

# Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1. Lineare Rekursionen	1
1. Lineare Rekursionen und Systeme 1. Ordnung	1
2. Ansatzmethode	5
3. Inhomogene lineare Rekursionen	8
4. Erzeugende Funktionen	10
Kapitel 2. Polynomfamilien und lineare Operatoren	15
1. Potenzreihen von Operatoren	15
2. Normale Polynomfamilien	18
3. Stirlingzahlen	21
4. Bernoullipolynome	24
Kapitel 3. Erzeugende Funktionen und kombinatorische Konstruktionen	27
1. Potenzreihen und erzeugende Funktionen	27
2. Kombinatorische Konstruktionen	30
3. Nichtlineare Rekursionen	36
4. Lagrangesche Inversionsformel	38
5. Asymptotische Methoden	39
Kapitel 4. Kombinatorische Probleme auf Halbordnungen	43
1. Halbordnungen	43
2. Arithmetische Funktionen	46
3. Inklusions-Exklusions-Prinzip	48
4. Teilbarkeitsrelation	50
Kapitel 5. Pólyasche Abzähltheorie	55
1. Lemma von Burnside	55
2. Zyklenzeiger von Permutationsgruppen	56
3. Satz von Polya	58
4. Weitere kombinatorische Konstruktionen	60

Kapitel 6. Graphentheorie	63
1. Grundlegende Begriffe	63
2. Zusammenhang von Graphen	67
3. Eulersche und Hamiltonsche Linien	74
4. Planare Graphen	75
5. Färbungen und Matchings	77
6. Kreise und Schnitte	80
7. Spiele auf Graphen	81
8. Erzeugende Funktionen von Graphen	84
Kapitel 7. Algorithmen für Netzwerke	87
1. Minimales Gerüst: Kruskal-Algorithmus	87
2. Kürzester Weg: Dijkstra-Algorithmus	88
3. Kürzester Weg: Moore-Algorithmus	90
4. Kürzester Weg: Floyd-Warshall-Algorithmus	91
5. Maximaler Fluß: Ford-Fulkerson-Algorithmus	91
Literaturverzeichnis	99
Index	101
Übungsbeispiele	103

## Lineare Rekursionen

### 1. Lineare Rekursionen und Systeme 1. Ordnung

#### 1.1. Homogene lineare Rekursionen mit konstanten Koeffizienten.

DEFINITION 1.1. Eine Folge  $(a_n)_{n \geq 0}$  von Elementen  $a_n \in \mathbb{C}$  ist Lösung einer **homogenen linearen Rekursion mit konstanten Koeffizienten der Ordnung**  $k \geq 1$ , wenn es Zahlen  $c_1, c_2, \dots, c_k \in \mathbb{C}$  gibt, sodaß für alle  $n \geq k$

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k} \quad (1)$$

gilt.

Eine Gleichung der Form (1) ist eine **Rekursionsgleichung**. Das **charakteristische Polynom**  $\chi(t)$  so einer Rekursionsgleichung ist durch

$$\chi(t) = t^k - c_1 t^{k-1} - c_2 t^{k-2} - \dots - c_k \quad (2)$$

definiert.

Eine Rekursion des Typs (1) heißt deshalb *linear*, weil die Menge aller Lösungen  $(a_n)_{n \geq 0}$  einen linearen Teilraum im Vektorraum aller Folgen bilden.

Offensichtlich ist die Folge  $(a_n)_{n \geq 0}$ , die Lösung der Rekursionsgleichung (1) ist, eindeutig durch Angabe der **Anfangswerte**  $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$  und definiert. Daraus ergibt sich auch, daß die Dimension des **Lösungsraums** genau  $k$  ist.

BEISPIEL 1.2. Die **Fibonaccizahlen**  $F_n$ ,  $n \geq 0$ , sind durch  $F_0 = 0$ ,  $F_1 = 1$  und durch die Rekursion

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

definiert. Das charakteristische Polynom lautet  $\chi(t) = t^2 - t - 1$ .

#### 1.2. Vektorwertige Rekursionen 1. Ordnung.

Im folgenden bezeichnet  $\mathbf{a}_n = (a_{n,1}, \dots, a_{n,d}) \in \mathbb{C}^d$ ,  $n \geq 0$ , immer eine  $d$ -dimensionale vektorwertige Folge.

DEFINITION 1.3. Sei  $d \geq 1$ . Eine vektorwertige Folge  $(\mathbf{a}_n)_{n \geq 0}$  mit Elementen  $\mathbf{a}_n \in \mathbb{C}^d$  erfüllt eine **Rekursion 1. Ordnung**, wenn es eine Matrix  $A \in \mathbb{C}^{d \times d}$  gibt, sodaß für alle  $n \geq 0$

$$\mathbf{a}_{n+1} = A \mathbf{a}_n \quad (3)$$

gilt.

Offensichtlich gilt für solche Folgen

$$\mathbf{a}_n = A^n \mathbf{a}_0,$$

d.h. zur Lösung vektorwertiger Rekursionen 1. Ordnung müssen nur die Potenzen einer Matrix  $A$  bestimmt werden. Dies wird im folgenden Abschnitt mit Hilfe der Jordanschen Normalform durchgeführt.

Interessanterweise werden damit auch homogene lineare Rekursionen mit konstanten Koeffizienten gelöst.

**SATZ 1.4.** Sei  $(a_n)_{n \geq 0}$  Lösung einer homogenen linearen Rekursion mit konstanten Koeffizienten der Ordnung  $k$  der Form

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}.$$

Dann erfüllen die Vektoren

$$\mathbf{a}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \\ \vdots \\ a_{n+k-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^k$$

eine Rekursion 1. Ordnung der Form

$$\mathbf{a}_{n+1} = A \mathbf{a}_n,$$

mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & & 0 & 1 \\ c_k & c_{k-1} & \cdots & \cdots & c_2 & c_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{k \times k}.$$

Umgekehrt lassen sich auch  $d$ -dimensionale vektorwertige Rekursionen 1. Ordnung auf homogene lineare Rekursionen  $d$ -ter Ordnung zurückführen.

**SATZ 1.5.** Sei  $\mathbf{a}_n = (a_{n,1}, \dots, a_{n,d})^T$ ,  $n \geq 0$ , Lösung einer Rekursion 1. Ordnung der Form  $\mathbf{a}_{n+1} = A \mathbf{a}_n$  mit einer Matrix  $A \in \mathbb{C}^{d \times d}$ . Dann erfüllen alle Komponentenfolgen  $(a_{n,r})_{n \geq 0}$ ,  $1 \leq r \leq d$ , eine homogene lineare Rekursion der Ordnung  $d$  mit charakteristischem Polynom

$$\chi(t) = \det(tI - A),$$

wobei  $I = \text{diag}(1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{C}^{d \times d}$  die Einheitsmatrix bezeichnet.

Das Polynom  $\det(tI - A)$  ist gerade das charakteristische Polynom der Matrix  $A$  (siehe auch den nächsten Abschnitt).

### 1.3. Jordansche Normalform einer Matrix.

**DEFINITION 1.6.** Eine Zahl  $q \in \mathbb{C}$  ist **Eigenwert** einer Matrix  $A \in \mathbb{C}^{d \times d}$ , wenn es einen Vektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^d$ ,  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ , mit

$$A\mathbf{x} = q\mathbf{x}$$

gibt.  $\mathbf{x}$  heißt dann auch **Eigenvektor** zum Eigenwert  $q$ .

**DEFINITION 1.7.** Das **charakteristische Polynom**  $\chi_A(t)$  einer Matrix  $A \in \mathbb{C}^{d \times d}$  ist durch

$$\chi_A(t) = \det(tI - A)$$

gegeben, wobei  $I = \text{diag}(1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{C}^{d \times d}$  die Einheitsmatrix bezeichnet.

SATZ 1.8. Die Eigenwerte einer Matrix  $A \in \mathbb{C}^{d \times d}$  sind genau die Nullstellen des charakteristischen Polynoms  $\chi_A(t)$ .

DEFINITION 1.9. Eine  $m \times m$ -Matrix

$$J_m(q) := \begin{pmatrix} q & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & q & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & q & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & q \end{pmatrix}$$

heißt **Jordan-Kästchen** der Dimension  $m$  zum Eigenwert  $q \in \mathbb{C}$ .

Eine (erweiterte) Diagonalmatrix

$$\text{diag}(J_{m_1}(q_1), \dots, J_{m_k}(q_k))$$

aus Jordan-Kästchen heißt **Jordansche Normalform**.

Man beachte, daß das charakteristische Polynom eines Jordan-Kästchens durch

$$\chi_{J_m(q)}(t) = (t - q)^m$$

gegeben ist, d.h.  $q$  ist einziger Eigenwert von  $J_m(q)$ .

Für eine Matrix  $C = \text{diag}(J_{m_1}(q_1), \dots, J_{m_k}(q_k))$  in Jordanscher Normalform gilt daher

$$\chi_C(t) = \chi_{J_{m_1}(q_1)}(t) \cdots \chi_{J_{m_k}(q_k)}(t) = (t - q_1)^{m_1} \cdots (t - q_k)^{m_k},$$

d.h. die Eigenwerte der Jordan-Kästchen einer Jordanschen Normalform sind genau die Eigenwerte der Matrix.

DEFINITION 1.10. Zwei Matrizen  $A, B \in \mathbb{C}^{d \times d}$  heißen **ähnlich**, wenn es eine reguläre Matrix  $P \in \mathbb{C}^{d \times d}$  mit

$$A = P^{-1}BP$$

gibt.

SATZ 1.11. Jede Matrix  $A \in \mathbb{C}^{d \times d}$  ist zu einer Jordanschen Normalform ähnlich. Die Reihenfolge der Jordankästchen ist bis auf die Reihenfolge eindeutig.

Mit Hilfe der Jordanschen Normalform können ähnliche Matrizen auch klassifiziert werden.

SATZ 1.12. Zwei Matrizen  $A, B \in \mathbb{C}^{d \times d}$  sind genau dann ähnlich, wenn sie zur selben Jordanschen Normalform ähnlich sind.

Zur Verdeutlichung, wie man die Jordansche Normalform einer Matrix berechnen kann, sei der folgende Satz angegeben.

SATZ 1.13. Sei  $A \in \mathbb{C}^{d \times d}$  mit charakteristischem Polynom  $\chi_A(t) = (t - q)^d$ . Weiters seien die natürlichen Zahlen  $p > 0$ ,  $m_1 > m_2 > \cdots > m_p > 0$  und  $k_1, k_2, \dots, k_p > 0$  durch die Beziehungen

$$\dim(\text{im}((qI - A)^j) \cap \text{kern}(qI - A)) = \begin{cases} k_1 + \cdots + k_p & \text{für } j \in \{0, \dots, m_p - 1\}, \\ k_1 + \cdots + k_{p-1} & \text{für } j \in \{m_p, \dots, m_{p-1} - 1\}, \\ \vdots & \\ k_1 & \text{für } j \in \{m_2, \dots, m_1 - 1\}, \\ 0 & \text{für } j \in \{m_1, m_1 + 1, \dots\} \end{cases}$$

festgelegt, wobei  $\text{im}(B)$  und  $\text{kern}(B)$  zu einer Matrix  $B \in \mathbb{C}^{d \times d}$  die Unterräume

$$\text{im}(B) = \{B\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{C}^d\} \quad \text{und} \quad \text{kern}(B) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^d \mid B\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$

bezeichnen.

Dann ist  $A$  zur erweiterte Diagonalform

$$\text{diag}(J_{m_1}(q), \dots, J_{m_1}(q), J_{m_2}(q), \dots, J_{m_2}(q), \dots, J_{m_p}(q), \dots, J_{m_p}(q))$$

ähnlich, wobei das Jordan-Kästchen  $J_{m_1}(q)$   $k_1$ -mal vorkommt, das Jordan-Kästchen  $J_{m_2}(q)$   $k_2$ -mal etc.

Man beachte, daß

$$p = \dim(\text{kern}(qI - A))$$

die Dimension des **Eigenraums** des Eigenwerts  $q$  ist. Ist insbesondere  $p = d$ , so haben alle Jordan-Kästchen die Dimension 1,  $A$  ist also **diagonalähnlich**. I.a. ist das aber nicht der Fall.

#### 1.4. Potenzen von Matrizen.

Sind zwei Matrizen  $A, B \in \mathbb{C}^{d \times d}$  ähnlich, d.h. es gibt eine reguläre Matrix  $P \in \mathbb{C}^{d \times d}$  mit  $A = P^{-1}BP$ , dann gilt für alle Potenzen

$$A^n = P^{-1}B^nP.$$

Dennoch reicht, es alle Potenzen einer Jordanschen Normalform zu bestimmen. Wegen

$$\text{diag}(J_{m_1}(q_1), \dots, J_{m_k}(q_k))^n = \text{diag}(J_{m_1}(q_1)^n, \dots, J_{m_k}(q_k)^n)$$

genügt es, nur die Potenzen eines Jordan-Kästchens zu kennen.

**SATZ 1.14.** Die Potenzen eines Jordan-Kästchens  $J_m(q)$  sind durch

$$J_m(q)^n = \begin{pmatrix} q^n & \binom{n}{1}q^{n-1} & \binom{n}{2}q^{n-2} & \binom{n}{3}q^{n-3} & \dots & \binom{n}{m-1}q^{n-m+1} \\ 0 & q^n & \binom{n}{1}q^{n-1} & \binom{n}{2}q^{n-2} & \dots & \binom{n}{m-2}q^{n-m+2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & q^n & \binom{n}{1}q^{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & q^n \end{pmatrix}$$

gegeben, wobei  $\binom{n}{k} = n(n-1)\dots(n-k+1)/k!$  den Binomialkoeffizienten bezeichnet.

Daraus ergibt sich folgende prinzipielle Gestalt der Potenzen einer Matrix  $A \in \mathbb{C}^{d \times d}$ .

**SATZ 1.15.** Seien  $q_1, \dots, q_r \in \mathbb{C}$  die verschiedenen Eigenwerte einer Matrix  $A \in \mathbb{C}^{d \times d}$ . Weiters bezeichne  $\mu_j$ ,  $1 \leq j \leq r$ , die maximale Dimension eines Jordan-Kästchens in der Jordanschen Normalform von  $A$  zum Eigenwert  $q_j$ . Dann haben die Potenzen von  $A$  die Form

$$A^n = \left( \sum_{j=1}^r P_{i_1 i_2, \mu_j - 1}(n) q_j^n \right)_{1 \leq i_1, i_2 \leq d},$$

wobei  $P_{i_1 i_2, \mu_j - 1}(x) \in \mathbb{C}[x]$ ,  $1 \leq i_1, i_2 \leq d$ ,  $1 \leq j \leq r$ , Polynome vom Grad  $\leq \mu_j - 1$  bezeichnen.

Damit kann auch die Gestalt der Lösung einer vektorwertigen Rekursion 1. Ordnung angegeben werden.

SATZ 1.16. Sei  $(\mathbf{a}_n)_{n \geq 0}$  Lösung Rekursion 1. Ordnung der Form  $\mathbf{a}_{n+1} = A\mathbf{a}_n$  mit einer Matrix  $A \in \mathbb{C}^{d \times d}$ . Weiters seien  $q_1, \dots, q_r \in \mathbb{C}$  die verschiedenen Eigenwerte von  $A$ , und es bezeichne  $\mu_j, 1 \leq j \leq r$ , die maximale Dimension eines Jordan-Kästchens in der Jordanschen Normalform von  $A$  zum Eigenwert  $q_j$ . Dann hat  $\mathbf{a}_n$  die Form

$$\mathbf{a}_n = \left( \sum_{j=1}^r P_{i, \mu_j - 1}(n) q_j^n \right)_{1 \leq i \leq d},$$

wobei  $P_{i, \mu_j - 1}(x) \in \mathbb{C}[x]$ ,  $1 \leq i \leq d$ ,  $1 \leq j \leq r$ , Polynome vom Grad  $\leq \mu_j - 1$  bezeichnen.

## 2. Ansatzmethode

### 2.1. Lineare Rekursionen über $\mathbb{C}$ .

Die bisherigen Resultate lassen sich sofort für lineare Rekursionen anwenden, wobei hier auch die Umkehrung gilt.

SATZ 1.17. Sei  $(a_n)_{n \geq 0}$  (mit  $a_n \in \mathbb{C}$ ) Lösung einer homogenen linearen Rekursion mit konstanten Koeffizienten der Ordnung  $k \geq 1$  mit charakteristischem Polynom  $\chi(t)$ . Dann läßt sich  $a_n$  in der Form

$$a_n = \sum_{j=1}^r P_{j, \lambda_j - 1}(n) q_j^n \quad (4)$$

darstellen, wobei  $q_1, \dots, q_r \in \mathbb{C}$  die verschiedenen Nullstellen mit den Vielfachheiten  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  von  $\chi(t)$  sind, d.h.

$$\chi(t) = \prod_{j=1}^r (t - q_j)^{\lambda_j}, \quad (5)$$

und  $P_{j, \lambda_j - 1}(x) \in \mathbb{C}[x]$ ,  $1 \leq j \leq r$ , Polynome vom Grad  $\leq \lambda_j - 1$  bezeichnen.

Ist umgekehrt  $(a_n)_{n \geq 0}$  eine Folge der Form (4) mit verschiedenen  $q_j \in \mathbb{C}$  und Polynomen  $P_{j, \lambda_j - 1}(x) \in \mathbb{C}[x]$  vom Grad  $\lambda_j - 1$ ,  $1 \leq j \leq r$  so erfüllt  $(a_n)_{n \geq 0}$  eine homogene lineare Rekursion mit konstanten Koeffizienten der Ordnung

$$k = \lambda_1 + \dots + \lambda_r$$

mit charakteristischem Polynom der Form (5).

Kurz gesagt, eine Folge  $a_n$  erfüllt genau dann eine lineare Rekursion mit konstanten Koeffizienten, wenn sie die Form (4) hat.

BEISPIEL 1.18. Die Fibonaccizahlen  $F_n$  erfüllen eine lineare Rekursion mit dem charakteristischen Polynom  $\chi(t) = t^2 - t - 1$ . Sie lassen sich daher in der Form

$$F_n = A \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + B \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

darstellen. Durch Einsetzen der Anfangswerte  $F_0 = 0$  und  $F_1 = 1$  erhält man ein lineares Gleichungssystem mit der Lösung  $A = 1/\sqrt{5}$ ,  $B = -1/\sqrt{5}$ .

Satz 1.17 ist Grundlage für die **Ansatzmethode** zur Lösung von homogenen linearen Rekursionen mit konstanten Koeffizienten.

1. Bestimmen der Nullstellen  $q_j$  (mit Vielfachheiten  $\lambda_j$ ) des charakteristischen Polynoms  $\chi(t)$ .
2. Ansetzen der Lösung für  $a_n$  mit der Form (4), wobei die  $\lambda_1 + \dots + \lambda_r = k$  Koeffizienten der Polynome  $P_{j,\lambda_j-1}(x)$  als *noch unbestimmt* angesetzt werden.
3. Durch Einsetzen der Anfangswerte  $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$  erhält man ein lineares Gleichungssystem für die (insgesamt  $k$ ) unbestimmten Koeffizienten der Polynome  $P_{j,\lambda_j-1}(x)$ .

Sind die Anfangswerte  $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$  nicht vorgegeben, so bildet die Form (4) die **allgemeine Lösung** einer homogenen linearen Rekursion mit charakteristischem Polynom (5).

Dadurch, daß Satz 1.17 tatsächlich eine Charakterisierung aller Lösungen homogener linearer Rekursionen mit konstanten Koeffizienten angibt, kann daraus folgende bemerkenswerte Folgerung abgeleitet werden.

SATZ 1.19.

- (i) Sei  $(a_n)_{n \geq 0}$  Lösung einer homogenen linearen Rekursion mit konstanten Koeffizienten mit charakteristischem Polynom  $\chi(t)$ . Ist  $\mu(t) \in \mathbb{C}(t)$  ein normiertes Polynom, das durch  $\chi(t)$  geteilt wird, dann ist  $(a_n)_{n \geq 0}$  auch Lösung der homogenen linearen Rekursion mit konstanten Koeffizienten, die  $\mu(t)$  als charakteristisches Polynom hat.
- (ii) Seien  $(a_n)_{n \geq 0}$  und  $(b_n)_{n \geq 0}$  Lösungen homogener linearer Rekursionen mit konstanten Koeffizienten mit charakteristischen Polynomen  $\chi_1(t)$  und  $\chi_2(t)$ . Dann ist die Folge  $c_n = a_n + b_n$ ,  $n \geq 0$ , Lösung einer homogenen linearen Rekursion mit konstanten Koeffizienten mit charakteristischem Polynom  $\chi(t) = \text{kgV}(\chi_1(t), \chi_2(t))$ .

Offensichtlich sind auch Produkte von Lösungen linearer Rekursionen oder arithmetische Teilfolgen (etc.) wieder Lösungen entsprechender linearer Rekursionen.

## 2.2. Lineare Rekursionen über $\mathbb{R}$ .

Natürlich können reelle Folgen  $(a_n)_{n \geq 0}$ , die eine lineare Rekursion mit reellen Koeffizienten erfüllen, wie komplexe Folgen betrachtet werden. Der Nachteil ist, daß bei der Lösung (echt) komplexe Wurzeln  $q_j$  des charakteristischen Polynoms auftreten können. Dieser *Nachteil* kann folgendermaßen *umgangen* werden.

SATZ 1.20. Sei  $(a_n)_{n \geq 0}$  (mit  $a_n \in \mathbb{R}$ ) Lösung einer homogenen linearen Rekursion mit konstanten Koeffizienten der Ordnung  $k \geq 1$  mit charakteristischem Polynom  $\chi(t) \in \mathbb{R}[x]$ . Dann läßt sich  $a_n$  in der Form

$$a_n = \sum_{j=1}^r P_{j,\lambda_j-1}(n) q_j^n + \sum_{j=r+1}^s \left( Q_{j,\lambda_j-1}(n) \cos(n \arg(q_j)) |q_j|^n + R_{j,\lambda_j-1}(n) \sin(n \arg(q_j)) |q_j|^n \right) \quad (6)$$

darstellen, wobei  $q_1, \dots, q_r \in \mathbb{R}$  die verschiedenen reellen Nullstellen mit den Vielfachheiten  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  von  $\chi(t)$  und  $q_{r+1}, \bar{q}_{r+1}, \dots, q_{r+s}, \bar{q}_{r+s} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  die verschiedenen nichtreellen Nullstellen von  $\chi(t)$  mit Vielfachheiten  $\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_{r+s}$  sind, d.h.

$$\chi(t) = \left( \prod_{j=1}^r (t - q_j)^{\lambda_j} \right) \cdot \left( \prod_{j=r+1}^{r+s} (t^2 - 2\Re(q_j)t + |q_j|^2) \right) \quad (7)$$



und  $P_{j,\lambda_j-1}(x) \in \mathbb{R}[x]$ ,  $1 \leq j \leq r$ , resp.  $Q_{j,\lambda_j-1}(x), R_{j,\lambda_j-1}(x) \in \mathbb{R}[x]$ ,  $r+1 \leq j \leq r+s$  Polynome vom Grad  $\leq \lambda_j - 1$  bezeichnen.

Ist umgekehrt  $(a_n)_{n \geq 0}$  eine reelle Folge der Form (6) mit verschiedenen  $q_j \in \mathbb{R}$ ,  $1 \leq j \leq r$  resp. nichtreellen  $q_j, \bar{q}_j \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ,  $r+1 \leq j \leq r+s$  und Polynomen  $P_{j,\lambda_j-1}(x) \in \mathbb{R}[x]$ ,  $1 \leq j \leq r$  resp.  $Q_{j,\lambda_j-1}(x), R_{j,\lambda_j-1}(x) \in \mathbb{R}[x]$ ,  $r+1 \leq j \leq r+s$  vom Grad  $\lambda_j - 1$ , so erfüllt  $(a_n)_{n \geq 0}$  eine homogene lineare Rekursion mit konstanten Koeffizienten der Ordnung

$$k = \lambda_1 + \cdots + \lambda_r + 2(\lambda_{r+1} + \cdots + \lambda_{r+s})$$

mit charakteristischem Polynom der Form (7).

Offensichtlich führt hier eine analoge **Ansatzmethode** wie im vorigen Abschnitt zum Ziel.

Man beachte, daß natürlich auch im reellen Fall Satz 1.19 uneingeschränkt gilt.

### 2.3. Der Differenzoperator.

DEFINITION 1.21. Sei  $\mathcal{F}$  die Menge aller Folgen  $(a_n)_{n \geq 0}$  mit  $a_n \in \mathbb{C}$  und  $q \in \mathbb{C}$ . Der **Differenzoperator**  $\Delta_q : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  ist durch

$$\Delta_q(a_n)_{n \geq 0} := (a_{n+1} - qa_n)_{n \geq 0} \quad (8)$$

definiert.

Anstelle von  $\Delta_1$  wird auch  $\Delta$  (gewöhnlicher Differenzoperator) geschrieben.

