \hat{f} = f^+ \quad \checkmark$$

$$f \circ f^+ = f \circ (\hat{f} \circ f)^{-1} \circ \hat{f} \Rightarrow \widehat{f \circ f^+} = \hat{\hat{f}} \circ (\hat{f} \circ f)^{-1} \circ \hat{f} = f \circ f^+ \quad \checkmark$$

$$f^+ \circ f = (\hat{f} \circ f)^{-1} \circ \hat{f} \circ f = id, \quad \widehat{id} = id \quad \checkmark$$

- <u>$r = m$</u> $\iff$ $f$ <u>surj</u> $\Rightarrow \hat{f}$ inj $\Rightarrow \hat{\hat{f}} \circ \hat{f} = f \circ \hat{f}$ bij.

$$\Rightarrow \boxed{f^+ = \hat{f} \circ (f \circ \hat{f})^{-1}}$$

[analog]

<u>Spezialfälle</u> $A \in K^{m \times n}$ $\omega \circ \omega = \mathrm{id}$

- $\operatorname{rg} A = n \Rightarrow \boxed{A^+ = \left(\omega(A)^T \cdot A\right)^{-1} \cdot \omega(A)^T}$
- $\operatorname{rg} A = m \rightarrow \boxed{A^+ = \omega(A)^T \cdot \left(A \cdot \omega(A)^T\right)^{-1}}$

<u>Allgemeiner Fall</u> ($V, W$ euklidisch / unitär)

$$A = Q \cdot \left(\begin{array}{c|c} W & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) P \quad \ldots \text{ Singulärwertzerlegung}$$

$$\Rightarrow \boxed{A^+ = P^H \cdot \left(\begin{array}{c|c} W^{-1} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \cdot Q^H}$$

$$A \cdot A^+ \cdot A = Q \left(\begin{array}{c|c} W & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \cancel{P \cdot P^H} \left(\begin{array}{c|c} W^{-1} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \cancel{Q^H Q} \left(\begin{array}{c|c} W & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) P = Q \left(\begin{array}{c|c} W & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) P = A$$

$A^+ A A^+ = A^+$ analog, $(A A^+)^H = A \cdot A^+$, $(A^+ A)^H = A^+ A$ analog

# Gaußsche Normalgleichungen

$A\underline{x} = \underline{s}$ unlösbar (zu viele Gleichungen)

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\operatorname{rg} A = n$, $\underline{\underline{m > n}}$

<u>Gesucht</u> $\underline{x}$ mit $\|Ax - s\|$ minimal

$$f(\underline{x}) = f(x_1, \dots, x_n) = \|A\underline{x} - s\|^2 = \sum_{i=1}^{m} \left( \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j - s_i \right)^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = 0 \iff \cancel{2} \sum_{i=1}^{m} \left( \sum_{l=1}^{n} a_{il} x_l - s_i \right) \cdot a_{ij} = 0$$

$$\iff A^T \cdot (A\underline{x} - \underline{s}) = \underline{0}$$

$$\iff \boxed{A^T \cdot A \cdot \underline{x} = A^T \cdot s}$$ Gaußsche Normalgleichungen

$$\iff \boxed{\underline{x} = (A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T \cdot \underline{s} = A^{+} \cdot \underline{s}}$$