Metrisch-affine Geometrie

V ... eukl. (oder unitärer) Vektorraum

$\mathcal{A} = \underline{r} + X$ ... affiner Raum in V, $\underline{r} \in V$, $X \leq V$

- $\underline{a}, \underline{b} \in \mathcal{A}$

  $d(\underline{a}, \underline{b}) = \|\underline{a} - \underline{b}\|$ ... <u>Abstand</u> von $\underline{a}, \underline{b} \in \mathcal{A}$

- $\underline{s}_1 + [\underline{a}_1]$, $\underline{s}_2 + [\underline{a}_2]$ ... 2 Geraden

  $\sphericalangle(\underline{s}_1 + [\underline{a}_1], \underline{s}_2 + [\underline{a}_2]) = \sphericalangle(\underline{a}_1, \pm \underline{a}_2) \in [0, \pi)$

  geeignet gewählt

- $\alpha = \tau_{\alpha(\underline{u})} \circ f_\alpha \circ \tau_{-\underline{u}}$ affine Abb.

  f_α Isometrie $\longrightarrow$ α <u>Kongruenzabb.</u> (abstandstreu, winkeltreu)

Quadriken in euklidischen Räumen

Bsp $\lambda(x_1, x_2) = 7x_1^2 - 12x_1x_2 - 2x_2^2 - 16x_1 + 28x_2 - 8 = 0$

$$= (x_1\ x_2)\begin{pmatrix} 7 & -6 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + 2\cdot(-8\ \ 14)\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - 8 = 0$$

$$G = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} \qquad g = (-8\ \ 14) \qquad c = -8$$

Typ A

$$= (1\ \ x_1\ \ x_2)\left(\begin{array}{c|cc} -8 & -8 & 14 \\ \hline -8 & 7 & -6 \\ 14 & -6 & -2 \end{array}\right)\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\boxed{\lambda(\underline{x}) = \underline{x}^T G \underline{x} + 2\underline{g}\cdot\underline{x} + c = 0}$$

Mittelpunktsquadrik $:\Leftrightarrow \exists\, \underline{m} : \lambda(\underline{x}+\underline{m}) = \underline{x}^T G \underline{x} + \lambda(\underline{m})$

$\Leftrightarrow \underline{m}^T \cdot G = -\underline{g}$ lösbar

Bew. $\lambda(\underline{x}+\underline{m}) = (\underline{x}+\underline{m})^T \cdot G \cdot (\underline{x}+\underline{m}) + 2\underline{g}\cdot(\underline{x}+\underline{m}) + c$

$$= \underline{x}^T \cdot G \cdot \underline{x} + 2\cdot\underbrace{(\underline{m}^T \cdot G + \underline{g})}_{=\underline{0}}\cdot\underline{x} + \lambda(\underline{m})$$

$$\begin{vmatrix} 7-t & -6 \\ -6 & -2-t \end{vmatrix} = t^2 - 5t - 50 = (t-10)(t+5)$$

$$t_1 = 10 \quad , \quad EV_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$t_2 = -5 \qquad EV_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$P := \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad P^{-1} G \cdot P = P^t \cdot G \cdot P = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{\lambda}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = \tilde{\tilde{\lambda}}(\tilde{\tilde{x}}_1, \tilde{\tilde{x}}_2) = (\tilde{\tilde{x}}_1 \; \tilde{\tilde{x}}_2)\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{\tilde{x}}_1 \\ \tilde{\tilde{x}}_2 \end{pmatrix} - 10$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{\tilde{x}}_1 \\ \tilde{\tilde{x}}_2 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix} \qquad = 10\tilde{\tilde{x}}_1^2 - 5\tilde{\tilde{x}}_2^2 - 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\tilde{\tilde{x}}_1^2 - \frac{1}{2}\tilde{\tilde{x}}_2^2 = 1}$$

$\rightarrow$ Hyperbel mit <u>Hauptachsen</u> $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\underline{m^T \cdot \underline{G} = -\underline{g}}$: $\quad m^T \cdot \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} = (8 \;\; -14)$

$$\Rightarrow \underline{m} = (+8 \;\; -14) \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = (2 \;\; 1)$$

$x_1 = \tilde{x}_1 + 2$

$x_2 = \tilde{x}_2 + 1$

$$\Rightarrow \tilde{\lambda}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = \lambda(\tilde{x}_1 + 2, \tilde{x}_2 + 1)$$

$$= (\tilde{x}_1 \;\; \tilde{x}_2) \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix} - 10 = 0$$

$$= (1 \;\; \tilde{x}_1 \;\; \tilde{x}_2) \left(\begin{array}{c|cc} -10 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 7 & -6 \\ 0 & -6 & -2 \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix}$$

<u>bis jetzt</u>: nur Verschiebung des Koordinatensystems

Bsp

$$\lambda(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2 + 6x_3 - 5 = 0$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - 5 = 0$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{c|ccc} -5 & 0 & 1 & 3 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$\underline{m}^T \cdot G = -g$ unlösbar $\rightarrow$ keine Mittelpunktsquadrik

$\rightarrow$ Typ B

$$\begin{vmatrix} t-1 & 0 & 0 \\ 0 & -t & 0 \\ 0 & 0 & -t \end{vmatrix} = t^2(t-1)$$

$t_1 = 1 \qquad k_1 = 1 \qquad EV = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$t_2 = 0 \qquad k_2 = 2 \qquad ER = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$

$\longrightarrow$ schon „perfekt"!

<u>Problem</u>: durch Verschieben des Ursprungs bleiben sowohl $2x_2$ als auch $6x_3$ erhalten, die Konstante -5 kann zu 0 verändert werden.

<u>Lösung</u>: geeignete Wahl von ONB vom $ER = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$.

Alle bis auf einen Vektor sollen orthogonal zu $g = (0\ 1\ 3)$ sein!

$$\longrightarrow \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

neue ONB $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; b_2 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \; b_3 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{c|ccc} -5 & 0 & 1 & 3 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{c|ccc} -5 & g\cdot b_1 & g b_2 & g\cdot b_3 \\ \hline g b_1 & 1 & 0 & 0 \\ g b_2 & 0 & 0 & 0 \\ g b_3 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|ccc} -5 & 0 & 0 & \sqrt{10} \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{10} & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$+ \text{ Verschieben} \longrightarrow \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & \sqrt{10} \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{10} & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \tilde{\lambda}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) = \tilde{x}_1^2 + 2\sqrt{10}\,\tilde{x}_3 = 0$$

<u>Satz</u> $\lambda(x_1,\dots,x_n)=0$ euklidische Quadrik (bez. kart. Koordinatensystem)

$\Rightarrow$ $\exists$ kartesisches Koordinatensystem, so dass Quadrik eine der drei folgenden euklidischen Normalformen hat

(A0) $\sum_{i=1}^{p} g_i x_i^2 - \sum_{j=p+1}^{r} g_j x_j^2 = 0$, $g_i, g_j > 0$, $p \geq r-p$, $1 \leq r \leq n$

(A1) $\sum_{i=1}^{p} g_i x_i^2 - \sum_{j=p+1}^{r} g_j x_j^2 = 1$, $g_i, g_j > 0$, $0 \leq r \leq n$

(B) $\sum_{i=1}^{p} g_i x_i^2 - \sum_{j=p+1}^{r} g_j x_j^2 = 2x_n$, $g_i, g_j > 0$, $p \geq r-p$, $0 \leq r \underline{<} n$