$\Delta_q$  wird oft auch in der Form

$$\Delta_q = E - qI$$

dargestellt, wobei  $E : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  den Verschiebungsoperator

$$E(a_n)_{n \geq 0} := (a_{n+1})_{n \geq 0}$$

und  $I : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  den identischen Operator bezeichnet.

Offensichtlich kann nun eine (homogene) lineare Rekursion (mit konstanten Koeffizienten)

$$a_{n+k} - c_1 a_{n+k-1} - c_2 a_{n+k-2} - \cdots - c_k a_n = 0$$

auch in der Form

$$(E^k - c_1 E^{k-1} - c_2 E^{k-2} - \cdots - c_k I)(a_n) = 0$$

oder in der Form

$$\chi(E)(a_n) = 0$$

dargestellt werden, wobei  $\chi(t)$  das charakteristische Polynom der zugrundeliegenden linearen Rekursion bezeichnet. (Dabei bedeutet  $E^k$  das  $k$ -fache Hintereinanderausführen  $E \circ E \circ \cdots \circ E$ .)

Die Faktorisierung des charakteristischen Polynoms

$$\chi(t) = \prod_{j=1}^r (t - q_j)^{\lambda_j}$$

impliziert nun eine entsprechende Faktorisierung des Operators

$$\chi(E) = \prod_{j=1}^r (E - q_j I)^{\lambda_j} = \prod_{j=1}^r \Delta_{q_j}^{\lambda_j} \quad (9)$$

Alle bisherigen Resultate über homogene lineare Rekursionen können nun auch leicht aus den folgenden Eigenschaften von  $\Delta_q$  hergeleitet werden.

SATZ 1.22.

1. Die Lösungen von  $\Delta^m(a_n) = 0$  sind genau die Polynome  $a_n = P_{m-1}(n)$  von Grad  $\leq m-1$ .
2.  $\Delta_q^m(a_n)_{n \geq 0} = (q^{n+m} \Delta(q^{-n} a_n))_{n \geq 0}$ .
3. Die Lösungen von  $\Delta_q^m(a_n) = 0$  sind genau die Folgen der Form  $a_n = P_{m-1}(n)q^n$  mit einem Polynom  $P_{m-1}(x) \in \mathbb{C}[x]$  von Grad  $\leq m-1$ .
4. Ist  $q \in \mathbb{C}$  Nullstelle mit Vielfachheit  $m \geq 1$  eines Polynoms  $\chi(t) \in \mathbb{C}[t]$ , so folgt aus  $\Delta_q^m(a_n)_{n \geq 0} = 0$  auch  $\chi(E)(a_n)_{n \geq 0} = 0$ .
5.  $\chi(E)((a_n^{(1)})_{n \geq 0} + (a_n^{(2)})_{n \geq 0}) = \chi(E)(a_n^{(1)})_{n \geq 0} + \chi(E)(a_n^{(2)})_{n \geq 0}$ .

### 3. Inhomogene lineare Rekursionen

5

#### 3.1. Partikuläre Lösung.

DEFINITION 1.23. Eine Folge  $(a_n)_{n \geq 0}$  von Elementen  $a_n \in \mathbb{C}$  ist Lösung einer **inhomogenen linearen Rekursion mit konstanten Koeffizienten der Ordnung  $k \geq 1$** , wenn es Zahlen  $c_1, c_2, \dots, c_k \in \mathbb{C}$  und eine Folge  $(b_n)_{n \geq 0}$  mit  $b_n \in \mathbb{C}$  gibt, sodaß für alle  $n \geq k$

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k} + b_n \quad (10)$$

gilt.

Ein wesentlicher Punkt bei inhomogenen linearen Rekursion ist, daß man nur eine Lösung suchen muß.

SATZ 1.24. Ist  $(a_n^{(p)})_{n \geq 0}$  eine Lösung einer inhomogenen linearen Rekursion mit konstanten Koeffizienten der Form (10) und  $(a_n)_{n \geq 0}$  eine beliebige andere Lösung von (10), dann ist die Differenz  $a_n^{(h)} := a_n - a_n^{(p)}$ ,  $n \geq 0$ , Lösung der entsprechenden homogenen linearen Rekursion

$$a_n^{(h)} = c_1 a_{n-1}^{(h)} + c_2 a_{n-2}^{(h)} + \dots + c_k a_{n-k}^{(h)}.$$

Eine spezielle Lösung  $(a_n^{(p)})_{n \geq 0}$  einer inhomogenen linearen Rekursion nennt man auch **partikuläre Lösung**, die Lösung  $(a_n^{(h)})_{n \geq 0}$  der entsprechenden homogenen linearen Rekursion **homogene Lösung**.

BEISPIEL 1.25. Die Rekursion  $a_n = 2a_{n-1} - 1$  hat z.B. als partikuläre Lösung die konstante Folge  $a_n^{(p)} = 1$ . Die homogene Lösung ist offensichtlich  $a_n^{(h)} = A2^n$ . Die allgemeine Lösung hat daher die Form  $a_n = A2^n + 1$ .

Es ist auch möglich, eine partikuläre Lösung *schrittweise* zu ermitteln.

SATZ 1.26. Sei  $a_n^{(1)}$  Lösung der inhomogenen linearen Rekursion

$$a_n^{(1)} = c_1 a_{n-1}^{(1)} + c_2 a_{n-2}^{(1)} + \dots + c_k a_{n-k}^{(1)} + b_n^{(1)}$$

und  $a_n^{(2)}$  Lösung der inhomogenen linearen Rekursion

$$a_n^{(2)} = c_1 a_{n-1}^{(2)} + c_2 a_{n-2}^{(2)} + \dots + c_k a_{n-k}^{(2)} + b_n^{(2)}$$

mit derselben homogenen Rekursion, dann erfüllt die Linearkombination

$$a_n = x a_n^{(1)} + y a_n^{(2)}$$

die inhomogene lineare Rekursion

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + (x b_n^{(1)} + y b_n^{(2)}).$$

### 3.2. Spezielle inhomogene lineare Rekursionen.

Ein wichtiger Spezialfall inhomogener linearer Rekursionen

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + b_n$$

ist jener, wo  $b_n$  eine homogene lineare Rekursion erfüllt, also von der Form (4) ist. Hier gilt die folgende Eigenschaft.

**SATZ 1.27.** Sei  $(a_n)_{n \geq 0}$  Lösung der inhomogener linearer Rekursionen mit konstanten Koeffizienten der Ordnung  $k$

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + b_n,$$

wobei  $(b_n)_{n \geq 0}$  Lösung einer homogenen linearen Rekursion mit konstanten Koeffizienten mit charakteristischem Polynom  $\mu(t)$  ist. Dann erfüllt  $(a_n)_{n \geq 0}$  auch eine homogene lineare Rekursion mit konstanten Koeffizienten mit charakteristischem Polynom

$$\chi(t) \cdot \mu(t),$$

wobei  $\chi(t) = t^k - c_1 t^{k-1} - \cdots - c_k$  das charakteristische Polynom den entsprechenden homogenen Rekursion von  $(a_n)_{n \geq 0}$  ist.

Man kann daher in diesem Fall auf verschiedene Arten vorgehen. Kennt man beispielsweise die Anfangswerte  $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$ , so kann man  $a_n$  gemäß dem charakteristischen Polynom  $\chi(t) \cdot \mu(t)$  ansetzen und erhält durch Einsetzen der Anfangswerte  $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}, a_k, \dots, a_{k+l-1}$  (wobei  $l$  den Grad von  $\mu(t)$  bezeichnet) die Lösung von  $a_n$ . Kennt man allerdings die Anfangswerte nicht, und ist man an der allgemeinen Lösung der inhomogenen linearen Rekursion interessiert, so empfiehlt sich ein strukturierteres Vorgehen, indem man die Sätze 1.24 und 1.26 kombiniert, d.h. man sucht zunächst die allgemeine Lösung der entsprechenden homogenen linearen Rekursion und daraufhin (eventuell schrittweise) eine partikuläre.

**SATZ 1.28.** Gegeben sei eine inhomogene lineare Rekursion mit konstanten Koeffizienten der Form

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + b_n,$$

wobei  $b_n$  die Form

$$b_n = P_\mu(n) q^n$$

mit  $q \in \mathbb{C}$  und  $P_\mu(x) \in \mathbb{C}[x]$  vom Grad  $\leq \mu$  bzw. die Form

$$b_n = R_\mu(n) \cos(\varphi n) q^n + S_\mu(n) \sin(\varphi n) q^n$$

mit  $q, \varphi \in \mathbb{R}$  und  $R_\mu(x), S_\mu(x) \in \mathbb{R}[x]$  vom Grad  $\leq \mu$  hat. Weiters sei  $\lambda$  die Vielfachheit von  $q$  bzw.  $q e^{i\varphi}$  als Nullstelle des charakteristischen Polynoms

$$\chi(t) = t^k - c_1 t^{k-1} - \cdots - c_k,$$

d.h.  $\lambda = 0$ , falls  $q$  bzw.  $q e^{i\varphi}$  keine Nullstelle von  $\chi(t)$  ist, dann gibt es eine partikuläre Lösung  $a_n^{(p)}$  der Form

$$a_n^{(p)} = n^\lambda \tilde{P}_\mu(n) q^n$$

bzw. der Form

$$a_n^{(p)} = n^\lambda \left( \tilde{R}_\mu(n) \cos(\varphi n) q^n + \tilde{S}_\mu(n) \sin(\varphi n) q^n \right)$$

mit  $\tilde{P}_\mu(x) \in \mathbb{C}[x]$  vom Grad  $\leq \mu$  bzw. mit  $\tilde{R}_\mu(x), \tilde{S}_\mu(x) \in \mathbb{R}[x]$  vom Grad  $\leq \mu$ .

Die Koeffizienten des Polynoms  $\tilde{P}_\mu(x)$  bzw. der Polynome  $\tilde{R}_\mu(x), \tilde{S}_\mu(x)$  können durch Einsetzen des entsprechenden Ansatzes und darauffolgenden Koeffizientenvergleich bestimmt werden.

BEISPIEL 1.29. Die inhomogene lineare Rekursion  $a_n = a_{n-1} + n$  mit  $a_0 = 0$  hat als allgemeine homogene Lösung  $a_n^{(h)} = A \cdot 1^n = A$ , da das charakteristische Polynom  $\chi(t) = t - 1$  als einzige Nullstelle  $q_1 = 1$  mit Vielfachheit  $\lambda_1 = 1$  hat.

Die Inhomogenität  $b_n$  hat die Form  $b_n = n = P_1(n) \cdot 1^n$ . Es ist also  $\mu = \lambda = 1$ . Es gibt daher eine partikuläre Lösung der Form  $a_n^{(p)} = n(Bn + C) \cdot 1^n = Bn^2 + Cn$ . Durch Einsetzen dieses Ansatzes in die Rekursion  $a_n^{(p)} = a_{n-1}^{(p)} + n$  erhält man nach Koeffizientenvergleich ein lineares Gleichungssystem für  $B, C$  mit der Lösung  $B = C = 1/2$ .

Die allgemeine Lösung der Rekursion  $a_n = a_{n-1} + n$  hat daher die Gestalt  $a_n = A + n(n+1)/2$ . Wegen  $a_0 = 0$  ergibt sich nun  $A = 0$  und man erhält schließlich die Lösung  $a_n = n(n+1)/2$ .

## 4. Erzeugende Funktionen

### 4.1. Rationale Funktionen.

Es soll zunächst das Problem behandelt werden, wie man die Koeffizienten  $a_n$  der Potenzreihenentwicklung einer rationalen Funktion

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$$

bestimmen kann. (Dabei bezeichnen  $f(x), g(x) \in \mathbb{C}[x]$  Polynome mit  $g(0) \neq 0$ .)

Erste Grundlage dafür ist die **Partialbruchzerlegung**.

SATZ 1.30. *Es seien  $f(x), g(x) \in \mathbb{C}[x]$  zwei Polynome mit  $\text{grad}(f(x)) < \text{grad}(g(x))$ , und  $g(x)$  sei normiert und habe die Zerlegung*

$$g(x) = \prod_{j=1}^r (x - \alpha_j)^{\lambda_j},$$

d.h.  $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{C}$  sind die verschiedenen Nullstellen von  $g(x)$  und  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  deren Vielfachheiten. Dann gibt es eindeutig bestimmte Zahlen  $A_{jk} \in \mathbb{C}$ ,  $1 \leq k \leq \lambda_j$ ,  $1 \leq j \leq r$ , mit

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^{\lambda_j} \frac{A_{jk}}{(x - \alpha_j)^k}.$$

Die Bedingung  $\text{grad}(f(x)) < \text{grad}(g(x))$  ist natürlich keine wesentliche Einschränkung. Im Fall einer allgemeinen rationalen Funktion mit Zähler  $f(x)$  und Nenner  $g(x) \neq 0$  stellt man mit Hilfe des Divisionsalgorithmus  $f(x)$  in der Form

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x),$$

wobei  $r(x)$  entweder das Nullpolynom ist oder  $\text{grad}(r(x)) < \text{grad}(g(x))$  ist. Daher gilt

$$\frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)},$$

und man kann die Partialbruchzerlegung auf  $r(x)/g(x)$  anwenden.

Die Zerlegung von Satz 1.30 muß für unsere Zwecke noch ein wenig umgeschrieben werden:

KOROLLAR 1.31. *Es seien  $f(x), g(x) \in \mathbb{C}[x]$  zwei Polynome wie in Satz 1.30 mit der zusätzlichen Voraussetzung  $g(0) \neq 0$ . Weiters bezeichnen  $q_j = 1/\alpha_j$ ,  $1 \leq j \leq r$ , die Reziprokwerte der Nullstellen von  $g(x)$ . Dann gibt es eindeutig bestimmte Zahlen  $B_{jk} \in \mathbb{C}$ ,  $1 \leq k \leq \lambda_j$ ,  $1 \leq j \leq r$ , mit*

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^{\lambda_j} \frac{B_{jk}}{(1 - q_j x)^k}.$$

Um schließlich die Koeffizienten  $a_n$  der Potenzreihenentwicklung von  $f(x)/g(x)$  ablesen zu können, benützt man noch die **Binomische Reihe**.

SATZ 1.32. *Sei  $\alpha \in \mathbb{C}$ . Dann gilt für  $x \in \mathbb{C}$  mit  $|x| < 1$*

$$(1 + x)^\alpha = \sum_{n \geq 0} \binom{\alpha}{n} x^n,$$

wobei  $\binom{\alpha}{n}$  den Binomialkoeffizienten

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha - 1) \cdots (\alpha - n + 1)}{n!}$$

bezeichnet. ( $\binom{\alpha}{0} = 1$ )

KOROLLAR 1.33. *Sei  $k \geq 1$  eine natürliche Zahl und  $q \in \mathbb{C}$ . Dann gilt*

$$\frac{1}{(1 - qx)^k} = \sum_{n \geq 0} \binom{n + k - 1}{k - 1} q^n x^n.$$

Man beachte, daß  $\binom{n+k-1}{k-1}$  ein Polynom in  $n$  vom Grad  $k - 1$  ist.

Zusammengefaßt ergibt sich folgende Charakterisierung der Koeffizienten rationaler Funktionen.

SATZ 1.34. *Es seien  $f(x), g(x) \in \mathbb{C}[x]$  zwei Polynome mit  $\text{grad}(f(x)) < \text{grad}(g(x))$  und  $g(0) \neq 0$ . Weiters sei  $g(x)$  normiert und habe die Zerlegung*

$$g(x) = \prod_{j=1}^r (x - \alpha_j)^{\lambda_j},$$

d.h.  $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  sind die verschiedenen Nullstellen von  $g(x)$  und  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  deren Vielfachheiten. Dann gibt es Polynome  $P_{j, \lambda_j - 1}(x) \in \mathbb{C}[x]$  vom Grad  $\leq \lambda_j - 1$ , sodaß die Koeffizienten  $a_n$  der Potenzreihenentwicklung von

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sum_{n \geq 0} a_n x^n \tag{11}$$

durch

$$a_n = \sum_{j=1}^r P_{j, \lambda_j - 1}(n) \alpha_j^{-n} \tag{12}$$

gegeben sind.

Ist umgekehrt  $(a_n)_{n \geq 0}$  eine Folge der Form (12) mit Polynomen  $P_{j, \lambda_j - 1}(x) \in \mathbb{C}[x]$  vom Grad  $\lambda_j - 1$ ,  $1 \leq j \leq r$ , und  $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , und sei  $g(x)$  durch  $g(x) = \prod_{j=1}^r (x - \alpha_j)^{\lambda_j} \in \mathbb{C}[x]$  gegeben. Dann gibt es ein Polynom  $f(x) \in \mathbb{C}[x]$  mit  $\text{grad}(f(x)) < \text{grad}(g(x))$ , sodaß (11) erfüllt ist, d.h. die Potenzreihe mit  $a_n$  als Koeffizienten ist eine rationale Funktion mit Nenner  $g(x)$ .

## 4.2. Lineare Rekursionen und erzeugende Funktionen.

Die Potenzreihe

$$A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$$

wird auch als (**gewöhnliche**) **erzeugende Funktion**<sup>1</sup> (EF) der Folge  $(a_n)_{n \geq 0}$  (mit  $a_n \in \mathbb{C}$ ) bezeichnet.

Vergleicht man die Sätze 1.17 und 1.34, so gewinnt man eine weitere Charakterisierung von Folgen, die eine lineare Rekursion erfüllen.

**SATZ 1.35.** *Sei  $(a_n)_{n \geq 0}$  eine Folge komplexer Zahlen  $a_n$ . Dann sind die drei folgenden Bedingungen äquivalent.*

- (i) *Die Folge  $(a_n)_{n \geq 0}$  erfüllt eine homogene lineare Rekursion mit konstanten Koeffizienten.*
- (ii) *Die Folge  $(a_n)_{n \geq 0}$  hat die Form*

$$a_n = \sum_{j=1}^r P_{j, \lambda_j - 1}(n) q_j^n$$

mit  $q_j \in \mathbb{C}$  und Polynomen  $P_{j, \lambda_j - 1}(x) \in \mathbb{C}[x]$  vom Grad  $\lambda_j - 1$ ,  $1 \leq j \leq r$ .

- (iii) *Die erzeugende Funktion der Folge  $(a_n)_{n \geq 0}$  ist eine rationale Funktion  $f(x)/g(x)$  mit  $\text{grad}(f(x)) < \text{grad}(g(x))$  und  $g(0) \neq 0$ .*

Weiters bestimmt sich das charakteristische Polynom  $\chi(t) \in \mathbb{C}[t]$  (von der linearen Rekursion aus (i)) durch  $\chi(t) = \prod_{j=1}^r (t - q_j)^{\lambda_j}$  (aus den Größen aus (ii)) bzw. durch  $\chi(t) = t^d g(\frac{1}{t})/g(0)$  (mit den Nennerpolynom  $g(x)$  aus (iii), wobei angenommen wird, daß  $g(x)$  Grad  $d$  hat).

## 4.3. Lösen linearer Rekursionen mittels erzeugender Funktionen.

Erzeugende Funktionen sind auch ein sehr effizientes Hilfsmittel zum Lösen (auch inhomogener) linearer Rekursionen.

**SATZ 1.36.** *Seien  $c_1, c_2, \dots, c_k \in \mathbb{C}$  mit  $c_k \neq 0$  und  $(b_n)_{n \geq 0}$  eine Folge mit  $b_n \in \mathbb{C}$ . Weiters sei  $(a_n)_{n \geq 0}$  Lösung der inhomogenen linearen Rekursion*

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k} + b_n.$$

Dann ist die erzeugende Funktion von  $(a_n)_{n \geq 0}$  durch

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} a_n x^n &= \frac{\sum_{l=0}^{k-1} a_l x^l - c_1 x \sum_{l=0}^{k-2} a_l x^l - \dots - c_{k-1} x^{k-1} a_0}{1 - c_1 x - \dots - c_k x^k} \\ &+ \frac{\sum_{n \geq k} b_n x^n}{1 - c_1 x - \dots - c_k x^k} \end{aligned}$$

gegeben.

Damit kann man (meist mit Hilfe einer Partialbruchzerlegung und Anwendung der Binomischen Reihe)  $a_n$  direkt ablesen.

---

<sup>1</sup>Ob diese jetzt als formale Potenzreihe oder als analytische Funktion zu deuten ist, sei an dieser Stelle noch unbedeutend.

BEISPIEL 1.37. Es bezeichnen wieder  $F_n$  die Fibonaccizahlen, die durch  $F_0 = 0$ ,  $F_1 = 1$  und  $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$  (für  $n \geq 2$ ) definiert sind. Multipliziert man die Rekursionsgleichung mit  $x^n$  und summiert über alle  $n \geq 2$  auf, so erhält man zunächst

$$\sum_{n \geq 2} F_n x^n = \sum_{n \geq 2} F_{n-1} x^n + \sum_{n \geq 2} F_{n-2} x^n.$$

Bezeichnet mit  $F(x) = \sum_{n \geq 0} F_n x^n$  die erzeugende Funktion der Fibonaccizahlen, so ist dies nichts anderes als

$$F(x) - x = xF(x) + x^2F(x),$$

woraus man sofort

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

berechnen kann. Nach kurzer Rechnung erhält man die (modifizierte) Partialbruchzerlegung

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1}{1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}x} - \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1}{1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}x},$$

woraus sich sofort die explizite Darstellung der Fibonaccizahlen

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

ergibt.





## Polynomfamilien und lineare Operatoren

### 1. Potenzreihen von Operatoren

#### 1.1. Formale Potenzreihen.

DEFINITION 2.1. Sei  $\langle R, +, \cdot \rangle$  ein Ring mit Einselement. Der Ring der **formalen Potenzreihen**  $R[[X]]$  besteht aus allen Folgen  $(a_n)_{n \geq 0}$  mit  $a_n \in R$ , für die auch die (Potenzreihen-) Notation

$$\sum_{n \geq 0} a_n X^n = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \dots$$

verwendet wird. (In diesem Zusammenhang werden die Folgeelemente  $a_n$  auch als **Koeffizienten** bezeichnet.)

Die **Summe** zweier formaler Potenzreihen  $\sum_{n \geq 0} a_n X^n$ ,  $\sum_{n \geq 0} b_n X^n$  wird durch

$$\sum_{n \geq 0} a_n X^n + \sum_{n \geq 0} b_n X^n := \sum_{n \geq 0} (a_n + b_n) X^n$$

und ihr **Produkt** durch

$$\sum_{n \geq 0} a_n X^n \cdot \sum_{n \geq 0} b_n X^n := \sum_{n \geq 0} \left( \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) X^n$$

definiert.

Die Potenzreihennotation  $\sum_{n \geq 0} a_n X^n$  hat gegenüber der Folgennotation  $(a_n)_{n \geq 0}$  den Vorteil, daß Summe und Produkt in *natürlicher Weise* dem Zusammenfassen der Koeffizienten der Potenzen von  $X$  entsprechen, wie man dies bei Polynomen bzw. bei analytischen Potenzreihen gewöhnt ist. Die *Variable*  $X$  hat dabei keine konkrete Bedeutung. Gelegentlich wird als Abkürzung auch die *Funktionsschreibweise*  $a(X) = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$  verwendet werden.

Weiters wird die Notation

$$[X^n]a(X) = a_n$$

zum *Ablezen des  $n$ -ten Koeffizienten* der Potenzreihe  $a(X) = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$  benützt.

Die (formalen) Polynome  $R[X]$  bilden einen Unterring von  $R[[X]]$ . Man beachte, daß die Einheitengruppen<sup>1</sup>  $R[X]^*$  des Polynomrings  $R[X]$  nur aus den konstanten Polynomen  $a_0$  mit Einheiten  $a_0 \in R^*$  besteht, d.h.  $R[X]^* = R^*$ . Bei formalen Potenzreihen gibt es viel mehr invertierbare Elemente.

SATZ 2.2. Die Einheitengruppe  $R[[X]]^*$  des Rings der formalen Potenzreihen (über einem Ring mit Einselement) besteht aus allen formalen Potenzreihen

$$\sum_{n \geq 0} a_n X^n = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \dots$$

<sup>1</sup>Die Einheitengruppe  $R^*$  eines Rings (mit Einselement) besteht aus allen Elementen aus  $R$ , die ein multiplikatives Inverses besitzen.

mit einer Einheit  $a_0 \in R^*$ .

BEISPIEL 2.3. Die formale Potenzreihe  $1 - X$  hat als Kehrwert (= Inverses)

$$(1 - X)^{-1} = 1 + X + X^2 + \dots .$$

Weiters folgt mittels vollständiger Induktion für alle ganzen  $m \geq 1$

$$(1 - X)^{-m} = \sum_{n \geq 0} \binom{n + m - 1}{m - 1} X^n .$$

Für formale Potenzreihen gibt es noch eine weitere Verknüpfung.

DEFINITION 2.4. Sei  $R$  ein Ring mit Einselement und  $a(X) = \sum_{n \geq 0} a_n X^n, b(X) = \sum_{n \geq 0} b_n X^n \in R[[X]]$  zwei formale Potenzreihen mit  $b_0 = 0$ . Dann bezeichnet man als die **Komposition**  $a(b(X))$  die formale Potenzreihe

$$a(b(X)) = a_0 + a_1 b(X) + a_2 b(X)^2 + a_3 b(X)^3 + \dots .$$

Man beachte, daß die Einschränkung  $b_0 = 0$  notwendig ist, damit  $a(b(X))$  sinnvoll in dieser Allgemeinheit definiert werden kann. Weiters ist die Potenzreihe  $I(X) = X$  das neutrale Element der Komposition.

Eine formale Potenzreihe  $a(X) \in R[[X]]$  heißt **invertierbar bezüglich Komposition**, wenn es eine formale Potenzreihe  $c(X) \in R[[X]]$  mit

$$a(c(X)) = X \quad \text{und} \quad c(a(X)) = X$$

gibt. Die Potenzreihe  $c(X)$  ist das Inverse bezüglich der Komposition und wird im folgenden durch  $c(X) = a^{[-1]}(X)$  bezeichnet.

Ist  $R$  ein Körper der Charakteristik 0, dann können die invertierbaren Potenzreihen charakterisiert werden.

SATZ 2.5. Sei  $R$  ein Körper der Charakteristik 0. Dann sind genau die Potenzreihen  $a(X) = \sum_{n \geq 0} a_n X^n \in R[[X]]$  mit  $a_0 = 0$  und  $a_1 \neq 0$  bezüglich der Komposition invertierbar.

Die Koeffizienten  $c_n$  der inversen Potenzreihe  $a^{[-1]}(X) = \sum_{n \geq 0} c_n X^n \in R[[X]]$  sind dann durch  $c_0 = 0$  und

$$c_n = \frac{1}{n} [X^{n-1}] \left( \frac{X}{a(X)} \right)^n \quad (n \geq 1)$$

gegeben.

Der erste Teil dieses Satzes ist eine formale Version des **Hauptsatzes für implizite Funktionen** und der zweite Teil die sogenannte **Lagrangesche Inversionsformel**.

BEISPIEL 2.6. Die inverse Potenzreihe von

$$a(X) = e^X - 1 = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} X^n$$

ist die Potenzreihe

$$c(X) = \log(1 + X) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} X^n .$$

DEFINITION 2.7. Sei  $R$  ein Ring mit Einselement und  $a(X) = \sum_{n \geq 0} a_n X^n \in R[[X]]$  eine formale Potenzreihe. Dann bezeichnet man als **formale Ableitung**  $a'(X)$  die formale Potenzreihe

$$a'(X) = \sum_{n \geq 0} (n+1)a_{n+1}X^n.$$

Anstelle von  $a'(X)$  verwendet man auch die Notation  $Da(X)$ , wobei  $D$  als Differentiationsoperator bezeichnet wird.

Die formale Ableitung hat natürlich dieselben Eigenschaften wie die gewöhnliche Differentiation.

SATZ 2.8. Sei  $R$  ein Ring mit Einselement. Dann gelten für formale Potenzreihen  $a(X) = \sum_{n \geq 0} a_n X^n, b(X) = \sum_{n \geq 0} b_n X^n \in R[[X]]$  die folgenden Eigenschaften.

- (i)  $(a(X) + b(X))' = a'(X) + b'(X)$ .
- (ii)  $(c a(X))' = c a'(X), \quad (c \in R)$ .
- (iii)  $(a(X)b(X))' = a'(X)b(X) + a(X)b'(X)$ .
- (iv)  $(a(b(X)))' = a'(b(X))b'(X)$ , falls  $R$  zusätzlich kommutativ ist.

Weiters kann mit Hilfe der Ableitung das *Ablezen* der Koeffizienten neu formalisiert werden, sobald man den (konstanten) Koeffizienten  $a_0$  ablesen kann. Für eine Potenzreihe  $a(X) = \sum_{n \geq 0} a_n \in R[[X]]$  bedeute die Notation

$$a(X)|_{X=0} = a_0$$

das *Auswerten* an der Stelle  $X = 0$ , bzw. den (konstanten) Koeffizienten  $a_0$ .

SATZ 2.9. Sei  $R$  ein Körper der Charakteristik 0 und  $a(X) = \sum_{n \geq 0} a_n X^n \in R[[X]]$  eine formale Potenzreihe. Dann gilt für alle  $n \geq 0$

$$a_n = \frac{1}{n!} (D^n a(X))|_{X=0}$$

bzw.

$$a(X) = \sum_{n \geq 0} \frac{(D^n a(X))|_{X=0}}{n!} X^n.$$

## 1.2. Lineare Operatoren auf den reellen Polynomen.

Die Menge der linearen Operatoren auf den reellen Polynomen  $\mathbb{R}[x]$  bilden nicht nur einen Vektorraum, sondern (wie bei allen linearen Selbstabbildungen) mit der Komposition (Hinter-einanderausführung) als Multiplikation eine  **$\mathbb{R}$ -Algebra**.

Man beachte, daß für die Polynome  $\mathbb{R}[x]$  eine Basis bekannt ist, z.B. die Monome  $x^n, n \geq 0$ . Dementsprechend wird ein linearer Operator  $A : \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}[x]$  durch Angabe der Bilder  $Ax^n$  eindeutig bestimmt.

Sei nun  $A : \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}[x]$  ein festgewählter linearer Operator. Dann bilden die Polynome  $\mathbb{R}[A]$  eine kommutative Unter algebra<sup>2</sup> aller linearer Operatoren  $\mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}[x]$ . Es stellt sich in diesem Zusammenhang die Frage, inwieweit es auch möglich ist, den Potenzreihenring  $\mathbb{R}[[A]]$  zu betrachten.

<sup>2</sup>Man beachte, daß hier  $A$  keine freie Variable wie bei formalen Polynomen ist, sondern daß hier anstelle der Variablen  $X$  ein Element einer  $\mathbb{R}$ -Algebra eingesetzt wird.

DEFINITION 2.10. Es sei  $A : \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}[x]$  ein linearer Operator mit der Eigenschaft, daß  $\text{grad}(Ax^n) < n$  für alle  $n \geq 0$  ist.<sup>3</sup> Weiters bezeichne  $c(X) = \sum_{n \geq 0} c_n X^n \in \mathbb{R}[[X]]$  eine formale Potenzreihe. Dann ist der (lineare) Operator  $c(A) : \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}[x]$  durch

$$c(A)x^n := \sum_{k=0}^n c_k A^k x^n$$

bestimmt.

Die Menge aller dieser Operatoren  $\{c(A) \mid c(X) \in \mathbb{R}[[X]]\}$  wird mit  $\mathbb{R}[[A]]$  bezeichnet.

Offensichtlich ist  $\mathbb{R}[[A]]$  wieder eine kommutative Unteralgebra aller linearer Operatoren  $\mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}[x]$ . Insbesondere ist die Abbildung

$$\mathbb{R}[[X]] \rightarrow \mathbb{R}[[A]], \quad c(X) \mapsto c(A)$$

ein  $\mathbb{R}$ -Algebrenhomomorphismus, d.h. alle Rechenregeln, die im Ring bzw. in der  $\mathbb{R}$ -Algebra  $\mathbb{R}[[X]]$  gelten, sind auch in  $\mathbb{R}[[A]]$  gültig.

BEISPIEL 2.11. Der **Differentialoperator**  $D : \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}[x]$  ist durch

$$Dx^n := nx^{n-1} \quad (n \geq 0)$$

bestimmt. Der **Verschiebungsoperator**  $E^a : \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}[x]$  (mit  $a \in \mathbb{R}$ ), definiert durch

$$E^a f(x) := f(x+a)$$

bzw. durch

$$E^a x^n := \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} x^k,$$

kann durch  $D$  mittels der Potenzreihe

$$E^a = e^{aD} = \sum_{n \geq 0} \frac{a^n}{n!} D^n$$

ausgedrückt werden.

DEFINITION 2.12. Ein linearer Operator  $A : \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}[x]$  heißt **translationsinvariant**, wenn er mit dem Verschiebungsoperator  $E^a$  ( $a \in \mathbb{R}$ ) kommutiert, d.h.

$$AE^a = E^a A \quad (\text{für alle } a \in \mathbb{R}).$$

SATZ 2.13. Ein linearer Operator  $A : \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}[x]$  ist genau dann translationsinvariant, wenn  $A \in \mathbb{R}[[D]]$ , d.h. wenn  $A$  durch  $D$  mittels einer Potenzreihe darstellbar ist. In diesem Fall gilt auch

$$A = \sum_{n \geq 0} \frac{(Ax^n)|_{x=0}}{n!} D^n.$$

## 2. Normale Polynomfamilien

### 2.1. Normale Polynomfamilien und Ableitungsoperatoren.

DEFINITION 2.14. Eine Familie von Polynomen  $(p_n(x))_{n \geq 0}$  mit  $p_n(x) \in \mathbb{R}[x]$  heißt **normale Polynomfamilie**, wenn folgende drei Bedingungen erfüllt sind:

- (i)  $\text{grad}(p_n(x)) = n$  für  $n \geq 0$ .
- (ii)  $p_0(x) = 1$ .

<sup>3</sup>Insbesondere werden alle konstanten Polynome auf 0 abgebildet.

(iii)  $p_n(0) = 0$  für  $n \geq 1$ .

BEISPIEL 2.15. Die Polynomfamilie  $p_n(x) = x^n$  ist normal.

BEISPIEL 2.16. Die Polynomfamilie  $p_n(x) = [x]_n = x(x-1)(x-2) \cdots (x-n+1)$  (wobei  $[x]_0 := 1$ ) ist normal.

BEISPIEL 2.17. Die Polynomfamilie  $p_n(x) = [x]_{-n} = x(x+1)(x+2) \cdots (x+n-1)$  ist normal.

DEFINITION 2.18. Ein Operator  $P : \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}[x]$  heißt **Ableitungsoperator** einer normalen Polynomfamilie  $(p_n(x))_{n \geq 0}$  wenn folgende drei Bedingungen erfüllt sind:

- (i)  $P$  ist linear.
- (ii)  $P1 = 0$ .
- (iii)  $Pp_n(x) = np_{n-1}(x)$  für  $n \geq 1$ .

BEISPIEL 2.19.  $D$  ist der Ableitungsoperator zur Familie  $(x^n)_{n \geq 0}$ ,  $\Delta = E - I$  ist der Ableitungsoperator zur Familie  $([x]_n)_{n \geq 0}$  und  $I - E^{-1}$  ist der Ableitungsoperator zur Familie  $([x]_{-n})_{n \geq 0}$ .

SATZ 2.20. Zu jeder normalen Polynomfamilie  $(p_n(x))_{n \geq 0}$  gibt es einen eindeutig bestimmten Ableitungsoperator  $P$ .

Ist andererseits  $P : \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}[x]$  ein linearer Operator mit der Eigenschaft  $P1 = 0$  und  $\text{grad}(Px^n) = n-1$  für alle  $n \geq 1$ , dann gibt es eine eindeutig bestimmte normale Polynomfamilie  $(p_n(x))_{n \geq 0}$ , zu der  $P$  Ableitungsoperator ist.

Als erste Anwendung geben wir die Entwicklung eines Polynoms  $f(x) \in \mathbb{R}[x]$  mittels einer normalen Polynomfamilie an.

SATZ 2.21. Sei  $(p_n(x))_{n \geq 0}$  eine normale Polynomfamilie mit Ableitungsoperator  $P$ . Dann gilt für alle Polynome  $f(x) \in \mathbb{R}[x]$

$$f(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{(P^k f(x))|_{x=0}}{k!} p_k(x).$$

Offensichtlich bildet jede normale Polynomfamilie eine Basis aller Polynome  $\mathbb{R}[x]$ . Es stellt sich oft das Problem, einen *Basiswechsel* durchzuführen, d.h. bei Vorgabe zweier Polynomfamilien  $(p_n(x))_{n \geq 0}$ ,  $(q_n(x))_{n \geq 0}$  jene Zahlen  $c_{n,k}$  ( $0 \leq k \leq n$ ) zu bestimmen, für die

$$q_n(x) = \sum_{k=0}^n c_{n,k} p_k(x)$$

gilt. Eine Möglichkeit, diese Zahlen zu bestimmen, ist Satz 2.21.

SATZ 2.22. Seien  $(p_n(x))_{n \geq 0}$ ,  $(q_n(x))_{n \geq 0}$  zwei normale Polynomfamilien mit Ableitungsoperatoren  $P$  bzw.  $Q$ . Dann gilt

$$q_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(P^k q_n(x))|_{x=0}}{k!} p_k(x) \quad \text{und} \quad p_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(Q^k p_n(x))|_{x=0}}{k!} q_k(x).$$

## 2.2. Normale Polynomfamilien vom Binomialtyp.

DEFINITION 2.23. Eine normale Polynomfamilie  $(p_n(x))_{n \geq 0}$  ist vom **Binomialtyp**, wenn der verallgemeinerte binomische Lehrsatz

$$p_n(x+y) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p_k(x) p_{n-k}(y) \quad (n \geq 0)$$

gilt.

BEISPIEL 2.24. Die normalen Polynomfamilien  $(x^n)_{n \geq 0}$ ,  $([x]_n)_{n \geq 0}$ ,  $([x]_{-n})_{n \geq 0}$  sind vom Binomialtyp.

SATZ 2.25. Sei  $(p_n(x))_{n \geq 0}$  eine normale Polynomfamilie. Dann sind folgende Eigenschaften äquivalent:

- (i)  $(p_n(x))_{n \geq 0}$  ist vom Binomialtyp.
- (ii) Der Ableitungsoperator  $P$  von  $(p_n(x))_{n \geq 0}$  ist translationsinvariant.
- (iii) Es gibt eine Potenzreihe  $G(t)$  mit

$$\sum_{n \geq 0} p_n(x) \frac{t^n}{n!} = e^{xG(t)}.$$

Ist überdies  $g(X) \in \mathbb{R}[[X]]$  jene Potenzreihe mit  $g(D) = P$ , dann ist  $G(X) = g^{[-1]}(X)$  die bezüglich der Komposition inverse Potenzreihe von  $g(X)$ .

Ein Vorteil von normalen Polynomfamilien vom Binomialtyp ist, daß man mit Ihnen (in Verallgemeinerung von Satz 2.21) Polynome um jede Stelle entwickeln kann.

SATZ 2.26. Sei  $(p_n(x))_{n \geq 0}$  eine normale Polynomfamilie vom Binomialtyp mit Ableitungsoperator  $P$ . Dann gilt für alle Polynome  $f(x) \in \mathbb{R}[x]$  und für jede Stelle  $x_0 \in \mathbb{R}$

$$f(x_0 + y) = \sum_{k \geq 0} \frac{(P^k f(x))|_{x=x_0}}{k!} p_k(y).$$

Ein weiterer Vorteil von normalen Polynomfamilien vom Binomialtyp ist, daß die Polynome  $p_n(x)$  leicht aus der Potenzreihenentwicklung des Ableitungsoperators errechnet werden können.

SATZ 2.27. Sei  $(p_n(x))_{n \geq 0}$  eine normale Polynomfamilie vom Binomialtyp mit Ableitungsoperator  $P$  und  $g(X)$  jene Potenzreihe mit  $g(D) = P$ . Dann lassen sich die Polynome  $p_n(x)$  einerseits rekursiv ermitteln:

$$p_{n+1}(x) = x \frac{1}{g'(D)} p_n(x)$$

und andererseits explizit darstellen:

$$p_n(x) = x \left( \frac{D}{g(D)} \right)^n x^{n-1}.$$

BEISPIEL 2.28. Es sei  $P = \Delta = E - I = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} D^n$ . Dann ist  $g'(D) = E$  und  $g'(D)^{-1} = E^{-1}$ . Also gilt die Rekursion  $p_{n+1}(x) = x p_n(x - 1)$ , woraus sich unmittelbar  $p_n(x) = [x]_n$  ergibt.

BEISPIEL 2.29. Es sei  $P = \frac{D}{D-1} = \sum_{n \geq 1} (-1)^n D^n$ . Dann bestimmen sich die zu  $P$  gehörigen **Laguerrepolynome**  $L_n(x)$  ( $n \geq 1$ ) durch

$$L_n(x) = x(D - I)^n x^{n-1} = \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{n!}{k!} \binom{n-1}{k-1} x^k.$$

Bei Polynomfamilien vom Binomialtyp gibt es noch weitere interessante Eigenschaften, die u.a. auch dafür genutzt werden können, den *Basiswechsel* zwischen zwei Polynomfamilien durchzuführen (siehe dazu auch Satz 2.22).

SATZ 2.30. Seien  $(p_n(x))_{n \geq 0}$ ,  $(q_n(x))_{n \geq 0}$  zwei normale Polynomfamilien vom Binomialtyp mit Ableitungsoperatoren  $P$  bzw.  $Q$  und  $g_1(X)$ ,  $g_2(X)$  jene Potenzreihe mit  $g_1(D) = P$  und  $g_2(D) = Q$ . Weiters seien  $c_{n,k} \in \mathbb{R}$ ,  $0 \leq k \leq n$ , jene Zahlen mit

$$q_n(x) = \sum_{k=0}^n c_{n,k} p_k(x)$$

und  $r_n(x)$  die Polynome

$$r_n(x) = \sum_{k=0}^n c_{n,k} x^k.$$

Dann ist  $(r_n(x))_{n \geq 0}$  auch eine normale Polynomfamilie vom Binomialtyp mit Ableitungsoperator  $R = g_2(g_1^{[-1]}(D))$ .

KOROLLAR 2.31. Sei

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n c_{n,k} x^k \quad (n \geq 0)$$

eine normale Polynomfamilie vom Binomialtyp mit Ableitungsoperator  $P$  und  $g(X)$  jene Potenzreihe mit  $g(D) = P$ . Weiters sei

$$q_n(x) = \sum_{k=0}^n d_{n,k} x^k \quad (n \geq 0)$$

jene normale Polynomfamilie (vom Binomialtyp) mit Ableitungsoperator  $Q = g^{[-1]}(D)$ . Dann gilt

$$x^n = \sum_{k=0}^n d_{n,k} p_k(x).$$

BEISPIEL 2.32. Gesucht sind jene Koeffizienten  $S_{n,k}$  (**Stirlingzahlen 2. Art**), für die

$$x^n = \sum_{k=0}^n S_{n,k} [x]_k$$

gilt. Die Polynome

$$r_n(x) = \sum_{k=0}^n S_{n,k} x^k$$

haben dann den Ableitungsoperator  $R = \Delta^{[-1]} = \log(I + D)$ , da  $([x]_n)_{n \geq 0}$  den Ableitungsoperator  $P = \Delta = e^D - I$  und  $(x^n)_{n \geq 0}$  den Ableitungsoperator  $Q = D$  haben. Deshalb gilt

$$\sum_{n \geq 0} r_n(x) \frac{t^n}{n!} = \sum_{n,k \geq 0} S_{n,k} x^k \frac{t^n}{n!} = e^{x(e^t - 1)},$$

woraus nach kurzer Rechnung (d.h. *Ablezen* der Koeffizienten)

$$S_{n,k} = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n$$

folgt.

### 3. Stirlingzahlen

#### 3.1. Inversion von Folgen.

DEFINITION 2.33. Ein Zahlenschema  $(a_{n,k})$  reeller Zahlen ( $n \geq 0, 0 \leq k \leq n$ ) heißt **unendliche untere Dreiecksmatrix**.

Zwei unendliche untere Dreiecksmatrizen  $(a_{n,k}), (b_{n,k})$  heißen zueinander **invers**, wenn für alle  $n \geq 0$  und  $0 \leq k \leq n$ .

$$\sum_{j=k}^n a_{n,j} b_{j,k} = \delta_{n,k}$$

*gilt.*

Man beachte, daß der Begriff *invers* symmetrisch ist. Betrachtet man nämlich ein beliebiges, aber festes  $n_0 \geq 0$  und die Matrizen  $A_{n_0} = (a_{n,k})_{0 \leq n,k \leq n_0}$ ,  $B_{n_0} = (b_{n,k})_{0 \leq n,k \leq n_0}$  (wobei für  $k > n$   $a_{n,k} = b_{n,k} = 0$  gesetzt wird), so gilt  $A_{n_0}B_{n_0} = I_{n_0}$ , woraus  $B_{n_0}A_{n_0} = I_{n_0}$  folgt.

Die grundlegende Eigenschaft inverser unendlicher unterer Dreiecksmatrizen ist im folgenden Satz formuliert.

**SATZ 2.34.** *Es seien  $(a_{n,k})$ ,  $(b_{n,k})$  zueinander inverse unendliche untere Dreiecksmatrizen. Ist weiters  $(u_n)_{n \geq 0}$  eine Folge und ist  $(v_n)_{n \geq 0}$  durch*

$$v_n := \sum_{k=0}^n a_{n,k} u_k$$

*bestimmt, so kann die Folge  $(u_n)_{n \geq 0}$  durch*

$$u_n = \sum_{k=0}^n b_{n,k} v_k$$

*wiederbestimmt werden.*

Da der Begriff *invers* symmetrisch ist, gilt hier natürlich auch der umgekehrte Sachverhalt.

Zueinander inverse unendliche untere Dreiecksmatrizen spielen auch bei einem *Basiswechsel* zwischen Polynomfamilien eine Rolle.

**SATZ 2.35.** *Seien  $(p_n(x))_{n \geq 0}$ ,  $(q_n(x))_{n \geq 0}$  zwei Polynomfamilien reeller Polynome mit  $\text{grad}(p_n(x)) = \text{grad}(q_n(x)) = n$  ( $n \geq 0$ ) und seien die Zahlen  $a_{n,k}$ ,  $b_{n,k}$  ( $n \geq 0, 0 \leq k \leq n$ ) durch*

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n a_{n,k} q_k(x) \quad \text{und} \quad q_n(x) = \sum_{k=0}^n b_{n,k} p_k(x)$$

*bestimmt, dann sind die unendlichen unteren Dreiecksmatrizen  $(a_{n,k})$ ,  $(b_{n,k})$  zueinander invers und umgekehrt.*

**BEISPIEL 2.36.** Wegen

$$x^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x-1)^k \quad \text{und} \quad (x-1)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} x^k$$

sind die unendlichen unteren Dreiecksmatrizen

$$\left( \binom{n}{k} \right) \quad \text{und} \quad \left( (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \right)$$

zueinander invers.

**BEISPIEL 2.37.** Seien  $(p_n(x))_{n \geq 0}$ ,  $(q_n(x))_{n \geq 0}$  zwei normale Polynomfamilien mit Ableitungsoperatoren  $P$  bzw.  $Q$ . Dann sind die unendlichen unteren Dreiecksmatrizen

$$\left( \frac{(P^k q_n(x))|_{x=0}}{k!} \right) \quad \text{und} \quad \left( \frac{(Q^k p_n(x))|_{x=0}}{k!} \right)$$

zueinander invers.

**BEISPIEL 2.38.** Die Stirlingzahlen 1. und 2. Art, die durch  $[x]_n = \sum_{k=0}^n s_{n,k} x^k$  bzw. durch  $x^n = \sum_{k=0}^n S_{n,k} [x]_k$  definiert sind, bilden zueinander inverse unendliche untere Dreiecksmatrizen  $(s_{n,k})$  und  $(S_{n,k})$ .



### 3.2. Stirlingzahlen 1. und 2. Art.

Im folgenden wird die Definition der Stirlingzahlen 1. und 2. Art wiederholt, und es werden die wichtigsten Eigenschaften dieser Zahlen angegeben.

DEFINITION 2.39. Die **Stirlingzahlen 1. Art**  $s_{n,k}$ ,  $n \geq 0$ ,  $0 \leq k \leq n$ , sind durch

$$[x]_n = \sum_{k=0}^n s_{n,k} x^k$$

definiert.

Die **Stirlingzahlen 2. Art**  $S_{n,k}$ ,  $n \geq 0$ ,  $0 \leq k \leq n$ , sind durch

$$x^n = \sum_{k=0}^n S_{n,k} [x]_k$$

definiert.

$s_{n,k}$	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$
$n=0$	1								
$n=1$	0	1							
$n=2$	0	-1	1						
$n=3$	0	2	-3	1					
$n=4$	0	-6	11	-6	1				
$n=5$	0	24	-50	35	-10	1			
$n=6$	0	-120	274	-225	85	-15	1		
$n=7$	0	720	-1764	1624	-735	175	-21	1	
$n=8$	0	-5040	13068	-13132	6769	-1960	322	-28	1

$S_{n,k}$	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$
$n=0$	1								
$n=1$	0	1							
$n=2$	0	1	1						
$n=3$	0	1	3	1					
$n=4$	0	1	7	6	1				
$n=5$	0	1	15	25	10	1			
$n=6$	0	1	31	90	65	15	1		
$n=7$	0	1	63	301	350	140	21	1	
$n=8$	0	1	127	966	1701	1050	266	28	1

SATZ 2.40. Die Stirlingzahlen 1. und 2. Art erfüllen die folgenden Rekursionen:

$$s_{n,n} = 1, \quad (n \geq 0), \quad s_{n,0} = 0 \quad (n \geq 1),$$

$$s_{n+1,k} = s_{n,k-1} - n s_{n,k} \quad (n \geq 0, 0 \leq k \leq n).$$

$$S_{n,n} = 1, \quad (n \geq 0), \quad S_{n,0} = 0 \quad (n \geq 1),$$

$$S_{n+1,k} = S_{n,k-1} + k S_{n,k} \quad (n \geq 0, 0 \leq k \leq n).$$

SATZ 2.41. Die Stirlingzahlen 1. und 2. Art haben folgende doppelte erzeugende Funktionen:

$$\sum_{n,k \geq 0} s_{n,k} x^k \frac{t^n}{n!} = e^{x \log(1+t)} = (1+t)^x,$$

$$\sum_{n,k \geq 0} S_{n,k} x^k \frac{t^n}{n!} = e^{x(e^t-1)}.$$

SATZ 2.42. Die Stirlingzahlen 1. und 2. Art sind ganze Zahlen und haben folgende kombinatorische Interpretation:

$|s_{n,k}| = s_{n,k}(-1)^{n-k}$  ist die Anzahl der Permutationen von  $n$  Elementen, in deren Zyklendarstellung genau  $k$  Zyklen vorkommen.

$S_{n,k}$  ist die Anzahl der verschiedenen Partitionen einer  $n$ -elementigen Menge in genau  $k$  Teilmengen.

SATZ 2.43. Die Stirlingzahlen 1. und 2. Art können folgendermaßen explizit dargestellt werden:

$$s_{n,k} = \sum_{0 \leq j \leq h \leq n-k} (-1)^{j+h} \binom{n-1+h}{n-k+h} \binom{2n-k}{n-k-h} \frac{(h-j)^{n-k+h}}{h!},$$

$$S_{n,k} = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n.$$

## 4. Bernoullipolynome

### 4.1. Bernoullizahlen und Bernoullipolynome.

DEFINITION 2.44. Die **Bernoullizahlen**  $B_n$ ,  $n \geq 0$ , sind als Koeffizienten der Reihe

$$\sum_{n \geq 0} B_n \frac{t^n}{n!} = \frac{t}{e^t - 1}$$

definiert.

Entsprechend sind die **Bernoullipolynome**  $B_n(x) \in \mathbb{R}[x]$ ,  $n \geq 0$ , durch die Reihendarstellung

$$\sum_{n \geq 0} B_n(x) \frac{t^n}{n!} = \frac{te^{tx}}{e^t - 1}$$

bestimmt.

Die ersten Bernoullizahlen sind durch

$$B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_3 = 0, B_4 = -\frac{1}{30}, B_5 = 0, B_6 = \frac{1}{42}, \dots$$

gegeben. Dabei fällt auf, daß für ungeraden Index  $n > 1$  die Bernoullizahl  $B_n$  offensichtlich 0 ist. Neben dieser Eigenschaft sind im folgenden Satz noch weitere aufgelistet

SATZ 2.45. Die Bernoullizahlen  $B_n$ ,  $n \geq 0$ , erfüllen folgende Eigenschaften:

- (i)  $B_n \in \mathbb{Q}$  ( $n \geq 0$ ).
- (ii)  $B_{2n+1} = 0$  ( $n \geq 1$ )
- (iii)  $B_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k - \delta_{n,1}$ .
- (iv)  $B_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k k! S_{n,k}}{k+1}$ .

Die Eigenschaften der Bernoullipolynome sind stark mit jenen der Bernoullizahlen verbunden.

SATZ 2.46. Die Bernoullipolynome  $B_n(x)$ ,  $n \geq 0$ , erfüllen folgende Eigenschaften:

- (i)  $B_n(x) \in \mathbb{Q}[x]$ ,  $\text{grad}(B_n(x)) = n$  ( $n \geq 0$ ).

- (ii)  $B_n = B_n(0) = B_n(1) - \delta_{n,1}$ .
- (iii)  $B_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_{n-k} x^k \quad (n \geq 0)$ .
- (iv)  $x^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n-k+1} B_k(x) \quad (n \geq 0)$ .
- (v)  $B_n(x)' = n B_{n-1}(x) \quad (n \geq 1)$ .

Insbesondere ergibt sich, daß die unendlichen unteren Dreiecksmatrizen

$$\left( \binom{n}{k} B_{n-k} \right) \quad \text{und} \quad \left( \binom{n}{k} \frac{1}{n-k+1} \right)$$

zueinander invers sind.

Man beachte auch, daß die Familie  $(B_n(x))_{n \geq 0}$  wegen  $B_n(0) = B_n$  keine normale Polynomfamilie ist.

Bernoullizahlen treten an *verschiedenen Stellen der Mathematik* auf, u.a. als Koeffizienten von Laurentreihen elementarer trigonometrischer Funktionen:

SATZ 2.47. *Die Funktionen  $\tanh x$ ,  $\tan x$ ,  $\coth x$ ,  $\cot x$  haben folgende Potenz- bzw. Laurentreihenentwicklung um  $x_0 = 0$ :*

$$\begin{aligned} \tanh x &= \sum_{m \geq 1} B_{2m} 4^m (4^m - 1) \frac{x^{2m-1}}{(2m)!}, \\ \tan x &= \sum_{m \geq 1} (-1)^{m-1} B_{2m} 4^m (4^m - 1) \frac{x^{2m-1}}{(2m)!}, \\ \coth x &= \frac{1}{x} + \sum_{m \geq 1} B_{2m} 4^m \frac{x^{2m-1}}{(2m)!}, \\ \cot x &= \frac{1}{x} + \sum_{m \geq 1} (-1)^m B_{2m} 4^m \frac{x^{2m-1}}{(2m)!}. \end{aligned}$$

Ein besonders interessanter Zusammenhang besteht zwischen der Riemannschen Zetafunktion

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s} \quad (s > 1)$$

und den Bernoullizahlen.

SATZ 2.48. *Für alle  $k \geq 1$  gilt*

$$\zeta(2k) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{2k}} = \frac{(2\pi)^{2k}}{2(2k)!} |B_{2k}|.$$

Insbesondere erhält man dadurch die Abschätzung

$$|B_m| \leq \frac{4m!}{(2\pi)^m},$$

da  $\zeta(s)$  für  $s \geq 2$  durch 2 abgeschätzt werden kann.

## 4.2. Summenformel von Euler-McLaurin.

Eine besonders wichtige Anwendung der Bernoullipolynome ist die **Summenformel von Euler-McLaurin**.

SATZ 2.49. Für jede auf dem Intervall  $[1, n]$   $m$ -mal stetig differenzierbare Funktion  $f(x)$  gilt

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k) = \int_1^n f(x) dx + \sum_{k=1}^m \frac{B_k}{k!} (f^{(k-1)}(n) - f^{(k-1)}(1)) + \frac{(-1)^{m+1}}{m} \int_1^n B_m(x - [x]) f^{(m)}(x) dx,$$

wobei  $[x] = \max\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\}$  die größte ganze Zahl  $\leq x$  bezeichnet.

BEISPIEL 2.50. Um die **harmonischen Zahlen**  $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$  abzuschätzen, verwendet man die Funktion  $f(x) = 1/x$  und erhält nach kurzer Rechnung etwa

$$H_n = \log n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{120n^4} + \varepsilon,$$

mit

$$0 < \varepsilon < \frac{B_6}{6n^6} = \frac{1}{252n^6}.$$

Die Konstante  $\gamma = 0.5772156649 \dots$  heißt **Eulersche Konstante** und kann etwa durch

$$\gamma := \lim_{n \rightarrow \infty} (H_n - \log n) = \sum_{k=1}^m \frac{(-1)^k}{k} B_k - \int_0^\infty B_m(x - [x]) \frac{dx}{x^{m+1}} \quad (m \geq 1)$$

definiert werden.

BEISPIEL 2.51. Wendet man die Summenformel von Euler-McLaurin für die Funktion  $f(x) = x^m$  an, so ergibt sich nach kurzer Rechnung eine explizite Formel für die **Potenzsummen**

$$\begin{aligned} S_m(n) = \sum_{k=1}^n k^m &= \frac{B_{m+1}(n+1) - B_{m+1}}{m+1} \\ &= \frac{B_{m+1}(n+1) - B_{m+1}(0)}{m+1}. \end{aligned}$$

# Erzeugende Funktionen und kombinatorische Konstruktionen

## 1. Potenzreihen und erzeugende Funktionen

### 1.1. Erzeugende Funktionen von Folgen.

DEFINITION 3.1. Sei  $(a_n)_{n \geq 0}$  eine Folge komplexer Zahlen. Dann heißt die formale Potenzreihe

$$a(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$$

gewöhnliche erzeugende Funktion (EF) der Folge  $(a_n)_{n \geq 0}$  und die formale Reihe

$$\hat{a}(x) = \sum_{n \geq 0} a_n \frac{x^n}{n!}$$

exponentielle erzeugende Funktion (EEF) der Folge  $(a_n)_{n \geq 0}$ .

Aus der Kenntnis einer erzeugenden Funktion  $a(x)$  resp.  $\hat{a}(x)$  einer Folge  $a_n$  kann man sofort weitere Beziehungen ableiten.

SATZ 3.2. Sei  $a(x)$  die gewöhnliche erzeugende Funktion (EF) der Folge  $(a_n)_{n \geq 0}$  und  $b(x)$  die EF der Folge  $(b_n)_{n \geq 0}$ . Dann gelten folgende Beziehungen:

1.  $c(x) = a(x) + b(x)$  ist die EF der Folge  $c_n = a_n + b_n$ .
2.  $c(x) = a(x)b(x)$  ist die EF der Folge  $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ .
3.  $c(x) = \frac{1}{1-x} a(x)$  ist die EF der Folge  $c_n = \sum_{k=0}^n a_k$ .
4.  $c(x) = x a'(x)$  ist die EF der Folge  $n a_n$ .
5.  $c(x) = a(\gamma x)$  ist die EF der Folge  $c_n = \gamma^n a_n$ .

SATZ 3.3. Sei  $\hat{a}(x)$  die exponentielle erzeugende Funktion (EEF) der Folge  $(a_n)_{n \geq 0}$  und  $\hat{b}(x)$  die EEF der Folge  $(b_n)_{n \geq 0}$ . Dann gelten folgende Beziehungen:

1.  $\hat{c}(x) = \hat{a}(x) + \hat{b}(x)$  ist die EEF der Folge  $c_n = a_n + b_n$ .
2.  $\hat{c}(x) = \hat{a}(x)\hat{b}(x)$  ist die EEF der Folge  $c_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k b_{n-k}$ .
3.  $\hat{c}(x) = e^x \hat{a}(x)$  ist die EEF der Folge  $c_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k$ .
4.  $\hat{c}(x) = x \hat{a}'(x)$  ist die EEF der Folge  $n a_n$ .
5.  $\hat{c}(x) = \hat{a}(\gamma x)$  ist die EEF der Folge  $c_n = \gamma^n a_n$ .

SATZ 3.4. Sei  $a(x)$  die EF (bzw.  $\hat{a}(x)$  die EEF) der Folge  $(a_n)_{n \geq 0}$ . Dann ist  $c(x) = \frac{1}{2}(a(x) + a(-x))$  die EF (bzw.  $\hat{c}(x) = \frac{1}{2}(\hat{a}(x) + \hat{a}(-x))$  die EEF) der Folge  $(c_n)_{n \geq 0} = (a_0, 0, a_2, 0, a_4, 0, a_6, 0, \dots)$  und  $d(x) = \frac{1}{2}(a(x) - a(-x))$  die EF (bzw.  $\hat{d}(x) = \frac{1}{2}(\hat{a}(x) - \hat{a}(-x))$  die EEF) der Folge  $(d_n)_{n \geq 0} = (0, a_1, 0, a_3, 0, a_5, 0, \dots)$ .

Einige wichtige (Grund-) Reihenentwicklungen sind die folgenden:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x} &= \sum_{n \geq 0} x^n, \\ (1+x)^\alpha &= \sum_{n \geq 0} \binom{\alpha}{n} x^n, \\ \frac{1}{(1-x)^m} &= \sum_{n \geq 0} \binom{m+n-1}{m-1} x^n, \\ e^x &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} x^n, \\ \log(1+x) &= \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n.\end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Reihenentwicklungen und der obigen Eigenschaften lassen sich viele für die Anwendungen wichtige erzeugende Funktionen ableiten.

BEISPIEL 3.5. Die EF der Folge  $a_n = n^2$  ist

$$a(x) = x \left( x \left( \frac{1}{1-x} \right)' \right)' = \frac{x(x+1)}{(1-x)^3}.$$

und die der Folge  $b_n = 2^n$

$$b(x) = \frac{1}{1-2x}.$$

Die Folge

$$c_n = \begin{cases} n^2 & \text{für } n \text{ gerade,} \\ 2^n & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

hat daher die EF

$$c(x) = \frac{a(x) + a(-x)}{2} + \frac{b(x) - b(-x)}{2} = \frac{x(x+1)}{2(1-x)^3} + \frac{x(x-1)}{2(1+x)^3} + \frac{1}{2(1-2x)} - \frac{1}{2(1+2x)}.$$

In den Anwendungen ist es aber auch oft notwendig, aus einer gegebenen (oder ermittelten) EF (bzw. EEF) die Koeffizienten abzulesen, bzw. die dazugehörige Folge  $a_n$  zurückzugewinnen.

Ist  $a(x)$  die EF einer Folge  $(a_n)_{n \geq 0}$ , so soll die Notation

$$[x^n]a(x) = a_n$$

diesen *Ablesevorgang* darstellen, d.h.  $[x^n]a(x)$  bezeichnet den Koeffizienten von  $x^n$ . Bei einer EEF  $\hat{a}(x)$  verwendet man auch die Notation

$$\left[ \frac{x^n}{n!} \right] \hat{a}(x) = a_n.$$

Die Nützlichkeit dieser Notation sei im folgenden Beispiel illustriert.

BEISPIEL 3.6. Es soll ein geschlossener Ausdruck für die Summe  $a_n = \sum_{k=0}^n k^2$  bestimmt werden.

Die EF der gesuchten Folge ist

$$a(x) = \frac{1}{1-x} x \left( x \left( \frac{1}{1-x} \right)' \right)' = \frac{x(x+1)}{(1-x)^4}.$$

Daher bestimmt sich  $a_n$  zu

$$\begin{aligned} a_n &= [x^n] \frac{x(x+1)}{(1-x)^4} = [x^n] \frac{x^2+x}{(1-x)^4} \\ &= [x^{n-2}] \frac{1}{(1-x)^4} + [x^{n-1}] \frac{1}{(1-x)^4} \\ &= \binom{n-2+3}{3} + \binom{n-1+3}{3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \end{aligned}$$

Erzeugende Funktionen können auch zur Vereinfachung von Ausdrücken eingesetzt werden.

BEISPIEL 3.7. Gesucht ist ein geschlossener Ausdruck für

$$a_n = \sum_{k=0}^n \binom{m+k}{k}.$$

Die EF dieser Folge ist

$$a(x) = \frac{1}{1-x} \sum_{n \geq 0} \binom{m+n}{n} x^n = \frac{1}{1-x} \frac{1}{(1-x)^{m+1}} = \frac{1}{(1-x)^{m+2}}.$$

Daraus erhält man direkt

$$a_n = \binom{m+n+1}{n}.$$

## 1.2. Potenzreihen als Funktionen.

Erzeugende Funktionen können natürlich auch als *Funktionen* im herkömmlichen Sinn verstanden werden, wenn der Konvergenzradius  $R$  positiv ist.

SATZ 3.8. Sei  $(a_n)_{n \geq 0}$  eine Folge komplexer Zahlen und

$$R = \left( \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} \right)^{-1}.$$

Ist  $R > 0$ , dann konvergiert die Potenzreihe

$$\sum_{n \geq 0} a_n x^n$$

für  $x \in \mathbb{C}$  mit  $|x| < R$  absolut und stellt eine analytische Funktion  $a(x)$  dar.

Ist umgekehrt  $a(x)$  eine (analytische) Funktion, die durch eine Potenzreihe  $\sum a_n x^n$  (für  $|x| < R$ ) dargestellt wird, so kann die Folge  $a_n$  aus den Ableitungen von  $a(x)$  an der Stelle  $x = 0$  bestimmt werden:

$$a_n = \frac{a^{(n)}(0)}{n!}.$$

Erzeugende Funktionen verschiedener Folgen stellen daher verschiedene (analytische) Funktionen dar. Es ist daher im konvergenten Fall möglich, sich von den formalen Potenzreihen zu trennen und nur analytische Funktionen zu betrachten. Damit können viele Methoden der reellen und komplexen Analysis zur Behandlung erzeugender Funktionen eingesetzt werden, z.B. wenn man an asymptotischen Eigenschaften interessiert ist.

## 2. Kombinatorische Konstruktionen

### 2.1. Kombinatorische Strukturen und erzeugende Funktionen.

Erzeugende Funktionen erweisen sich insbesondere bei kombinatorischen Abzählproblemen als nützlich.

**DEFINITION 3.9.** Ein **kombinatorische Struktur** ist ein Paar  $(C, w)$  aus einer höchstens abzählbaren Menge  $C$  und einer Funktion  $w : C \rightarrow \mathbb{N}$ , sodaß alle Mengen

$$w^{-1}(\{n\}) = \{c \in C \mid w(c) = n\} \quad (n \in \mathbb{N})$$

endlich sind. Das **kombinatorische Abzählproblem** besteht nun darin, die Anzahlen

$$c_n := |w^{-1}(\{n\})|$$

zu bestimmen.

Ein Element  $c \in C$  wird auch **kombinatorisches Objekt** und  $w(c)$  die **Größe** von  $c$  bezeichnet. Man schreibt anstelle von  $w(c)$  auch nur  $|c|$ .

**BEISPIEL 3.10.** Sei  $A$  eine endliche Menge. Dann ist die Potenzmenge  $C = P(A)$  mit der Mächtigkeit eine kombinatorische Struktur. Das kombinatorische Abzählproblem wird durch

$$c_n = \binom{|A|}{n}$$

gelöst.

**BEISPIEL 3.11.** Sei  $C$  die Menge aller markierter (endlicher) Bäume, und  $w$  bezeichne die Anzahl der Knoten. Dann ist  $c_n = n^{n-2}$  (wie später gezeigt werden wird) die Lösung des kombinatorischen Abzählproblems, d.h. es gibt genau  $n^{n-2}$  verschiedene markierte Bäume mit  $n$  Knoten.

Das erste Beispiel stellt eine sogenannte **unmarkierte** (oder **ungeordnete**) kombinatorische Struktur dar, hingegen das zweite eine **markierte** (oder **geordnete**) kombinatorische Struktur.

Markierte kombinatorische Strukturen  $C$  haben die Eigenschaft, daß ein Objekt  $c \in C$  der Größe  $|c| = n$  untrennbar mit einer Anordnung der Zahlen  $1, 2, \dots, n$  verknüpft ist (d.h.  $c$  hat  $n$  Teilobjekte, die in einer speziellen Anordnung der Zahlen  $1, 2, \dots, n$  markiert sind).

In vielen Fällen gibt es zu jedem markierten Objekt  $c \in C$  der Größe  $|c| = n$  weitere  $n! - 1$  Objekte in  $C$ , die sich nur dadurch von  $c$  unterscheiden, daß die Zahlen  $1, 2, \dots, n$  anders permutiert sind (d.h. daß die  $n$  Teilobjekte anders markiert sind.)

Kombinatorischen Strukturen können in natürlicher Weise erzeugende Funktionen zugeordnet werden.

**DEFINITION 3.12.** Sei  $(C, w)$  eine kombinatorische Struktur. Dann bezeichnet die Potenzreihe

$$c(x) = \sum_{c \in C} x^{w(c)} = \sum_{n \geq 0} c_n x^n$$

die **gewöhnliche erzeugende Funktion** (EF) von  $(C, w)$  und

$$\hat{c}(x) = \sum_{c \in C} \frac{x^{w(c)}}{w(c)!} = \sum_{n \geq 0} c_n \frac{x^n}{n!}$$

die **exponentielle erzeugende Funktion** (EEF) von  $(C, w)$ .



Die vorige Bemerkung legt bereits nahe, daß gewöhnliche erzeugende Funktionen eher für unmarkierte Objekte Verwendung finden werden und exponentielle erzeugende Funktionen für markierte Objekte.

Ein wesentlicher Grund der Verwendung erzeugender Funktionen bei kombinatorischen Strukturen ist, daß sich viele **kombinatorischen Konstruktionen** in die Sprache der erzeugenden Funktionen übersetzen lassen und somit kompliziertere kombinatorische Abzählprobleme mit Hilfe erzeugender Funktionen strukturiert und leichter lösbar werden.

## 2.2. Kombinatorische Konstruktionen für unmarkierte Objekte.

Zunächst werden einige einfache kombinatorische Konstruktionen vorgestellt.

DEFINITION 3.13. *Im folgenden bezeichnen  $A, B, C$  unmarkierte kombinatorische Strukturen.*

1. Sind  $A$  und  $B$  disjunkt, so bezeichnet  $C = A + B = A \cup B$  die **Summe** (bzw. Vereinigung) von  $A$  und  $B$ . Die Größenfunktion bleibt unverändert.
2. Das kartesische Produkt  $C = A \times B$  ist das **Produkt** von  $A$  und  $B$ . Die Größe einer Paars  $c = (a, b) \in C$  wird durch  $|c| = |a| + |b|$  berechnet.
3. Besitzt  $A$  kein Objekt der Größe 0 und sind die Mengen  $A, A \times A, A \times A \times A, \dots$  paarweise disjunkt, so bezeichnet man mit

$$C = A^* := \{\epsilon\} + A + A \times A + A \times A \times A + \dots$$

die **Folgen** von Objekten aus  $A$ .

4. Die Menge aller endlichen Teilmengen  $C = \mathcal{P}_{\text{fin}}(A)$  wird als **Mengen** von Objekten aus  $A$  bezeichnet. Die Größe einer Teilmenge  $\{a_1, a_2, \dots, a_k\} \subseteq A$  bestimmt sich durch  $|a_1| + |a_2| + \dots + |a_k|$ .
5. Die Menge aller endlichen Multimengen  $C = \mathcal{M}_{\text{fin}}(A)$  wird als **Multimengen** von Objekten aus  $A$  bezeichnet. Die Größe einer Multimenge  $\{a_1^{j_1}, a_2^{j_2}, \dots, a_k^{j_k}\}$  bestimmt sich durch  $j_1|a_1| + j_2|a_2| + \dots + j_k|a_k|$ .
6. Die **Komposition**  $C = A(B)$  von  $A$  und  $B$  (wobei  $B$  kein Objekt der Größe 0 besitzt) ist durch

$$C = A_0 + A_1 \times B + A_2 \times B \times B + \dots$$

definiert, wobei  $A_n = \{a \in A \mid |a| = n\}$  bezeichnet. Dabei ist die Größe eines Element  $(a, b_1, b_2, \dots, b_n)$  aus  $A_n \times B \times B \times \dots \times B$  durch  $|b_1| + |b_2| + \dots + |b_n|$  bestimmt.

Alle hier angegebenen kombinatorischen Konstruktionen haben eine Entsprechung bei den erzeugenden Funktionen.

SATZ 3.14. *Für unmarkierte kombinatorische Strukturen  $A, B, C$  gelten die folgenden Beziehungen für die entsprechenden erzeugenden Funktionen  $a(x), b(x), c(x)$ :*

$C = A + B$	$c(x) = a(x) + b(x)$
$C = A \times B$	$c(x) = a(x)b(x)$
$C = A^*$	$c(x) = \frac{1}{1-a(x)}$
$C = \mathcal{P}_{\text{fin}}(A)$	$c(x) = e^{a(x) - \frac{1}{2}a(x)^2 + \frac{1}{3}a(x)^3 - \dots}$
$C = \mathcal{M}_{\text{fin}}(A)$	$c(x) = e^{a(x) + \frac{1}{2}a(x)^2 + \frac{1}{3}a(x)^3 + \dots}$
$C = A(B)$	$c(x) = a(b(x))$

BEISPIEL 3.15. Die **Kombinationen ohne Wiederholung** der Elemente  $a_1, a_2, \dots, a_n$  können durch die kombinatorische Struktur

$$C = (\{\epsilon\} + \{a_1\}) \times (\{\epsilon\} + \{a_2\}) \times \dots \times (\{\epsilon\} + \{a_n\})$$

beschrieben werden. Die EF von  $C$  hat daher die Form

$$c(x) = (1 + x)^n$$

und das kombinatorische Abzählproblem wird durch

$$c_k = [x^k](1 + x)^n = \binom{n}{k}$$

gelöst.

**BEISPIEL 3.16.** Die **Kombinationen mit Wiederholung** der Elemente  $a_1, a_2, \dots, a_n$  können durch die kombinatorische Struktur

$$C = \{a_1\}^* \times \{a_2\}^* \times \dots \times \{a_n\}^*$$

beschrieben werden. Die EF von  $C$  hat daher die Form

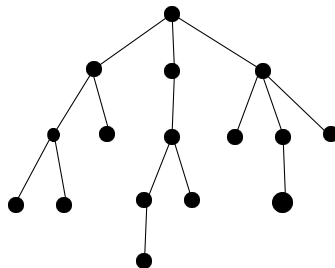
$$c(x) = \frac{1}{(1 - x)^n}$$

und das kombinatorische Abzählproblem wird durch

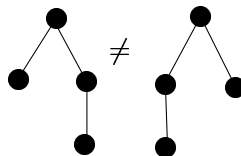
$$c_k = [x^k] \frac{1}{(1 - x)^n} = \binom{n + k - 1}{k}$$

gelöst.

**BEISPIEL 3.17.** Es sei  $P$  die Menge der ebenen Wurzelbäume, d.h. Objekte der Form:



Die Wurzel ist ein ausgezeichneter Knoten. Von ihm aus verzweigt sich der Baum. Dabei ist die Reihenfolge der Zweige wesentlich, da hier ebene Wurzelbäume betrachtet werden, d.h. die beiden Bäume



werden als verschieden betrachtet.

Ebene Wurzelbäume können rekursiv beschrieben werden:

Ein ebener Wurzelbaum besteht entweder nur aus der Wurzel oder er verzweigt sich an der Wurzel in  $k \geq 1$  Äste. Jeder dieser Äste für sich betrachtet hat (wenn man die Wurzel und die direkte Verbindung von der Wurzel zum ersten Knoten dieses Astes wegdenkt) wieder die Struktur eines ebenen Wurzelbaumes.

Mit den obigen Bezeichnungen für kombinatorische Konstruktionen, läßt sich diese Beschreibung folgendermaßen übersetzen:

$$P = \circ + \circ \times P + \circ \times P \times P + \cdots = \circ \times P^*.$$

Die erzeugende Funktion  $p(x)$  der ebenen Wurzelbäume erfüllt daher die Beziehung

$$p(x) = \frac{x}{1 - p(x)}$$

und ist daher explizit durch

$$p(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2}$$

gegeben. Daraus ergibt sich die Anzahl  $p_n$  der verschiedenen ebenen Wurzelbäume mit  $n$  Knoten zu

$$p_n = \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1}.$$

### 2.3. Kombinatorische Konstruktionen für markierte Objekte.

Ähnlich wie bei den unmarkierten Objekten gibt es auch für markierte Objekte kombinatorische Konstruktionen, die mit den entsprechenden exponentiellen erzeugenden Funktionen verträglich sind. Der wesentliche Unterschied zu den unmarkierten Objekten ist bei der Definition des *Produkts*.

DEFINITION 3.18. *Im folgenden bezeichnen  $A, B, C$  markierte kombinatorische Strukturen.*

1. Sind  $A$  und  $B$  disjunkt, so bezeichnet  $C = A + B = A \cup B$  die **Summe** (bzw. Vereinigung) von  $A$  und  $B$ . Die Größenfunktion bleibt unverändert.
2. Das **Produkt**  $C = A * B$  zweier markierter Strukturen wird folgendermaßen definiert. Zu einem Element  $a \in A$  der Größe  $|a| = k$  und einem Element  $b \in B$  der Größe  $|b| = m$  werden  $\binom{k+m}{k}$  Elemente von  $A * B$  der Größe  $k + m$  konstruiert. Dem Objekt  $a$  ist eine Anordnung  $\pi(1), \dots, \pi(k)$  der Elemente  $1, 2, \dots, k$  zugeordnet, und dem Objekt  $b$  eine Anordnung  $\sigma(1), \dots, \sigma(m)$  der Elemente  $1, 2, \dots, m$ . Ziel ist es nun, dem Paar  $(a, b)$  in natürlicher Weise eine Permutation  $\tau(1), \dots, \tau(k+m)$  der Zahlen  $1, 2, \dots, k+m$  zuzuordnen. Dazu betrachte man eine der  $\binom{k+m}{k}$  Auswahlen  $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq k+m$  (und die dazugehörigen Zahlen  $1 \leq l_1 < l_2 < \dots < l_m \leq k+m$ ) mit

$$\{j_1, j_2, \dots, j_k\} \cup \{l_1, l_2, \dots, l_m\} = \{1, 2, \dots, k+m\}.$$

Zu so einer Auswahl definiere man  $\tau$  durch

$$\tau(j_1) = \pi(1), \tau(j_2) = \pi(2) \dots, \tau(j_k) = \pi(k), \tau(l_1) = \sigma(1), \tau(l_2) = \sigma(2), \dots, \tau(l_m) = \sigma(m).$$

Auf diese Weise erhält man  $\binom{k+m}{k}$  verschiedene markierte Objekte in  $A * B$ .

3. Besitzt  $A$  kein Objekt der Größe 0 und sind die Mengen  $A, A * A, A * A * A, \dots$  paarweise disjunkt, so bezeichnet man mit

$$C = A^* := \{\epsilon\} + A + A * A + A * A * A + \dots$$

die **Folgen** von Objekten aus  $A$ .

4. Besitzt  $A$  kein Objekt der Größe 0 und sind die Mengen  $A, A * A, A * A * A, \dots$  paarweise disjunkt, so bezeichnet man mit

$$C = \mathcal{Z}(A) := A + \frac{1}{2}A * A + \frac{1}{3}A * A * A + \dots$$

die **Zyklen** von Objekten aus  $A$ . Dabei bedeutet etwa  $\frac{1}{3}A * A * A$  die Menge der Zyklen der Länge 3, d.h. die Objekte  $(a_1, a_2, a_3)$ ,  $(a_2, a_3, a_1)$ ,  $(a_3, a_1, a_2)$  aus  $A * A * A$  werden nicht voneinander unterschieden.

5. Sind die Mengen  $A$ ,  $A * A$ ,  $A * A * A$ , ... paarweise disjunkt, so bezeichnet man mit

$$C = e^A = \{\varepsilon\} + A + \frac{1}{2!}A * A + \frac{1}{3!}A * A * A + \dots$$

die **Mengen** von Objekten von  $A$ . Dabei entspricht etwa  $\frac{1}{3!}A * A * A$  den dreielementigen Mengen, d.h. die Objekte  $(a_1, a_2, a_3)$ ,  $(a_1, a_3, a_2)$ ,  $(a_2, a_3, a_1)$ ,  $(a_2, a_1, a_3)$ ,  $(a_3, a_1, a_2)$ ,  $(a_3, a_2, a_1)$  aus  $A * A * A$  werden nicht voneinander unterschieden.

6. Die **Komposition**  $C = A(B)$  von  $A$  und  $B$  (wobei  $B$  kein Objekt der Größe 0 besitzt) ist durch

$$C = A_0 + A_1 \times B + A_2 \times (B * B) + A_3 \times (B * B * B) + \dots$$

definiert, wobei  $A_n = \{a \in A \mid |a| = n\}$  bezeichnet. Dabei ist die Größe eines Element  $(a, b_1, b_2, \dots, b_n)$  aus  $A_n \times (B * B * \dots * B)$  durch  $|b_1| + |b_2| + \dots + |b_n|$  bestimmt.

Alle hier angegebenen kombinatorischen Konstruktionen haben eine entsprechende Konstruktion für exponentielle erzeugende Funktionen.

**SATZ 3.19.** Für markierte kombinatorische Strukturen  $A, B, C$  gelten die folgenden Beziehungen für die entsprechenden exponentiellen erzeugenden Funktionen  $\hat{a}(x), \hat{b}(x), \hat{c}(x)$ :

$C = A + B$	$\hat{c}(x) = \hat{a}(x) + \hat{b}(x)$
$C = A * B$	$\hat{c}(x) = \hat{a}(x)\hat{b}(x)$
$C = A^*$	$\hat{c}(x) = \frac{1}{1 - \hat{a}(x)}$
$C = \mathcal{Z}(A)$	$\hat{c}(x) = \log \frac{1}{1 - \hat{a}(x)}$
$C = e^A$	$\hat{c}(x) = e^{\hat{a}(x)}$
$C = A(B)$	$\hat{c}(x) = \hat{a}(\hat{b}(x))$

**BEISPIEL 3.20.** Jede Permutation (der Zahlen  $1, 2, \dots, n$ ) kann eindeutig als Menge von Zyklen elementarer markierter Objekte dargestellt werden. Es gilt also für die markierte kombinatorische Struktur  $\Pi$  aller Permutationen

$$\Pi = e^{\mathcal{Z}(o)},$$

wobei  $o$  ein elementares markiertes Objekt der Größe 1 bezeichnet. Daher hat die EEF der Permutationen die Form

$$\hat{\pi}(x) = \exp\left(\log \frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n \geq 0} n! \frac{x^n}{n!}.$$

Dies bestätigt, daß es genau  $n!$  Permutationen der Zahlen  $1, 2, \dots, n$  gibt.

**BEISPIEL 3.21.** Die markierten Wurzelbäume können ähnlich beschrieben werden wie die ebenen Wurzelbäume.

Ein markierter Wurzelbaum besteht aus einem ausgezeichneten Knoten (der Wurzel), von der aus eine Menge von Ästen verzweigen, die (wenn man die Wurzel und die direkte Verbindung zum nächsten Knoten wegdenkt) wieder die Struktur markierter Wurzelbäume haben.

Es bestehen zwei wesentliche Unterschiede. Erstens handelt es sich um markierte Objekte, d.h. ein Baum mit  $n$  Knoten wird mit den Zahlen  $1, 2, \dots, n$  markiert, und zweitens ist die Reihenfolge der Äste irrelevant. Die obige Beschreibung der (markierten) kombinatorischen Struktur  $M$  der markierten Wurzelbäume läßt sich also in die Form

$$M = \circ * e^M$$

übersetzen. Die EEF erfüllt daher die Beziehung

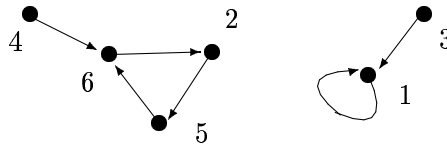
$$\hat{m}(x) = xe^{\hat{m}(x)}.$$

Es wird sich später herausstellen, daß diese EEF durch

$$\hat{m}(x) = \sum_{n \geq 1} n^{n-1} \frac{x^n}{n!}$$

gegeben ist. Es gibt also  $m_n = n^{n-1}$  markierte Wurzelbäume mit  $n$  Knoten. Daraus folgt übrigens, daß es  $n^{n-2}$  markierte Bäume mit  $n$  Knoten gibt, da jeder der  $n$  Knoten als Wurzel ausgezeichnet werden kann und damit alle markierten Wurzelbäume genau einmal entstehen.

BEISPIEL 3.22. Eine Abbildung  $f : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$  kann (ähnlich wie eine Permutation) dadurch graphisch dargestellt werden, daß man die Zahlen  $1, 2, \dots, n$  als Punkte repräsentiert und zwischen  $i$  und  $j$  einen Pfeil zeichnet, wenn  $f(i) = j$  ist. Das folgende Beispiel zeigt so eine graphische Darstellung für  $n = 6$  und der Abbildung  $f(1) = 1, f(2) = 5, f(3) = 1, f(4) = 6, f(5) = 6, f(6) = 2$ .



Alle Graphen, die so entstehen haben folgende Gestalt. Sie zerfallen zunächst (möglicherweise) in einzelne Komponenten. In jeder dieser Komponenten ist genau ein Zyklus, und jeder Punkt des Zyklus ist Wurzel eines markierten Wurzelbaums.

Die Zusammenfassung alle Abbildungen auf endlichen Mengen kann daher als markierte kombinatorische Struktur  $R$  der Form

$$R = e^{\mathcal{Z}(M)}$$

aufgefaßt werden. Demnach hat die EEF die Form

$$\hat{r}(x) = \exp \left( \log \frac{1}{1 - \hat{m}(x)} \right) = \frac{1}{1 - \hat{m}(x)}.$$

Offensichtlich gilt  $r_n = n^n$ , also

$$\hat{r}(x) = \sum_{n \geq 0} n^n \frac{x^n}{n!}.$$

Daraus läßt sich übrigens (nach kurzer Rechnung)  $m_n = n^{n-1}$  (wie oben angegeben) ableiten.

### 3. Nichtlineare Rekursionen

#### 3.1. Catalanzahlen.

DEFINITION 3.23. Die **Catalanzahlen**  $c_n$ ,  $n \geq 0$  sind durch

$$c_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

definiert.

Die Catalanzahlen treten in vielen kombinatorischen Problemen auf, da sie eine einfache, aber nichtlineare Rekursion erfüllen, die mit Hilfe erzeugender Funktionen leicht zu lösen ist.

SATZ 3.24. Die Catalanzahlen  $c_n$  erfüllen die nichtlineare Rekursion

$$c_{n+1} = \sum_{k=0}^n c_k c_{n-k} \quad (n \geq 0)$$

und haben die EF

$$\sum_{n \geq 0} c_n x^n = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x}.$$

BEISPIEL 3.25. Die Anzahl  $p_n$ ,  $n \geq 1$ , der ebenen Wurzelbäume mit  $n$  Knoten (deren erzeugende Funktion  $p(x)$  die Funktionalgleichung  $p(x) = x/(1 - p(x))$  erfüllt) sind durch

$$p_n = c_{n-1} = \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1}$$

gegeben.

BEISPIEL 3.26. Die Anzahl  $a_n$  der verschiedenen Möglichkeiten, ein konvexes  $n$ -Eck in Dreiecke zu zerlegen (wobei nur die  $n$  Seiten des  $n$ -Ecks und die Diagonalen als Seiten erlaubt sind), erfüllt die Rekursion

$$a_n = \sum_{k=2}^{n-1} a_k a_{n+1-k}$$

(mit  $a_2 = 1$ ) und sind daher durch

$$a_n = c_{n+2}$$

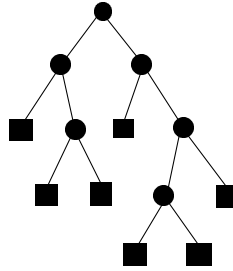
gegeben.

#### 3.2. Binärbäume und ebene Bäume.

Im vorigen Abschnitt wurden bereits zwei Klassen von Wurzelbäumen vorgestellt, die ebenen Wurzelbäume und die markierten Wurzelbäume. Eine weitere Klasse sind die (ebenen) **Binärbäume**. Diese sind Wurzelbäume und dadurch gekennzeichnet, daß von einem Knoten entweder gar nicht weiterverzweigt wird oder daß genau zwei Zweige weiterführen. (Siehe das Beispiel auf der nächsten Seite:)

Daraus ergeben sich zwei Knotenklassen, die der **externen Knoten** ( $\square$ ), von denen eben nicht weiterverzweigt wird, und die der **internen Knoten** ( $\circ$ ), von denen aus genau zwei Zweige ausgehen. Zwischen den Anzahlen dieser Knoten besteht ein einfacher Zusammenhang.

LEMMA 3.27. In einem Binärbaum mit  $n$  internen Knoten gibt es genau  $n + 1$  externe Knoten, also insgesamt  $2n + 1$  Knoten.



Die Binärbäume können auch als (unmarkierte) kombinatorische Struktur  $B$  aufgefaßt werden, wobei z.B. als Größe die Anzahl der internen Knoten genommen werden kann. Wie bei den ebenen Wurzelbäumen erlaubt der rekursive Aufbau

$$B = \square + \circ \times B \times B$$

eine Bestimmung der EF und die Lösung des kombinatorischen Problems.

SATZ 3.28. Die EF  $b(x)$  der Binärbäume  $B$  erfüllt die Beziehung

$$b(x) = 1 + xb(x)^2.$$

Sie hat daher die Form

$$b(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x},$$

und die Anzahl  $b_n$  der Binärbäume mit  $n$  internen Knoten entspricht genau den Catalanzahlen

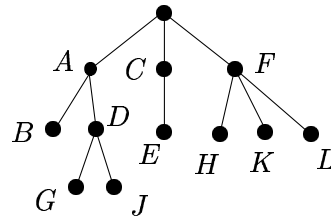
$$b_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

Interessanterweise gibt es also genau so viele ebene Wurzelbäume mit  $n$  Knoten wie Binärbäume mit  $n - 1$  internen Knoten. Diese Beobachtung hat einen tieferen Hintergrund. Es ist nämlich möglich, mit Hilfe der sogenannten **Rotationskorrespondenz** eine bijektive Beziehung zwischen einem ebenen Wurzelbaum mit  $n$  Knoten und einem Binärbaum mit  $n - 1$  internen Knoten anzugeben.

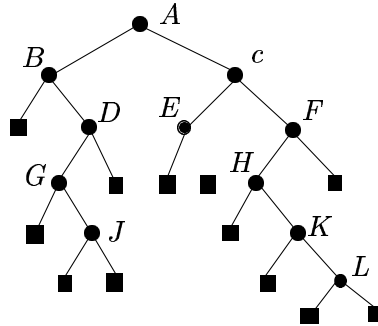
Dabei wurde folgende Vorgangsweise angewandt: Ausgegangen wird von einem ebenen Wurzelbaum mit  $n$  Knoten.

1. Man streiche die Wurzel (und alle Kanten, die von der Wurzel ausgehen).
2. Man streiche bei jedem weiteren Knoten, von dem Äste ausgehen, alle ausgehenden Kanten bis auf eine, die am weitesten links liegt.
3. Man verbinde alle Knoten, die im ursprünglichen ebenen Wurzelbaum einen gemeinsamen direkten Vorgänger haben, zu je einer (horizontalen) Kette.
4. Die eben eingerichteten horizontalen Kanten werden um  $45^\circ$  nach unten gedreht.
5. Die  $n - 1$  verbliebenen Knoten fungieren nun als interne Knoten eines Binärbaums. Man ergänze noch die nötigen  $n$  externen Knoten.

BEISPIEL 3.29. Dem ebenen Wurzelbaum



entspricht der folgende Binärbaum:



#### 4. Lagrangesche Inversionsformel

Die Lagrangesche Inversionsformel dient dazu, die Koeffizienten der bezüglich der Komposition inversen Potenzreihe zu bestimmen.

SATZ 3.30. Sei  $a(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$  eine formale Potenzreihe mit  $a_0 = 0$  und  $a_1 \neq 0$ . Weiters bezeichne  $b(x) = a^{[-1]}(x)$  die bezüglich der Komposition inverse Potenzreihe, und  $g(x)$  eine beliebige Potenzreihe. Dann gilt für die Koeffizienten von  $g(b(x))$ .

$$[x^n]g(b(x)) = \frac{1}{n}[u^{n-1}]g'(u) \left( \frac{u}{a(u)} \right)^n \quad (n \geq 1).$$

Für viele Problemstellungen ist die folgende Variante einfacher anzuwenden.

SATZ 3.31. Sei  $\phi(x)$  eine Potenzreihe mit  $\phi(0) \neq 0$  und  $y(x)$  jene Potenzreihe, die die Gleichung

$$y(x) = x\phi(y(x))$$

erfüllt. Dann ist  $y(x)$  (bezüglich der Komposition) invertierbar und die Koeffizienten von  $g(y(x))$  (für eine beliebige Potenzreihe  $g(x)$ ) sind durch

$$[x^n]g(y(x)) = \frac{1}{n}[u^{n-1}]g'(u)\phi(u)^n \quad (n \geq 1)$$

gegeben.

BEISPIEL 3.32. Die EF  $p(x)$  der ebenen Wurzelbäume erfüllt die die Beziehung

$$p(x) = \frac{x}{1 - p(x)}.$$

Daher sind die Koeffizienten  $p_n$  durch

$$p_n = \frac{1}{n}[u^{n-1}](1 - u)^{-n} = \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1} = c_{n-1}$$



gegeben.

BEISPIEL 3.33. Die EF  $b(x)$  der Binärbäume erfüllt die Beziehung

$$b(x) = 1 + xb(x)^2.$$

Die EF  $d(x) = b(x) - 1$  ist daher Lösung der Gleichung

$$d(x) = x(1 + d(x))^2,$$

woraus sich für  $n \geq 1$

$$b_n = d_n = \frac{1}{n}[u^{n-1}](1+u)^{2n} = \frac{1}{n} \binom{2n}{n-1} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = c_n$$

ergibt.

BEISPIEL 3.34. Die EEF  $\hat{m}(x)$  der markierten Wurzelbäume genügt der Gleichung

$$\hat{m}(x) = xe^{\hat{m}(x)}.$$

Die Koeffizienten ergeben sich daher zu

$$[x^n]\hat{m}(x) = \frac{1}{n}[u^{n-1}]e^{un} = \frac{1}{n} \frac{n^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{n^{n-1}}{n!},$$

woraus unmittelbar  $m_n = n^{n-1}$  folgt.

BEISPIEL 3.35. Die EEF  $\hat{r}(x)$  der Abbildungen auf endlichen Mengen ergibt sich aus  $\hat{m}(x)$  durch

$$\hat{r}(x) = \frac{1}{1 - \hat{m}(x)}.$$

Daher ist

$$[x^n]\hat{r}(x) = \frac{1}{n}[u^{n-1}] \frac{1}{(u-1)^2} e^{un} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) \frac{n^k}{k!} = \frac{n^n}{n!},$$

was  $r_n = n^n$  bestätigt.

## 5. Asymptotische Methoden

### 5.1. Konvergenzradius.

Der Konvergenzradius  $R$  einer Potenzreihe

$$a(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$$

ist durch

$$R = \left( \limsup |a_n|^{\frac{1}{n}} \right)^{-1}$$

gegeben, und  $a(x)$  stellt für  $|x| < R$  eine analytische Funktion dar.

Ist umgekehrt  $a(x)$  eine in einem Kreis  $|x| < r$  analytische Funktion, so ist der Konvergenzradius  $R$  jener Potenzreihe, die  $a(x)$  in diesem Kreis (mit Anschlußstelle  $x_0 = 0$ ) darstellt sicher  $\geq r$ . Man kann daher aus Analytizitätseigenschaften einer erzeugenden Funktion sofort Aussagen über das Größenwachstum der Koeffizienten der entsprechenden Potenzreihe machen:

SATZ 3.36. Sei  $a(x)$  eine analytische Funktion in einer Kreisumgebung  $|x| < r$  (mit  $r > 0$ ). Dann sind die Koeffizienten  $a_n$  der Potenzreihe, die  $a(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$  für  $|x| < r$  darstellt, durch

$$a_n = O((r - \varepsilon)^{-n})$$

beschränkt, wobei  $\varepsilon > 0$  beliebig klein, aber fest gewählt werden kann.

## 5.2. Pole analytischer Funktionen.

Wir werden die Beobachtung des vorigen Abschnitts mit einer ganz einfachen Eigenschaft der geometrischen Reihe kombinieren. Betrachten wir z.B. die Reihe

$$\sum_{n \geq 0} 2^n x^n = \frac{1}{1 - 2x}.$$

Sie stellt für  $|x| < \frac{1}{2}$  eine analytische Funktion dar, nämlich  $f(x) = 1/(1 - 2x)$ . Die Funktion  $f(x) = 1/(1 - 2x)$  ist aber nicht nur im Kreis  $|x| < \frac{1}{2}$  sinnvoll definiert. Sie läßt sich bis auf den Punkt  $x_0 = \frac{1}{2}$  auf die ganze komplexe Ebene analytisch fortsetzen. Im Punkt  $x_0 = \frac{1}{2}$  hat sie eine Polstelle als (isolierte) Singularität. Offensichtlich besteht auch ein direkter Zusammenhang zwischen der Polstelle  $x_0 = \frac{1}{2}$  und der Koeffizientenfolge  $2^n = x_0^{-n}$ . (Man betrachte dazu auch die allgemeinere Reihe zu  $1/(1 - \alpha x)$ .)

BEISPIEL 3.37. Es sei nun die erzeugende Funktion

$$g(x) = \frac{e^{-x}}{1 - x}$$

gegeben, und es besteht die Frage, die Größenordnung der Koeffizienten anzugeben.<sup>1</sup> Offensichtlich ist  $g(x)$  für  $|x| < 1$  analytisch. Die Koeffizienten erfüllen daher zunächst sicherlich  $g_n = O((1 + \varepsilon)^n)$ , was jedoch nur eine sehr grobe Abschätzung darstellt.  $g(x)$  kann aber (bis auf einen Pol an der Stelle  $x_0 = 1$  analytisch fortgesetzt werden. Es ist daher naheliegend,  $g(x)$  mit der Funktion

$$g_0(x) = \frac{e^{-1}}{1 - x}$$

zu vergleichen. Einerseits kennt man die Koeffizienten von  $g_0(x)$ , andererseits hat die Differenz

$$h(x) = g(x) - g_0(x)$$

an der Stelle  $x_0 = 1$  eine hebbare Singularität und kann, da  $g_0(x)$  keine weitere Singularität hat, sogar als ganze Funktion angesehen werden. Entwickelt man  $h(x)$  in eine Potenzreihe, so gilt für die Koeffizienten  $h_n = O(R^{-n})$  für jedes beliebige (feste)  $R > 0$ . Daher sind die Koeffizienten von  $g(x)$  durch

$$g_n = e^{-1} + O(R^{-n}) \quad (n \rightarrow \infty)$$

gegeben.

Durch direkte Verallgemeinerung erhält man den folgenden Satz.

SATZ 3.38. Sei  $a(x)$  eine Funktion, die im Kreis  $|x| < R$  bis auf endlich viele Polstellen  $r_1, \dots, r_m \neq 0$  analytisch ist. Sind die lokalen Entwicklungen von  $a(x)$  um  $r_j$  durch

$$\frac{A_{j,k_j}}{(1 - x/r_j)^{k_j}} + \frac{A_{j,k_j-1}}{(1 - x/r_j)^{k_j-1}} + \dots + \frac{A_{j,1}}{1 - x/r_j}$$

<sup>1</sup> $g(x)$  ist übrigens die EEF der fixpunktfreien Permutationen.

gegeben, so haben die Koeffizienten  $a_n$  der Potenzreihenentwicklung von  $a(x)$  (um die Stelle  $x_0 = 0$ ) die asymptotische Entwicklung

$$a_n = \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^{k_j} A_{j,l} \binom{n+l-1}{l-1} r_j^{-n} + O((R-\varepsilon)^{-n}) \quad (n \rightarrow \infty),$$

wobei  $\varepsilon > 0$  beliebig klein (aber fest) gewählt werden kann.

BEISPIEL 3.39. Die EEF der Bernoullizahlen  $B_n$  ist

$$b(x) = \sum_{n \geq 0} B_n \frac{x^n}{n!} = \frac{x}{e^x - 1}.$$

Die Funktion  $b(x)$  hat im Kreis  $|x| < 4\pi$  die beiden Pole  $r_1 = 2\pi i$  und  $r_2 = -2\pi i$  mit den lokalen Entwicklungen

$$\frac{-1}{1 - x/(2\pi i)} \quad \text{bzw.} \quad \frac{-1}{1 + x/(2\pi i)}.$$

Daher gilt für die Bernoullizahlen

$$\frac{B_n}{n!} = -(2\pi i)^{-n} - (-2\pi i)^{-n} + O((4\pi - \varepsilon)^{-n}).$$

Insbesondere erhält man für  $n = 2m$

$$\frac{B_{2m}}{(2m)!} = 2(-1)^{m+1} (2\pi)^{-2m} + O((4\pi - \varepsilon)^{-2m}).$$

### 5.3. Algebraische Singularitäten.

In vielen Anwendungsfällen treten neben Polstellen auch algebraische Singularitäten auf. Etwa bei der Abzählung ebener Wurzelbäume:

$$p(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2}.$$

Offensichtlich kann man in Analogie zum vorigen Abschnitt versuchen, eine Singularität, die sich wie eine Wurzel bzw. wie ein Ausdruck der Form

$$(1 - x/R)^\alpha$$

verhält, mit der binomischen Reihe

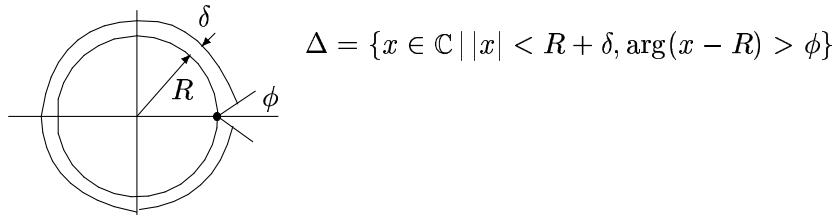
$$(1 - x/R)^\alpha = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \binom{\alpha}{n} R^{-n} x^n$$

zu vergleichen und erwarten, daß sich die Koeffizienten wie

$$\binom{\alpha}{n} R^{-n} \sim \frac{n^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)} R^{-n}$$

verhalten. Die einzige Schwierigkeit liegt darin, daß es im allgemeinen nicht gelingen wird, durch Differenzbildung die Singularität wegzuheben, wie es bei den Polstellen gelungen ist. Trotzdem hat diese Strategie Erfolg und man erhält durch Anwendung der Cauchyschen Integralformel und geeigneter Abschätzungen den folgenden allgemeinen Satz.

SATZ 3.40. Sei  $\Delta$  ein Gebiet in der komplexen Ebene der Form



$$\Delta = \{x \in \mathbb{C} \mid |x| < R + \delta, \arg(x - R) > \phi\}$$

für  $R > 0$ ,  $\delta > 0$  und  $0 < \phi < \pi/2$ . Weiters sei  $a(x)$  eine in  $\Delta$  analytische Funktion, sodaß sich  $a(x)$  für  $x \rightarrow R$  ( $x \in \Delta$ ) wie

$$a(x) \sim A(1 - x/R)^\alpha \quad (x \rightarrow R, x \in \Delta)$$

für ein  $\alpha \notin \mathbb{N}$  verhält. Dann gilt für die Koeffizienten  $a_n$  der Potenzreihenentwicklung von  $a(x)$  (um die Stelle  $x_0 = 0$ )

$$a_n \sim A \frac{n^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)} R^{-n} \quad (n \rightarrow \infty).$$

BEISPIEL 3.41. Die Anzahlen  $p_n$  der ebenen Wurzelbäume sind asymptotisch durch

$$p_n \sim \frac{4^n n^{-3/2}}{4\sqrt{\pi}} \quad (n \rightarrow \infty)$$

gegeben.

# Kombinatorische Probleme auf Halbordnungen

## 1. Halbordnungen

### 1.1. Grundlegende Begriffe.

DEFINITION 4.1. Eine binäre Relation  $(P, \leq)$  (auf einer Menge  $P$ ) heißt **Halbordnung** oder **partielle Ordnung**, wenn folgende drei Eigenschaften erfüllt sind:

1.  $\forall x \in P : x \leq x$  (**Reflexivität**),
2.  $\forall x, y \in P : (x \leq y \wedge y \leq x) \implies x = y$  (**Antisymmetrie<sup>1</sup>** oder **Identität**),
3.  $\forall x, y, z \in P : (x \leq y \wedge y \leq z) \implies x \leq z$  (**Transitivität**).

Eine Halbordnung  $(P, \leq)$  heißt **Totalordnung** oder **lineare Ordnung**, wenn für je zwei Elemente  $x, y \in P$  entweder  $x \leq y$  oder  $y \leq x$  gilt, d.h. je zwei Elemente sind vergleichbar.

Man schreibt auch  $x < y$ , wenn  $x \leq y$  und  $x \neq y$ . Weitere abgeleitete Notationen sind  $x \geq y$  für  $y \leq x$  und  $x > y$  für  $y < x$ . Außerdem soll  $x < \cdot y$  bedeuten, daß  $x < y$  und es kein  $z$  mit  $x < z$  und  $z < y$  gibt.

BEISPIEL 4.2.  $(\mathbb{N}, \leq)$  und  $(\mathbb{R}, \leq)$  sind Totalordnungen.

BEISPIEL 4.3.  $(\mathbb{N}^+, |)$  ist eine Halbordnung, aber keine Totalordnung. ( $m|n$  bedeutet hier:  $m$  teilt  $n$ , d.h. es gibt ein  $k \in \mathbb{N}^+$  mit  $n = km$ .)

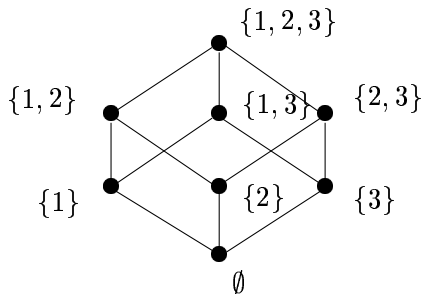
BEISPIEL 4.4.  $(\mathbf{P}(M), \subseteq)$  ist eine Halbordnung, aber für  $|M| > 1$  keine Totalordnung. ( $\mathbf{P}(M)$  bezeichnet die Potenzmenge der Menge  $M$ .)

Wie jede binäre Relation kann man natürlich auch Halbordnungen durch einen Graphen darstellen, indem man die Elemente als Knoten interpretiert und zwischen zwei *Knoten*  $x, y$  eine *gerichtete Kante* zeichnet, wenn  $x$  mit  $y$  in Relation steht. Viele der darzustellenden Kanten sind allerdings redundant, sie lassen sich aus den definierenden Eigenschaften leicht wieder rekonstruieren. Führt man die folgenden drei Schritte durch, so erhält man aus dem Graphen einer (endlichen) Halbordnung  $(P, \leq)$  das **Hassediagramm** von  $(P, \leq)$ :

- Weglassen aller Schlingen.
- Weglassen aller Kanten, die sich aufgrund der Transitivitätsbedingung rekonstruieren lassen, d.h. ist  $x < \cdot y$ , so bleibt die Kante von  $x$  nach  $y$  erhalten, allen anderen Kanten werden *gestrichen*. Mit anderen Worten: nur die *unmittelbaren Nachfolger* von  $x$  werden von  $x$  mit einer Kante verbunden.
- Weglassen aller Orientierungen. Wegen der Antisymmetrie kann für  $x \neq y$  entweder  $x \leq y$  oder  $y \leq x$  gelten aber nie beides zugleich. Zur Übersicht zeichnet man bei  $x \leq y$  ( $x \neq y$ )  $y$  oberhalb von  $x$  und kann die Orientierung der Kante weglassen.

<sup>1</sup>In der Literatur wird üblicherweise der Terminus *Antisymmetrie* verwendet. Die genannte Eigenschaft ist aber nicht das Gegenteil der *Symmetrie*.

BEISPIEL 4.5. Das Hassediagramm der Relation  $(\mathbf{P}(\{1, 2, 3\}), \subseteq)$  (siehe Beispiel 4.4) hat die folgende Gestalt:



In der folgenden Definition sind weitere Begriffe für Halbordnungen zusammengestellt.

DEFINITION 4.6. Sei  $(P, \leq)$  eine Halbordnung.

- (i)  $x, y \in P$  heißen **vergleichbar**, wenn  $x \leq y$  oder  $y \leq x$  gilt.
- (ii)  $x, y \in P$  heißen **unvergleichbar**, wenn weder  $x \leq y$  noch  $y \leq x$  gilt.
- (iii) Eine Teilmenge  $C \subseteq P$  heißt **Kette** von  $P$ , wenn je zwei Elemente aus  $T$  vergleichbar sind.  $((C, \leq)$  ist dann übrigens eine Totalordnung.)  
Die **Länge einer Kette** ist  $|C| - 1$ .
- (iv) Eine Teilmenge  $A \subseteq P$  heißt **Antikette** von  $P$ , wenn je zwei Elemente aus  $A$  unvergleichbar sind.
- (v) Eine Element  $m \in P$  heißt **maximales Element** von  $P$ , wenn aus  $x \geq m$  die Gleichheit  $x = m$  folgt.
- (vi) Eine Element  $m \in P$  heißt **minimales Element** von  $P$ , wenn aus  $x \leq m$  die Gleichheit  $x = m$  folgt.
- (vii) Gibt es genau ein maximales Element in  $P$ , so heißt dieses Element **1-Element**.
- (viii) Gibt es genau ein minimales Element in  $P$ , so heißt dieses Element **0-Element**.
- (ix) Für  $x, y \in P$  mit  $x \leq y$  heißt die Menge  $[x, y] := \{z \in P \mid x \leq z \wedge z \leq y\}$  das **Intervall** von  $x$  nach  $y$ .
- (x)  $(P, \leq)$  heißt **lokalendlich**, wenn für alle  $x, y \in P$  (mit  $x \leq y$ ) das Intervall  $[x, y]$  endlich ist.
- (xi)  $(P, \leq)$  erfüllt die **Jordan-Dedekind-Kettenbedingung** (J-D-Bed.), wenn für alle  $x, y \in P$  mit  $x \leq y$  alle (bez.  $\leq$ ) maximalen Ketten von  $x$  nach  $y$  (d.h. alle größtmöglichen Ketten in  $([x, y], \leq)$ ) endlich und gleichlang sind.

BEISPIEL 4.7. In  $(\mathbb{N}^+, |)$  bilden die Zahlen  $\{2^k \mid k \geq 0\}$  eine Kette und die Primzahlen  $\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$  eine Antikette. 1 ist 0-Element,  $(\mathbb{N}^+, |)$  ist lokalendlich und erfüllt die J-D-Bed.

Von besonderem Interesse sind Halbordnungen mit 0-Element, die die J-D-Bed. erfüllen.

DEFINITION 4.8. Sei  $(P, \leq)$  eine lokalendliche Halbordnung mit 0-Element, die die J-D-Bed. erfüllt. Der Rang  $r(x)$  (für  $x \in P$ ) ist die Länge einer maximalen Kette von 0 nach  $x$ .

Die **Rangzahlen**  $N(k)$  sind durch

$$N(k) = |\{x \in P \mid r(x) = k\}|$$

definiert.

Die erste kombinatorische Aufgabe ist es, in einer Halbordnung mit 0-Element, die die J-D-Bed. erfüllt, die Rangzahlen zu bestimmen.

BEISPIEL 4.9. Die Halbordnung  $(\mathbb{N}, \leq)$  hat als 0-Element die Zahl 0, und der Rang einer natürlichen Zahl  $n$  ist  $r(n) = n$ . Die Rangzahlen der Halbordnung  $(\mathbb{N}, \leq)$  sind alle  $N(k) = 1$ .

BEISPIEL 4.10. Die Halbordnung  $(\mathbf{P}(M), \subseteq)$  hat als 0-Element die leere Menge  $\emptyset$ , und der Rang einer endlichen Teilmenge  $A \subseteq M$  ist die Mächtigkeit  $r(A) = |A|$ . Die Rangzahlen der Halbordnung  $(\mathbf{P}(M), \subseteq)$  bei einer endlichen Menge  $M$  sind

$$N(k) = \binom{|M|}{k}.$$

BEISPIEL 4.11. Sei  $GF(q)$  ein endlicher Körper mit  $q$  Elementen und  $V = GF(q)^n$  der  $n$ -dimensionale Vektorraum über  $GF(q)$ . Es sei nun  $P$  die Menge aller (linearer) Teilräume von  $V$ . Dann ist  $(P, \subseteq)$  eine Halbordnung mit 0-Element, die die J-D-Bed. erfüllt. der triviale 0-dimensionale Unterraum  $\{\mathbf{0}\}$  ist 0-Element und der Rang eines Unterraums  $U$  von  $V$  ist die Dimension  $r(U) = \dim(U)$  über  $GF(q)$ . Die Rangzahlen sind daher die  $q$ -**Binomialkoeffizienten**

$$N(k) = \binom{n}{k}_q := \frac{(n)_q!}{(k)_q!(n-k)_q!},$$

wobei

$$(n)_q! := \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot \frac{q^{n-1} - 1}{q - 1} \cdots \frac{q^2 - 1}{q - 1} \cdot \frac{q - 1}{q - 1}$$

die  $q$ -**Fakultät** von  $n$  bezeichnet.

## 1.2. Satz von Dilworth.

SATZ 4.12. Sei  $(P, \leq)$  eine endliche Halbordnung. Dann ist die maximale Größe einer Antikette gleich der minimalen Anzahl  $k$  von paarweise disjunkten Ketten  $C_1, C_2, \dots, C_k$  (in  $P$ ) mit  $P = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_k$ .

Eine wichtige Folgerung aus dem Satz von Dilworth ist der sogenannte **Heiratssatz**.

SATZ 4.13. Es seien  $D$  und  $H$  zwei endliche disjunkte Mengen. Weiters sei jedem  $d \in D$  eine Teilmenge  $\Gamma(d) \subseteq H$  zugeordnet.

Dann gibt es genau dann eine injektive Funktion  $\varphi : D \rightarrow H$  mit der Bedingung  $\varphi(d) \in \Gamma(d)$  (für alle  $d \in D$ ), wenn für alle Teilmengen  $U \subseteq D$

$$\left| \bigcup_{d \in U} \Gamma(d) \right| \geq |U| \tag{13}$$

gilt.

Dieser Satz kann folgendermaßen interpretiert werden:  $D$  sei eine Menge von Damen und  $H$  eine Menge von Herren. Für eine Dame  $d \in D$  sei  $\Gamma(d)$  die Menge von Herren, die  $d$  bekannt sind. Eine *zulässige Heirat* ist nun eine injektive Funktion  $\varphi : D \rightarrow H$ , die respektiert, daß jede Dame  $d \in D$  einen ihr vorher schon bekannten Herren heiratet, d.h.  $\varphi(d) \in \Gamma(d)$ . Der Heiratssatz besagt nun, daß genau dann eine zulässige Heirat möglich ist, wenn jede Gruppe  $U$  von Damen insgesamt wenigstens so viele Herren kennen wie groß ihre Anzahl ist, also (13).

## 2. Arithmetische Funktionen

### 2.1. Grundlegende Eigenschaften.

DEFINITION 4.14. Sei  $(P, \leq)$  eine lokalendliche Halbordnung mit 0-Element. Eine Funktion  $f : P \times P \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **arithmetische Funktion**, wenn für alle  $x, y \in P$  mit  $x \not\leq y$  der Funktionswert  $f(x, y) = 0$  ist.

Sind  $f, g : P \times P \rightarrow \mathbb{R}$  zwei arithmetische Funktionen, so wird durch

$$(f + g)(x, y) := f(x, y) + g(x, y)$$

die **Summe**  $f + g$  und durch

$$(f * g)(x, y) := \sum_{z \in [x, y]} f(x, z)g(z, y)$$

die **Faltung**  $f * g$  definiert.

Eine arithmetische Funktion  $f : P \times P \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **eigentlich**, wenn für alle  $x \in P$

$$f(x, x) \neq 0$$

gilt.

Die algebraischen Eigenschaften der arithmetischen Funktionen sind im folgenden Satz zusammengefaßt.

SATZ 4.15. Sei  $(P, \leq)$  eine lokalendliche Halbordnung mit 0-Element. Dann bilden die arithmetischen Funktionen auf  $P$  mit der Summe  $+$  und der Faltung  $*$  einen (nicht unbedingt kommutativen) Ring mit Einselement.

Das neutrale Element der Faltung ist die Funktion  $\delta : P \times P \rightarrow \mathbb{R}$  (Kronecker- $\delta$ ):

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{für } x = y, \\ 0 & \text{für } x \neq y. \end{cases}$$

Die bezüglich der Faltung invertierbaren Funktionen sind genau die eigentlichen arithmetischen Funktionen.

### 2.2. Möbiusinversion.

DEFINITION 4.16. Sei  $(P, \leq)$  eine lokalendliche Halbordnung mit 0-Element. Die **Zetafunktion**  $\zeta : P \times P \rightarrow \mathbb{R}$  ist durch

$$\zeta(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \leq y, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

definiert. (Sie kann auch als charakteristische Funktion der Halbordnung gesehen werden.) Sie ist invertierbar bezüglich der Faltung. Die zu  $\zeta$  inverse Funktion heißt **Möbiusfunktion**  $\mu : P \times P \rightarrow \mathbb{R}$ .

Die wichtigste Anwendung der Möbiusfunktion ist die folgende Umkehrformel.

SATZ 4.17. Sei  $(P, \leq)$  eine lokalendliche Halbordnung mit 0-Element und  $\mu : P \times P \rightarrow \mathbb{R}$  die dazugehörige Möbiusfunktion. Für eine Funktion  $f : P \rightarrow \mathbb{R}$  sei die (Summen-) Funktion  $S_f : P \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$S_f(x) := \sum_{z \in [0, x]} f(z)$$



gegeben. Dann kann  $f$  aus den Werten von  $S_f$  mittels der Formel

$$f(x) = \sum_{z \in [0, x]} S_f(z) \mu(z, x)$$

wiedergewonnen werden.

BEISPIEL 4.18. Die Möbiusfunktion der Halbordnung  $(\mathbb{N}, \leq)$  ist durch

$$\mu(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{für } y = x, \\ -1 & \text{für } y = x + 1, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben. Daher folgt aus

$$S_f(x) = \sum_{z=0}^x f(z)$$

die Darstellung

$$f(x) = \sum_{z=0}^x S_f(z) \mu(z, x) = S_f(x) - S_f(x-1).$$

Das schwierigste Problem in diesem Zusammenhang ist es oft, die Möbiusfunktion explizit zu bestimmen. In vielen Fällen kann man sich folgende Eigenschaft zunutze machen.

SATZ 4.19. *Es seien  $(P_1, \leq_1)$ ,  $(P_2, \leq_2)$  zwei lokalendliche Halbordnungen mit 0-Element. Definiert man auf  $P = P_1 \times P_2$  die Relation*

$$(x_1, x_2) \leq (y_1, y_2) : \iff (x_1 \leq_1 y_1) \wedge (x_2 \leq_2 y_2),$$

*so ist  $(P, \leq)$  wieder eine lokalendliche Halbordnung mit 0-Element, die Produkthalbordnung, und die Möbiusfunktion  $\mu : P \times P \rightarrow \mathbb{R}$  berechnet sich aus den Möbiusfunktionen  $\mu_1 : P_1 \times P_1 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mu_2 : P_2 \times P_2 \rightarrow \mathbb{R}$  durch*

$$\mu((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \mu_1(x_1, y_1) \cdot \mu_2(x_2, y_2).$$

BEISPIEL 4.20. Sei  $M$  eine endliche Menge mit  $|M| = n$  Elementen. Dann ist die Halbordnung  $(\mathbf{P}(M), \subseteq)$  isomorph zur Halbordnung

$$\prod_{i=1}^n (\{0, 1\}, \leq),$$

und hat daher dieselbe Möbiusfunktion (wenn man die Elemente entsprechend identifiziert.) Dabei entspricht  $(0, 0, \dots, 0)$  der leeren Menge  $\emptyset$  und  $(1, 1, \dots, 1)$  der Menge  $M$ . Die Möbiusfunktion  $\mu(\emptyset, M)$  ist daher durch

$$\mu(\emptyset, M) = \prod_{i=1}^n \mu_{\leq}(0, 1) = (-1)^n = (-1)^{|M|}$$

gegeben. Sind nun  $A, B$  zwei Teilmengen von  $M$  mit  $A \subseteq B$ , dann ist das Intervall  $[A, B]$  isomorph zum Intervall  $[\emptyset, B \setminus A]$  und demnach

$$\mu(A, B) = \mu(\emptyset, B \setminus A) = (-1)^{|B| - |A|}.$$

BEISPIEL 4.21. Sei  $n$  eine positive natürliche Zahl mit Primfaktorenzerlegung

$$n = \prod_{i=1}^r p_i^{e_i}.$$

Dann ist die Halbordnung  $([1, n], |)$  (wobei natürlich  $[1, n]$  in diesem Zusammenhang die Menge der Teiler  $[1, n] = \{d \in \mathbb{N}^+ \mid d|n\}$  bezeichnet) isomorph zur Halbordnung

$$\prod_{i=1}^r (\{0, 1, 2, \dots, e_i\}, \leq).$$

Daher bestimmt sich die Möbiusfunktion  $\mu(1, n)$  durch

$$\mu(1, n) = \prod_{i=1}^r \mu_{\leq}(0, e_i).$$

Aus Beispiel 4.18 erhält man

$$\mu_{\leq}(0, e) = \begin{cases} 1 & \text{für } e = 0, \\ -1 & \text{für } e = 1, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

woraus man sofort

$$\mu(1, n) = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 1, \\ (-1)^r & \text{für } n = p_1 p_2 \cdots p_r, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ablesen kann. Schließlich ist für zwei natürliche Zahlen  $m, n$  mit  $m|n$  das Intervall  $[m, n]$  zu  $[1, n/m]$  isomorph und daher

$$\mu(m, n) = \mu(1, n/m).$$

### 3. Inklusions-Exklusions-Prinzip

Offensichtlich gilt für zwei endliche Mengen  $A, B$

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Verallgemeinerungen dieser Formel für mehr als zwei Mengen lassen sich natürlich induktiv gewinnen, es soll aber hier gezeigt werden, wie man die Möbiusinversion auf ein Problem dieser Art anwenden kann.

Es seien also  $A_1, A_2, \dots, A_q$  endliche Mengen (die alle Teilmengen einer entsprechend gewählten endlichen *Grundmenge*  $M$  sind). Es sei  $Q = \{1, 2, \dots, q\}$  die Menge der Indizes und  $(\mathbf{P}(Q), \supseteq)$  die *inverse* Halbordnung der Teilmengen von  $Q$  (z.B. ist  $Q$  jetzt minimales Element). Für eine Teilmenge  $I \subseteq Q$  sei  $f(I)$  durch

$$f(I) = \left| \bigcap_{i \in I} A_i \cap \bigcap_{j \in Q \setminus I} (M \setminus A_j) \right|.$$

$f(I)$  zählt also die Anzahl der Elemente  $x \in M$ , die für alle  $i \in I$  in  $A_i$  enthalten sind, aber in keinem anderen  $A_j$ ,  $j \in Q \setminus I$ . Daraus ergibt sich direkt

$$S_f(I) = \sum_{I \subseteq J \subseteq Q} f(J) = \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|.$$

Aus der Möbiusinversion ergibt sich daher

$$f(I) = \sum_{I \subseteq J \subseteq Q} (-1)^{|J| - |I|} \left| \bigcap_{j \in J} A_j \right|.$$

Durch Spezialisierung ergibt sich der folgende Satz.

SATZ 4.22. Es seien also  $A_1, A_2, \dots, A_q$  endliche Mengen, die alle Teilmengen einer endlichen Menge  $M$  sind, und es bezeichne  $Q = \{1, 2, \dots, q\}$  die Menge der Indizes. Dann gilt für die Anzahl  $b_p$ ,  $0 \leq p \leq q$ , der Elemente aus  $M$ , die genau in  $p$  der Mengen  $A_1, A_2, \dots, A_q$  enthalten sind,

$$b_p = \sum_{I \subseteq Q} (-1)^{p-|I|} \binom{|I|}{p} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|.$$

Insbesondere erhält man für  $p = 0$

$$\left| M \setminus \bigcup_{j=1}^q A_j \right| = \sum_{I \subseteq Q} (-1)^{|I|} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|$$

bzw.

$$\left| \bigcup_{j=1}^q A_j \right| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq Q} (-1)^{|I|+1} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|,$$

was natürlich eine Verallgemeinerung der obigen Formel

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

darstellt. Dieses allgemeine Prinzip heißt **Inklusions-Exklusions-Prinzip**.

BEISPIEL 4.23. Die Eulersche  $\varphi$ -Funktion ist durch

$$\varphi(n) := |\{k \leq n \mid \text{ggT}(k, n) = 1\}|$$

definiert. Es sei nun  $n = p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r}$  die Primfaktorenzerlegung von  $n$  (mit paarweise verschiedenen Primzahlen  $p_i \in \mathbb{P}$ ). Es sei nun

$$A_i := \{k \leq n \mid p_i \mid k\}.$$

Dann gilt für alle  $I \subseteq \{1, 2, \dots, r\}$

$$\left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| = \frac{n}{\prod_{i \in I} p_i}$$

und daher

$$\begin{aligned} \varphi(n) &= \left| \{1, 2, \dots, n\} \setminus \bigcup_{i=1}^r A_i \right| \\ &= \sum_{I \subseteq \{1, 2, \dots, r\}} (-1)^{|I|} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| \\ &= \sum_{I \subseteq \{1, 2, \dots, r\}} (-1)^{|I|} \frac{n}{\prod_{i \in I} p_i} \\ &= n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right). \end{aligned}$$

BEISPIEL 4.24. Es bezeichne  $D_n$  die Anzahl der fixpunktfreien Permutationen  $\pi \in S_n$ , d.h.

$$D_n = \left| S_n \setminus \bigcup_{i=1}^n A_i \right|,$$

wobei  $A_i$  für  $1 \leq i \leq n$  die Menge

$$A_i := \{\pi \in S_n \mid \pi(i) = i\}$$

bezeichnet. Mit Hilfe der Beziehung

$$\left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| = (n - |I|)!$$

erhält man

$$\begin{aligned} D_n &= \left| S_n \setminus \bigcup_{i=1}^n A_i \right| \\ &= \sum_{I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}} (-1)^{|I|} (n - |I|)! \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (n - k)! \\ &= n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}. \end{aligned}$$

Offensichtlich gilt asymptotisch

$$D_n \sim \frac{n!}{e} \quad (n \rightarrow \infty).$$

#### 4. Teilbarkeitsrelation

##### 4.1. Klassische arithmetische Funktionen.

DEFINITION 4.25. Eine Funktion  $f : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{C}$  heißt (klassische) **arithmetische Funktion**<sup>2</sup>.

Die **Summe**  $f + g$  zweier arithmetischer Funktionen  $f, g : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{C}$  ist durch

$$(f + g)(n) := f(n) + g(n)$$

und die **Faltung**  $f * g$  durch

$$(f * g)(n) := \sum_{d|n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right)$$

definiert.

Eine klassische arithmetische Funktion  $f : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{C}$  entspricht durch die Festsetzung

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \not| y, \\ f\left(\frac{y}{x}\right) & \text{für } x | y, \end{cases}$$

einer arithmetischen Funktion  $\tilde{f} : \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{C}$  auf der Halbordnung  $(\mathbb{N}^+, |)$ . Wegen

$$(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} \tilde{f}(1, d)\tilde{g}(d, n) = (\tilde{f} * \tilde{g})(1, n).$$

ist die allgemeine Definition der Faltung mit der *klassischen* Definition verträglich.

SATZ 4.26. Die klassischen arithmetischen Funktionen bilden mit der Summe  $+$  und der Faltung  $*$  einen Integritätsbereich Ring (d.h. einen kommutativen Ring mit Einselement und ohne Nullteiler). Das neutrale Element  $\delta : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{C}$  ist gegeben durch

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 1, \\ 0 & \text{für } n > 1. \end{cases}$$

<sup>2</sup>Es ist üblich, in diesem Fall als Wertebereich die Menge der komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$  anstelle von  $\mathbb{R}$  zu verwenden.

Die bezüglich der Faltung invertierbaren arithmetischen Funktionen  $f : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{C}$  sind genau jene mit  $f(1) \neq 0$ .

Außerdem entsprechen einander auch die allgemeine und die *klassische* Möbiusinversion.

DEFINITION 4.27. Die (*klassische*) **Möbiusfunktion**  $\mu : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{C}$  ist durch

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 1, \\ (-1)^r & \text{für } n = p_1 p_2 \cdots p_r \\ & \text{mit verschiedenen Primzahlen } p_1, p_2, \dots, p_r, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

definiert.

SATZ 4.28. Sei  $f : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{C}$  eine arithmetische Funktion. Weiters sei die (Summen-) Funktion  $S_f : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{C}$  durch

$$S_f(n) := \sum_{d|n} f(d)$$

gegeben. Dann kann  $f$  aus den Werten von  $S_f$  mittels der Formel

$$f(n) = \sum_{d|n} S_f(d) \mu\left(\frac{n}{d}\right)$$

wiedergewonnen werden.

BEISPIEL 4.29. Es gilt

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 1, \\ 0 & \text{für } n > 1. \end{cases}$$

BEISPIEL 4.30. Die Eulersche  $\varphi$ -Funktion erfüllt die Beziehung

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n.$$

Sie kann daher durch

$$\varphi(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d} = n \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d}$$

berechnet werden.

## 4.2. Multiplikative arithmetische Funktionen.

DEFINITION 4.31. Eine (*klassische*) arithmetische Funktion  $f : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{C}$  heißt **multiplikativ**, wenn für alle  $m, n \in \mathbb{N}^+$ , die teilerfremd sind (also  $\text{ggT}(m, n) = 1$ )

$$f(m \cdot n) = f(m) \cdot f(n)$$

gilt.

Eine (*klassische*) arithmetische Funktion  $f : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{C}$  heißt **vollständig multiplikativ**, wenn für alle  $m, n \in \mathbb{N}^+$

$$f(m \cdot n) = f(m) \cdot f(n)$$

gilt.

Die wichtigsten Eigenschaften dieser multiplikativen Funktionen sind im folgenden Satz zusammengestellt.

SATZ 4.32. *Es gelten die folgenden Eigenschaften:*

1. Ist  $f : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{C}$  multiplikativ und  $n = p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r}$  die Primfaktorenzerlegung von  $n \in \mathbb{N}^+$ , dann gilt

$$f(n) = f(p_1^{e_1}) \cdots f(p_r^{e_r}),$$

*d.h.  $f$  ist durch Vorgabe von  $f(1) = 1$  und der Werte für Primzahlpotenzen bestimmt.*

2. Sind  $f : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{C}$  und  $g : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{C}$  zwei multiplikative Funktionen, dann ist auch die Faltung  $f * g : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{C}$  multiplikativ.
3. Ist  $f : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{C}$  multiplikativ mit  $f(1) = 1$ , dann ist auch die bezüglich der Faltung inverse Funktion  $f^{-1} : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{C}$  multiplikativ.

BEISPIEL 4.33. Die Möbiusfunktion  $\mu(n)$ , die Anzahl  $d(n)$  der Teiler von  $n$

$$d(n) := \sum_{d|n} 1$$

und die Summe  $\sigma(n)$  der Teiler von  $n$

$$\sigma(n) := \sum_{d|n} d$$

sind multiplikative Funktionen.

Vollständig multiplikative Funktionen haben nicht die Eigenschaft, daß ihre Faltung bzw. ihr Inverses wieder vollständig multiplikativ sind. Trotzdem sind sie von besonderem Interesse.

SATZ 4.34. *Es gelten die folgenden Eigenschaften.*

1. Ist  $f : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f \not\equiv 0$ , vollständig multiplikativ und  $n = p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r}$  die Primfaktorenzerlegung von  $n \in \mathbb{N}^+$ , dann gilt  $f(1) = 1$  und

$$f(n) = f(p_1)^{e_1} \cdots f(p_r)^{e_r},$$

*d.h.  $f$  ist durch Vorgabe von  $f(1) = 1$  und der Werte für Primzahlen bestimmt.*

2. Ist  $f : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f \not\equiv 0$ , vollständig multiplikativ, so ist die bezüglich der Faltung inverse Funktion durch

$$f^{-1}(n) = \mu(n)f(n)$$

*gegeben.*

BEISPIEL 4.35. Die Funktion  $N_\alpha(n) = n^\alpha$  ist vollständig multiplikativ, ihr Inverses daher durch  $N_\alpha^{-1}(n) = \mu(n)n^\alpha$  gegeben.

BEISPIEL 4.36. Die Funktion

$$\lambda(n) = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 1, \\ (-1)^{e_1 + \cdots + e_r} & \text{für } n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_r^{e_r} \\ & \text{mit verschiedenen Primzahlen } p_1, p_2, \dots, p_r, \end{cases}$$

ist vollständig multiplikativ. Ihr Inverses bestimmt sich daher zu

$$\lambda^{-1}(n) = \mu(n)\lambda(n) = |\mu(n)|.$$

### 4.3. Dirichletsche Reihen.

DEFINITION 4.37. Sei  $f : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{C}$  eine (klassische) arithmetische Funktion. Dann ist die Reihe

$$F(s) := \sum_{n \geq 1} \frac{f(n)}{n^s}$$

die zu  $f$  gehörige **Dirichletsche Reihe**.

Bei Konvergenzüberlegungen betrachtet man üblicherweise nicht nur  $s \in \mathbb{R}$ , sondern  $s \in \mathbb{C}$ . Es stellt sich heraus, daß aus der Konvergenz von  $F(s)$  an einer Stelle  $s_0 \in \mathbb{C}$  auch die Konvergenz für alle  $s \in \mathbb{C}$  mit  $\Re(s) > \Re(s_0)$  folgt. Es gibt daher für jede Dirichletsche Reihe  $F(s)$  eine sogenannte **Konvergenzabszisse**  $\sigma_c \in [-\infty, \infty]$  mit der Eigenschaft, daß  $F(s)$  für alle  $s \in \mathbb{C}$  mit  $\Re(s) > \sigma_c$  konvergiert und für alle  $s \in \mathbb{C}$  mit  $\Re(s) < \sigma_c$  divergiert. Beispielsweise hat die **Riemannsche Zetafunktion**

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}$$

die Konvergenzabszisse  $\sigma_c = 1$ . Es stellt sich auch heraus, daß eine Dirichletsche Reihe  $F(s)$  für alle  $s \in \mathbb{C}$  mit  $\Re(s) > \sigma_c + 1$  absolut konvergiert. Die Reihe

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$$

hat Konvergenzabszisse  $\sigma_c = 0$ , sie konvergiert aber für alle  $s \in \mathbb{C}$  mit  $\Re(s) > 1$  absolut.

Natürlich kann (und soll) man Dirichletsche Reihen auch als formale Reihen auffassen. In jedem Fall gilt aber der folgende Satz.

SATZ 4.38. Seien  $f, g : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{C}$  zwei (klassische) arithmetische Funktionen mit dazugehörigen Dirichletsche Reihen  $F(s)$  und  $G(s)$ . Dann ist die Dirichletsche Reihe der Faltung  $h = f * g$  gerade das Produkt  $H(s) = F(s)G(s)$ .

Aus dieser Eigenschaft lassen sich viele Dirichletsche Reihen mit Hilfe der Riemannschen Zetafunktion darstellen.

SATZ 4.39. Die Dirichletschen Reihen der Funktionen  $N_\alpha(n) = n^\alpha$ ,  $\mu(n)$ ,  $d(n)$ ,  $\sigma(n)$ ,  $\varphi(n)$ ,  $\lambda(n)$  sind durch

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} \frac{N_\alpha(n)}{n^s} &= \zeta(s - \alpha), \\ \sum_{n \geq 1} \frac{\mu(n)}{n^s} &= \frac{1}{\zeta(s)}, \\ \sum_{n \geq 1} \frac{d(n)}{n^s} &= \zeta(s)^2, \\ \sum_{n \geq 1} \frac{\sigma(n)}{n^s} &= \zeta(s)\zeta(s-1), \\ \sum_{n \geq 1} \frac{\varphi(n)}{n^s} &= \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}, \\ \sum_{n \geq 1} \frac{\lambda(n)}{n^s} &= \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)} \end{aligned}$$

gegeben.

Diricheltschen Reihen multiplikativer und vollständig multiplikativer Funktionen können wir auch durch ein unendliches Produkt, durch ein sogenanntes **Eulerprodukt** darstellen (im formalen Sinn bzw. im Fall absoluter Konvergenz).

SATZ 4.40. Für eine multiplikative Funktion  $f : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{C}$  gilt

$$\sum_{n \geq 1} \frac{f(n)}{n^s} = \prod_{p \in \mathbb{P}} \left( 1 + \frac{f(p)}{p^s} + \frac{f(p^2)}{p^{2s}} + \dots \right).$$

Für vollständig multiplikative Funktionen  $f : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{C}$  gilt sogar

$$\sum_{n \geq 1} \frac{f(n)}{n^s} = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - f(p)p^{-s}}.$$

Beispielsweise gilt für  $s \in \mathbb{C}$  mit  $\Re(s) > 1$

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}}.$$



## Pólyasche Abzähltheorie

### 1. Lemma von Burnside

Gesucht sei die Anzahl der Möglichkeiten, die sechs Seitenflächen eines Würfels zu färben, so daß vier Flächen grün und zwei rot gefärbt werden. Dabei soll zwischen zwei Färbungen nicht unterschieden werden, wenn sie durch Drehung des Würfels im Raum auseinander hervorgehen.

Eine Problemstellung dieser Art kann in folgender Weise formalisiert werden: Es sei  $M$  eine endliche Menge (z.B. alle möglichen Färbungen eines Würfels) und  $\mathfrak{G}$  eine Untergruppe von  $\mathfrak{S}_M$  der Permutationsgruppe der Elemente von  $M$ , d.h.  $\pi \in \mathfrak{G}$  ist eine bijektive Abbildung  $\pi : M \rightarrow M$  (z.B. die durch Drehungen des Würfels induzierten Abbildungen  $M \rightarrow M$ ). Wir nennen zwei Elemente  $f, g \in M$  äquivalent, i.Z.  $f \sim g$ , wenn es ein  $\pi \in \mathfrak{G}$  mit  $\pi(f) = g$  gibt. Offensichtlich ist  $\sim$  eine Äquivalenzrelation auf  $M$ . Es besteht nun die Frage, wie viele Äquivalenzklassen es gibt? (Im oberen Beispiel ist dies gerade die Anzahl der gesuchten Färbungen.)

Die Antwort gibt das **Lemma von Burnside**

**SATZ 5.1.** *Sei  $M$  eine endliche Menge und  $\mathfrak{G}$  eine Untergruppe von  $\mathfrak{S}_M$ . Dann ist die Anzahl der Äquivalenzklassen der Relation  $\sim$  ( $f \sim g \iff \exists \pi \in \mathfrak{G} : g = \pi(f)$ ) durch*

$$|M/\sim| = \frac{1}{|\mathfrak{G}|} \sum_{\pi \in \mathfrak{G}} |\{f \in M \mid \pi(f) = f\}|$$

gegeben. ( $M/\sim$  bezeichnet die Menge der Äquivalenzklassen der Äquivalenzrelation  $\sim$ .)

**BEISPIEL 5.2.** Sei  $M$  (wie oben) die Menge der möglichen Färbungen der sechs Flächen eines Würfels (mit dem Koordinatenursprung als Mittelpunkt), wobei vier Flächen grün und zwei Farben rot gefärbt sind. Weiters sei  $\mathfrak{G}$  die Menge der Abbildungen  $\pi : M \rightarrow M$ , die durch die Drehungen des Raumes induziert werden, die den Würfel auf sich abbilden. Die Anzahl der (durch  $\mathfrak{G}$  induzierten) Äquivalenzklassen ist genau die Anzahl der im wesentlichen verschiedenen Färbungen, d.h. zwei Färbungen werden als gleich angesehen, wenn sie durch Drehung des Würfels ineinander übergehen.)

Um für dieses Beispiel das Lemma von Burnside anwenden zu können, muß man  $\mathfrak{G}$  genau beschreiben und für alle  $\pi \in \mathfrak{G}$  die Anzahl der Fixpunkte  $|\{f \in M \mid \pi(f) = f\}|$  bestimmen. Dazu beachte man, daß Drehungen im Raum (mit Ausnahme der Identität) eine eindeutig bestimmte Drehachse haben. Will man Drehungen des Raumes bestimmen, die einen Würfel auf sich abbilden, so muß die Drehachse eine Symmetrieachse des Würfels sein. Es können daher nur folgende Fälle auftreten.

- a) Die Identität  $id$  ist (natürlich) in  $\mathfrak{G}$ . Alle  $\binom{6}{2} = 15$  Färbungen des Würfels sind Fixpunkte.
- b) Die Drehachse verbindet die Mittelpunkte zweier gegenüberliegender Flächen und man dreht um  $90^\circ$  in die eine oder andere Richtung. Es gibt  $3 \cdot 2 = 6$  Drehungen dieser Art. Die einzige Färbung, die bei so einer Drehung in sich übergeht (also Fixpunkt ist), ist jene, wo die Flächen, die durch die Drehachse geschnitten werden, rot gefärbt sind.

- c) Die Drehachse verbindet wieder die Mittelpunkte zweier gegenüberliegender Flächen und man dreht um  $180^\circ$ . Es gibt drei Drehungen dieser Art, und es gibt jeweils drei Färbungen, die Fixpunkte sind, nämlich jene, wo zwei gegenüberliegende Flächen rot gefärbt sind.
- d) Die Drehachse verbindet die Mittelpunkte zweier gegenüberliegender Kanten, und man dreht um  $180^\circ$ . Es gibt sechs Drehungen dieser Art, und zu jeder gibt es drei Färbungen, die Fixpunkte sind. Färbt man nämlich zwei Flächen, die so eine Kante gemeinsam haben, rot, so hat man einen Fixpunkt. Davon gibt es zwei Möglichkeiten. Die dritte Fixpunkt ist jene Färbung, wo jene (gegenüberliegende) zwei Flächen rot gefärbt werden, die nicht an diese zwei Kanten angrenzen.
- e) Die Drehachse verbindet zwei gegenüberliegende Eckpunkte, und man dreht um  $120^\circ$  in die eine oder andere Richtung. Es gibt  $4 \cdot 2 = 8$  Drehungen dieser Art, aber keine Färbung, die durch so eine Drehung in sich übergeführt wird.

Insgesamt hat die Gruppe  $\mathfrak{G}$

$$|\mathfrak{G}| = 1 + 6 + 3 + 6 + 8 = 24$$

Elemente, und es gibt

$$15 + 6 + 9 + 18 + 0 = 48$$

Fixpunkte. Nach dem Lemma von Burnside gibt es also  $48/24 = 2$  Äquivalenzklassen, also nur 2 (im wesentlichen) verschiedene Färbungen.

## 2. Zyklenzeiger von Permutationsgruppen

### 2.1. Zyklentyp und Zyklenzeiger.

DEFINITION 5.3. Sei  $M$  eine endliche Menge mit  $n$  Elementen und  $\pi \in \mathfrak{S}_M$  eine Permutation der Elemente von  $M$ . Der **Zyklentyp**  $ZT(\pi)$  von  $\pi$  ist durch das Monom

$$ZT(\pi) := x_1^{\lambda_1(\pi)} x_2^{\lambda_2(\pi)} \dots x_n^{\lambda_n(\pi)}$$

gegeben, wobei  $\lambda_j(\pi)$  der Anzahl der Zyklen der Länge  $j$  in der kanonischen Zyklenzerlegung von  $\pi$  bezeichnet.

Sei weiters  $\mathfrak{G}$  eine Untergruppe von  $\mathfrak{S}_M$ . Dann ist der **Zyklenzeiger**  $P_{\mathfrak{G}}(x_1, x_2, \dots, x_n)$  das Polynom

$$P_{\mathfrak{G}}(x_1, x_2, \dots, x_n) := \frac{1}{|\mathfrak{G}|} \sum_{\pi \in \mathfrak{G}} ZT(\pi).$$

### 2.2. Zyklenzeiger wichtiger Gruppen.

SATZ 5.4. Sei  $M$  eine endliche Menge mit  $n$  Elementen und es bezeichne  $\mathfrak{S}_n = \mathfrak{S}_M$  die Menge der Permutationen der Elemente von  $M$ .

1. Die (triviale) Untergruppe  $\mathfrak{E}_n = \{id\}$  von  $\mathfrak{S}_n$  hat den Zyklenzeiger

$$P_{\mathfrak{E}_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^n.$$

2. Die gesamte Gruppe  $\mathfrak{S}_n$  hat den Zyklenzeiger

$$P_{\mathfrak{S}_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{n!} \sum_{k_1+2k_2+\dots+nk_n=n} \frac{n!}{k_1!k_2! \dots k_n! \cdot 1^{k_1} 2^{k_2} \dots n^{k_n}} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}.$$

3. Eine zyklische Untergruppe  $\mathfrak{Z}_n$  von  $\mathfrak{S}_n$  der Ordnung  $n$  (sie wird z.B. von der zyklischen Permutation  $\pi = (12 \cdots n)$  erzeugt) hat den Zyklenzeiger

$$P_{\mathfrak{Z}_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \varphi(d) x_d^{n/d},$$

wobei  $\varphi$  die Eulersche  $\varphi$ -Funktion bezeichnet.

Die Zyklenzeiger der symmetrischen Gruppen  $\mathfrak{S}_n$  können auch durch eine kombinatorische Konstruktion erzeugt werden, nämlich durch

$$\sum_{n \geq 0} P_{\mathfrak{S}_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) t^n = e^{tx_1 + t^2 \frac{x_2}{2} + t^3 \frac{x_3}{3} + \dots}. \quad (14)$$

Die exponentielle erzeugende Funktion  $t^k \frac{x_k}{k}$  zählt die zyklischen Permutationen der Länge  $k$ , die mit (dem Zyklentyp)  $x_k$  markiert werden. Die EEF

$$tx_1 + t^2 \frac{x_2}{2} + t^3 \frac{x_3}{3} + \dots$$

beschreibt daher die zyklischen Permutationen (jeweils versehen mit dem entsprechenden Zyklentyp) und daher

$$e^{tx_1 + t^2 \frac{x_2}{2} + t^3 \frac{x_3}{3} + \dots},$$

die Mengen von Zyklen, also alle Permutationen wieder versehen mit dem richtigen Zyklentyp. Der Koeffizient von  $t^n/n!$  ist daher die Summe aller Zyklentypen der Permutationen von  $n$  Elementen. Daher gilt (14).

Eine für die Anwendungen wichtige Klasse von Gruppen sind die Symmetriegruppen von geometrischen Objekten. Das sind jene Drehungen (und Spiegelungen), die diese Objekte in sich überführen.

**SATZ 5.5.** Die Menge aller Drehungen in der Ebene, die ein regelmäßiges  $n$ -Eck in der Ebene in sich überführen bildet eine zyklische Gruppe der Ordnung  $n$ . Diese induziert eine zyklische Untergruppe der Permutationen auf den  $n$  Eckpunkten.

Die Symmetriegruppe des regelmäßigen  $n$ -Ecks besteht aus den obengenannten  $n$  Drehungen und aus  $n$  Spiegelungen, wobei die Spiegelungsachsen (durch den Ursprung und) durch einen Eckpunkt oder durch den Mittelpunkt einer Seitenkante gehen. Diese Gruppe induziert daher eine Gruppe von Permutationen (der Ordnung  $2n$ ) auf den  $n$  Eckpunkten, die sogenannte **Diedergruppe**  $\mathfrak{D}_n$ , deren Zyklenzeiger für gerade  $n$  durch

$$P_{\mathfrak{D}_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{2} P_{\mathfrak{Z}_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) + \frac{1}{4} x_2^{n/2} + \frac{1}{4} x_1^2 x_2^{(n-2)/2}$$

und für ungerade  $n$  durch

$$P_{\mathfrak{D}_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{2} P_{\mathfrak{Z}_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) + \frac{1}{2} x_1^2 x_2^{(n-1)/2}$$

gegeben ist.

Die Drehsymmetriegruppen für Tetraeder und Würfel haben folgende Gestalt.

**SATZ 5.6.** Es gibt genau 12 Drehungen im Raum, die ein regelmäßiges Tetraeder in sich überführen. Die dadurch induzierte Permutationsgruppe auf den 4 Ecken bzw. auf den 4 Flächen hat den Zyklenzeiger

$$\frac{1}{12} (x_1^4 + 8x_1 x_3 + 3x_2^2),$$

und die entsprechenden Permutationsgruppen auf den 6 Kanten

$$\frac{1}{12}(x_1^6 + 3x_1^2x_2^2 + 8x_3^2).$$

SATZ 5.7. *Es gibt genau 24 Drehungen im Raum, die einen Würfel in sich überführen. Die dadurch indizierte Permutationsgruppe auf den 8 Ecken hat den Zyklenzeiger*

$$\frac{1}{24}(x_1^8 + 6x_4^2 + 3x_2^4 + 6x_2^4 + 8x_1^2x_3^2),$$

die entsprechende Permutationsgruppe auf den 6 Flächen

$$\frac{1}{24}(x_1^6 + 6x_1^2x_4 + 3x_1^2x_2^2 + 6x_2^3 + 8x_3^2)$$

und die auf den 12 Kanten

$$\frac{1}{24}(x_1^{12} + 6x_4^3 + 3x_2^6 + 6x_1^2x_2^5 + 8x_3^4).$$

Man beachte, daß Würfel und Oktaeder zueinander dual sind. Man kann nämlich in einen Würfel ein Oktaeder einschreiben, wobei die Flächenmittelpunkte des Würfels die Eckpunkte des Oktaeders sind. In derselben Weise kann man einem Oktaeder einen Würfel einschreiben. Daraus erkennt man, daß Würfel und Oktaeder dieselben Drehsymmetriegruppen besitzen. Weiters bestehen natürliche Bijektionen zwischen den Flächen des Würfels und den Ecken des Oktaeders, zwischen den Ecken des Würfels und den Flächen des Oktaeders und zwischen den Kanten der beiden Objekte. Die Zyklenzeiger der entsprechenden Permutationsgruppen für das Oktaeder können daher aus dem vorigen Satz entnommen werden, indem man die für Ecken und Flächen gegeneinander austauscht.

In derselben Weise sind Isokaeder und Pentagondodekaeder zueinander dual und das Tetraeder *selbstdual*.

### 3. Satz von Polya

Die Situation des Lemma von Burnside soll nun etwas spezialisiert werden. Es seien  $D, R$  zwei endliche Mengen und  $M = R^D$ , also alle Funktionen  $f : D \rightarrow R$ . (Im oberen Beispiel wäre  $D$  die Menge der Seitenflächen eines Würfels und  $R$  die Menge der Farben grün und rot.) Weiters sei  $\mathfrak{G}$  eine Untergruppe von  $\mathfrak{S}_D$ . Eine Permutation  $\pi \in \mathfrak{G}$  induziert durch die Festlegung

$$(\tilde{\pi}(f))(x) := f(\pi(x))$$

eine Permutation  $\tilde{\pi} \in S_M$ . Offensichtlich ist die dadurch entstehende Menge  $\tilde{\mathfrak{G}}$  eine Untergruppe von  $S_M$  und in natürlicher Weise isomorph zu  $\mathfrak{G}$ .

Wieder heißen zwei Funktionen  $f, g \in M$  äquivalent, i.Z.  $f \sim g$ , wenn es eine Permutation  $\pi \in \mathfrak{G}$  mit  $\tilde{\pi}(f) = g$  gibt.

Jedes Element  $r \in R$  habe ein *Gewicht*  $w(r)$ , d.h. es gibt eine Abbildung  $w : R \rightarrow W$  von  $R$  in eine Menge von Gewichten. (Im obigen Beispiel könnte man etwa  $w(\text{grün}) := g$  und  $w(\text{rot}) := r$  setzen.) Jeder Abbildung  $f \in M = R^D$  wird nun ein *Gewicht*

$$w(f) := \prod_{x \in D} f(x)$$

zugeordnet. (Beispielsweise hat in unserem Beispiel eine für uns interessante Färbung  $f$  das Gewicht  $w(f) = g^4r^2$ .) Streng genommen ist  $w(f)$  ein Element aus dem Polynomring  $\mathbb{R}[W]$ .

LEMMA 5.8. Für  $f, g \in R^D$  gilt

$$f \sim g \implies w(f) = w(g).$$

Demnach kann man auch für eine Klasse  $C \in M/\sim$  das Gewicht

$$w(C) := w(f) \quad \text{für ein } f \in C$$

in natürlicher Weise definieren.

Der **Satz von Pólya** gibt nun eine genaue Auskunft über die *Verteilung* der Gewichte auf die Klassen.

SATZ 5.9. Seien  $R, D$  endliche Mengen,  $\mathfrak{G}$  eine Untergruppe von  $\mathfrak{S}_D$  und  $M = R^D$ . Dann gilt mit den obigen Bezeichnungsweisen

$$\sum_{C \in M/\sim} w(C) = P_{\mathfrak{G}} \left( \sum_{r \in R} w(r), \sum_{r \in R} w(r)^2, \dots, \sum_{r \in R} w(r)^{|D|} \right).$$

KOROLLAR 5.10.

$$|M/\sim| = P_{\mathfrak{G}}(|R|, |R|, \dots, |R|).$$

BEISPIEL 5.11. Sei  $M$  die Menge der möglichen Färbungen der sechs Flächen eines Würfels (mit dem Koordinatenursprung als Mittelpunkt) mit den Farben grün und rot, also  $M = R^D$ , wobei  $D$  die sechs Flächen des Würfels beschreibt und  $R = \{\text{grün, rot}\}$  ist. Weiters sei  $w(\text{grün}) := g$  und  $w(\text{rot}) := r$  und  $\mathfrak{G}$  die Gruppe der Drehungen, die den Würfel auf sich abbilden. Der Zyklenzeiger dieser Gruppe, aufgefaßt als Permutationsgruppe auf den Flächen, ist

$$P_{\mathfrak{G}}(x_1, \dots, x_6) = \frac{1}{24}(x_1^6 + 6x_1^2x_4 + 3x_1^2x_2^2 + 6x_2^3 + 8x_3^2).$$

Nach dem Satz von Pólya ist daher die Anzahl der verschiedenen Färbungen der sechs Flächen, wobei vier Flächen grün und zwei rot gefärbt werden sollen, und zwei Färbungen als gleich gelten, wenn sie durch Drehung des Würfels ineinander übergehen, durch

$$\begin{aligned} & [g^4 r^2] P_{\mathfrak{G}}(g+r, g^2+r^2, g^3+r^3, g^4+r^4, g^5+r^5, g^6+r^6) \\ &= [g^4 r^2] \frac{1}{24} \left( (g+r)^6 + 6(g+r)^2(g^4+r^4) + 3(g+r)^2(g^2+r^2)^2 + 6(g^2+r^2)^3 + 8(g^3+r^3)^2 \right) \\ &= \frac{1}{24} (15 + 6 + 3 \cdot 3 + 6 \cdot 3 + 8 \cdot 0) \\ &= \frac{48}{24} = 2 \end{aligned}$$

gegeben.

Die Anzahl aller möglichen Färbungen mit den zwei Farben grün und rot ist

$$P_{\mathfrak{G}}(2, 2, 2, 2, 2, 2) = \frac{240}{24} = 10.$$

Dabei sind natürlich die Färbungen mit genau einer Farbe auch mitgezählt worden. Es gibt daher  $10 - 2 = 8$  verschiedene Färbungen, wobei beide Farben Verwendung finden.

#### 4. Weitere kombinatorische Konstruktionen

Im Kapitel 3 wurden verschiedene kombinatorische Konstruktionen für unmarkierte und markierte Objekte vorgestellt. Dabei wurde zwar weitgehend, aber nicht vollständig parallel vorgegangen. Beispielsweise gab es bei den unmarkierten Objekten keine Zyklenkonstruktion. Diese Lücke wird nun mit Hilfe des Satzes von Polya geschlossen. Weiters wird die Multimengenkonstruktion noch einmal genauer studiert.

**SATZ 5.12.** *Sei  $A$  eine kombinatorische Struktur unmarkierter Objekte und  $a(x)$  die EF von  $A$ . Betrachtet man nun alle  $k$ -Tupel  $(a_1, a_2, \dots, a_k)$  von Elementen aus  $A$ , wobei zwei  $k$ -Tupel miteinander identifiziert werden, wenn sie durch zyklische Vertauschung ineinander übergehen, so entsteht eine neue kombinatorische Struktur  $C$ , die **Zyklen der Länge  $k$** . Ihre EF ist durch*

$$c(x) = P_{\mathfrak{Z}_k}(a(x), a(x^2), \dots, a(x^k))$$

gegeben.

**SATZ 5.13.** *Sei  $A$  eine kombinatorische Struktur unmarkierter Objekte und  $a(x)$  die EF von  $A$ . Betrachtet man nun alle  $k$ -Tupel  $(a_1, a_2, \dots, a_k)$  von Elementen aus  $A$ , wobei zwei  $k$ -Tupel miteinander identifiziert werden, wenn sie durch Permutation ineinander übergehen, so entsteht eine neue kombinatorische Struktur  $C$ , die **Multimengen der Größe  $k$** . Ihre EF ist durch*

$$c(x) = P_{\mathfrak{S}_k}(a(x), a(x^2), \dots, a(x^k))$$

gegeben.

Man beachte, daß die entsprechenden Konstruktionen für markierte Objekte bereits in Kapitel 3 besprochen wurden. Die EEFFen waren dort  $\hat{c}(x) = \frac{1}{k} \hat{a}(x)^k$  bzw.  $\hat{c}(x) = \frac{1}{k!} \hat{a}(x)^k$ .

Weiters beachte man, daß die Beziehung

$$\sum_{k \geq 0} P_{\mathfrak{S}_k}(a(x), a(x^2), \dots, a(x^k)) = e^{a(x) + \frac{1}{2}a(x)^2 + \frac{1}{3}a(x)^3 + \dots}$$

gelten muß. Dies ist übrigens in Übereinstimmung mit der im zweiten Abschnitt angegebenen Formel

$$\sum_{n \geq 0} P_{\mathfrak{S}_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) t^n = e^{tx_1 + t^2 \frac{x_2}{2} + t^3 \frac{x_3}{3} + \dots},$$

indem man  $t = 1$  und  $x_j = a(x^j)$  setzt.

**BEISPIEL 5.14.** Bei den ebenen Wurzelbäumen  $\mathcal{P}$ , die durch die symbolische Gleichung  $\mathcal{P} = \circ \times \mathcal{P}^*$  beschrieben werden, besteht noch eine eindeutige links-rechts-Reihenfolge der von der Wurzel ausgehenden *Teilbäume*. Diese Eigenschaft ist für den rekursiven Aufbau (der sich in der Gleichung  $\mathcal{P} = \circ \times \mathcal{P}^*$  widerspiegelt wesentlich. Möchte man jedoch wirklich **Wurzelbäume in der Ebene  $\mathcal{W}$**  betrachten, also zwei Bäume als gleich betrachten, wenn sie durch zyklische Vertauschung der Teilbäume, die von der Wurzel ausgehen, auseinander hervorgehen, so muß in einem letzten Schritt aus den ebenen Wurzelbäumen mit Hilfe einer Zykluskonstruktion diese kombinatorische Struktur beschrieben werden. Bezeichnet man mit  $C_k(\mathcal{P})$  einen Zyklus der Länge  $k$  von ebenen Wurzelbäumen, so sind die Wurzelbäume in der Ebenen gerade die Struktur

$$\mathcal{W} = \circ \times (\mathcal{P} + C_2(\mathcal{P}) + C_3(\mathcal{P}) + \dots).$$

Die EF  $w(x)$  ist daher durch

$$w(x) = x \sum_{k \geq 0} P_{\mathfrak{Z}_k}(p(x), p(x^2), \dots, p(x^k))$$

gegeben, wobei

$$p(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2}$$

die Gleichung  $p(x) = x/(1 - p(x))$  erfüllt.  $p(x)$  hat Konvergenzradius  $\frac{1}{4}$ .  $p(x^2)$  hat daher Konvergenzradius  $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$  usw. Daraus erkennt man, daß die hier auftretende Summe durch

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 0} P_{3k}(p(x), p(x^2), \dots, p(x^k)) &= \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k} p(x)^k + r_1(x) \\ &= \log \frac{1}{1 - p(x)} + r_1(x) \end{aligned}$$

beschrieben werden kann, wobei  $r_1(x)$  eine analytische Funktion ist, die Konvergenzradius  $\frac{1}{2}$  hat. Daher hat  $w(x)$  die Darstellung

$$\begin{aligned} w(x) &= x \left( \log \frac{1}{1 - p(x)} + r_1(x) \right) \\ &= -\frac{1}{4} \sqrt{1 - 4x} + O((1 - 4x)^{3/2}) + r_2(x), \end{aligned}$$

wobei  $r_2(x)$  wieder eine analytische Funktion mit Konvergenzradius  $\frac{1}{2}$  ist. Wegen Satz 3.40 erhält man daher für die Anzahl  $w_n$  der Wurzelbäume in der Ebene

$$w_n = \frac{4^{n-1}}{2\sqrt{\pi n^{3/2}}} \left( 1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right).$$





# Graphentheorie

## 1. Grundlegende Begriffe

### 1.1. Knoten, Kanten und Knotengrade.

DEFINITION 6.1. Ein **Graph**  $G = (V, E)$  besteht aus einer Knotenmenge  $V = V(G)$  und einer Kantenmenge  $E = E(G)$ . Dabei ist eine Kante  $e \in E(G)$  entweder **gerichtet**, d.h. ein geordnetes Paar  $e = \langle v_1, v_2 \rangle$  von zwei Knoten  $v_1, v_2 \in V(G)$ , oder **ungerichtet**, d.h. ein ungeordnetes Paar  $e = \{v_1, v_2\}$  von zwei Knoten  $v_1, v_2 \in V(G)$ .<sup>1</sup> Im gerichtete Fall heißt  $v_1$  **Anfangsknoten** und  $v_2$  **Endknoten** von  $e$ .

Sind alle Kanten  $e \in E(G)$  gerichtet, so spricht man von einem **gerichteten Graphen**, sind hingegen alle Kanten  $e \in E(G)$  ungerichtet, so heißt  $G$  **ungerichteter Graph**.<sup>2</sup>

In der obigen Definition sind auch Kanten der Form  $\langle v, v \rangle$  (bzw.  $\{v, v\}$ ) zugelassen. So eine Kante heißt auch **Schlinge**.

Sind zwei Knoten  $v, w$  eines Graphen durch eine Kante verbunden, so heißen  $v$  und  $w$  auch **adjazent**. Weiters **inzidieren** Knoten  $v, w$  mit einer Kante, die sie verbindet.

Die Anzahl der Knoten eines Graphen  $G$  wird auch mit  $\alpha_0(G) = |V(G)|$  und die Anzahl der Kanten mit  $\alpha_1(G) = |E(G)|$  bezeichnet.

Es ist auch möglich, Graphen mit **Mehrfachkanten** zu betrachten. Hier kann man aber Kanten nicht mehr mit Paaren von Knoten identifizieren. Einer allgemeinen Kante  $e$  werden zwei Knoten  $v_1, v_2$  zugeordnet, die als Anfangs- bzw. Endknoten interpretiert werden können. Zwei verschiedene Kanten können daher (in diesem Rahmen) durchaus dieselben Anfangs- und Endknoten besitzen.

DEFINITION 6.2. Ein Graph  $G = (V, E)$  heißt **schlicht** oder **einfach**, wenn  $G$  keine Schlingen (und keine Mehrfachkanten) enthält.

DEFINITION 6.3. In einem schlichten ungerichteten Graphen  $G$  heißen die zu  $v \in V(G)$  **adjazenten Knoten**

$$\Gamma(v) = \{w \in V(G) \mid (v, w) \in E(G)\}$$

**Nachbarn** von  $v$ .

Die Anzahl

$$d(v) = |\Gamma(v)| = |\{w \in V(G) \mid (v, w) \in E(G)\}|$$

der Nachbarn von  $v \in V(G)$  ist der **Knotengrad** von  $v \in V(G)$

<sup>1</sup>Diese Notation der geordneten bzw. ungeordneten Paare weicht ein wenig von der bisher verwendeten ab, wo  $(a, b)$  ein geordnetes Paar bezeichnet hat.

<sup>2</sup>Ein Graph ist natürlich eine alternative Beschreibung einer binären Relation auf einer Menge  $V$ . Dabei beschreibt ein gerichteter Graph eine allgemeine Relation und ein ungerichteter Graph eine symmetrische Relation.

In einem gerichteten Graphen  $G$  heißen die Elemente von

$$\Gamma^+(v) = \{w \in V(G) \mid \langle v, w \rangle \in E(G)\}$$

**Nachfolger** des Knoten  $v \in V(G)$  und

$$\Gamma^-(v) = \{w \in V(G) \mid \langle w, v \rangle \in E(G)\}$$

**Vorgänger** von  $v \in V(G)$ .  $\Gamma(v) = \Gamma^+(v) \cup \Gamma^-(v)$  bilden die Nachbarn von  $v \in V(G)$ .

Die Anzahl

$$d^+(v) = |\Gamma^+(v)| = |\{w \in V(G) \mid \langle v, w \rangle \in E(G)\}|.$$

der Nachfolger von  $v \in V(G)$  ist der **Weggrad** von  $v \in V(G)$ .

Die Anzahl

$$d^-(v) = |\{w \in V(G) \mid \langle w, v \rangle \in E(G)\}|.$$

der Vorgänger von  $v \in V(G)$  ist der **Hingrad** von  $v \in V(G)$

Man beachte, daß bei gerichteten Graphen in dieser Definition Schlingen zugelassen sind. Ließe man auch im ungerichteten Fall Schlingen zu, so müßten diese bei der Gradberechnung doppelt gezählt werden.

SATZ 6.4. In einem schlichten ungerichteten Graphen  $G$  gilt

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2|E(G)|.$$

In einem ungerichteten Graphen  $G$  gilt hingegen

$$\sum_{v \in V(G)} d^+(v) = \sum_{v \in V(G)} d^-(v) = |E(G)|.$$

## 1.2. Teilgraphen.

DEFINITION 6.5. Ein Graph  $G' = (V', E')$  heißt **Teilgraph** eines Graphen  $G = (V, E)$  wenn  $V' \subseteq V$  und  $E' \subseteq E$  gelten.

Ein Teilgraph  $G' = (V', E')$  eines Graphen  $G = (V, E)$  heißt **induzierter Teilgraph**, wenn  $E'$  alle Kanten aus  $E$  enthält, für die Anfangs-, und Endknoten in  $V'$  liegen, d.h.  $E'$  muß nicht extra angegeben werden, sondern wird durch Vorgabe von  $G$  und  $V'$  induziert.

## 1.3. Kantenfolgen.

DEFINITION 6.6. Eine Folge von Kanten  $e_1, e_2, \dots, e_k \in E(G)$  eines ungerichteten Graphen  $G$  heißt **Kantenfolge**, wenn es Knoten  $v, v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, w \in V(G)$  mit

$$e_1 = (v, v_1), e_2 = (v_1, v_2), \dots, e_{k-1} = (v_{k-2}, v_{k-1}), e_k = (v_{k-1}, w)$$

gibt, d.h. man kann die Kanten  $e_1, e_2, \dots, e_k$  "ohne Absetzen" durchlaufen. Man sagt auch daß die Kantenfolge  $e_j$  ( $1 \leq j \leq k$ ) die Knoten  $v$  und  $w$  verbindet. Die Anzahl  $k$  der Kanten ist die **Länge** der Kantenfolge. Eine Kantenfolge der Länge 0 besteht aus keiner Kante und wird als **leere Kantenfolge** bezeichnet. Sie verbindet jeden Knoten mit sich selbst.

Eine Folge von Kanten  $e_1, e_2, \dots, e_k \in E(G)$  eines gerichteten Graphen  $G$  heißt **Kantenfolge**, wenn für je zwei aufeinanderfolgende Kanten  $e_j, e_{j+1}$  ( $1 \leq j < k$ ) der Endknoten von  $e_j$  mit dem Anfangsknoten von  $e_{j+1}$  übereinstimmt, d.h. es gibt Knoten  $v, v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, w$  mit

$$e_1 = \langle v, v_1 \rangle, e_2 = \langle v_1, v_2 \rangle, \dots, e_{k-1} = \langle v_{k-2}, v_{k-1} \rangle, e_k = \langle v_{k-1}, w \rangle.$$

Wiederum spricht man von einer *Kantenfolge*, die die Knoten  $v$  und  $w$  (gerichtet) verbindet,  $v$  ist der Anfangsknoten und  $w$  der Endknoten. Ebenso ist  $k$  die Länge der Kantenfolge.

Ein Knoten  $w$  ist von einem Knoten  $v$  aus **erreichbar**, wenn es eine Kantenfolge gibt, die  $v$  mit  $w$  verbindet.

Eine Kantenfolge  $e_1, e_2, \dots, e_k \in E(G)$  in einem Graphen  $G$  heißt **Kantenzug**, wenn alle Kanten  $e_j$  ( $1 \leq j \leq k$ ) voneinander verschieden sind.

Eine Kantenfolge  $e_1, e_2, \dots, e_k \in E(G)$  in einem Graphen  $G$  heißt **Weg** (in einem ungerichteten Graphen) bzw. **Bahn** (in einem gerichteten Graphen), wenn alle Knoten, die mit den Kanten  $e_j$  ( $1 \leq j \leq k$ ) inzidieren, voneinander verschieden sind.

Verbindet eine Kantenfolge (resp. ein Kantenzug resp. ein Weg oder Bahn) die Knoten  $v$  und  $w$ , so bezeichnet man dies auch durch  $KF(v, w)$  (resp. durch  $KZ(v, w)$  resp. durch  $W(v, w)$ ).

Eine Kantenfolge, die einen Knoten  $v \in V(G)$  mit sich selbst verbindet, heißt **geschlossen**.

Eine geschlossene Kantenfolge  $K(v, v)$  in einem ungerichteten Graphen heißt **Kreis**, wenn alle Knoten dieser Kantenfolge mit Ausnahme von  $v$  voneinander verschieden sind und keine Kante mehrfach vorkommt.

Eine geschlossene Kantenfolge  $K(v, v)$  in einem gerichteten Graphen heißt **Zyklus**, wenn alle Knoten dieser Kantenfolge mit Ausnahme von  $v$  voneinander verschieden sind.

Die Erreichbarkeitsrelation kann nicht nur durch Kantenfolgen beschrieben werden.

**SATZ 6.7.** Werden in einem Graphen  $G$  zwei verschiedene Knoten  $v, w$  durch eine Kantenfolge verbunden, so gibt es auch einen Weg bzw. Bahn, der  $v$  mit  $w$  verbindet und nur Kanten aus der ursprünglichen Kantenfolge enthält.

Bei geschlossenen Kantenfolgen ist die Situation ein wenig differenzierter.

**SATZ 6.8.** Gibt es in einem ungerichteten Graphen zwei (verschiedenen) Knoten  $v, w$  und zwei verschiedene Wege, die diese Knoten verbinden, dann gibt einen Kreis positiver Länge, der nur Kanten aus diesen beiden Wegen enthält.

Gibt es in einem gerichteten Graphen  $G$  eine geschlossene Kantenfolge positiver Länge, so gibt es auch einen Zyklus positiver Länge, der nur Kanten aus der ursprünglichen geschlossenen Kantenfolge enthält.

#### 1.4. Isomorphe Graphen.

**DEFINITION 6.9.** Zwei Graphen  $G_1, G_2$  heißen **isomorph**, wenn es eine bijektive Abbildung

$$\phi : V(G_1) \rightarrow V(G_2)$$

gibt, so daß eine Kante  $(v, w)$  (bzw.  $\langle v, w \rangle$ ) genau dann in  $E(G_1)$  enthalten ist, wenn die Kante  $(\phi(v), \phi(w))$  (bzw.  $\langle \phi(v), \phi(w) \rangle$ ) in  $E(G_2)$  enthalten ist.

Insbesondere heißt ein Isomorphismus  $\phi : V(G) \rightarrow V(G)$  auf einem Graphen  $G = (V, E)$  **Automorphismus**. Die Menge aller Automorphismen  $\text{Aut}(G)$  eines Graphen  $G = (V, E)$  bildet mit der Hintereinanderausführung eine Gruppe, die sogenannte **Automorphismengruppe** von  $G = (V, E)$ .

### 1.5. Adjazenz- und Inzidenzmatrix.

DEFINITION 6.10. Sei  $G$  ein Graph mit Knotenmenge  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ . Die **Adjazenzmatrix**  $A(G) = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  ist durch

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } (v_i, v_j) \in E(G) \text{ bzw. } \langle v_i, v_j \rangle \in E(G), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben.

Man beachte, daß die Adjazenzmatrix eines ungerichteten Graphen immer symmetrisch ist.

Schlingen äußern sich in der Adjazenzmatrix durch Einträge 1 in der Diagonale. Schlichte Graphen haben daher eine symmetrische Adjazenzmatrix mit verschwindender Diagonale.

Es ist auch sinnvoll, Graphen mit Mehrfachkanten eine Adjazenzmatrix zuzuordnen, wo  $a_{ij}$  die Anzahl der Kanten von  $v_i$  nach  $v_j$  bezeichnet.

Mit Hilfe der Adjazenzmatrix  $A(G)$  eines Graphen lassen sich direkt die Knotengrade ablesen.

SATZ 6.11. Sei  $A(G) = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  die Adjazenzmatrix eines Graphen  $G$  mit Knotenmenge  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ . Ist  $G$  schlicht und ungerichtet, so gilt

$$d(v_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij} = \sum_{j=1}^n a_{ji}.$$

Ist  $G$  gerichtet, so gilt entsprechend

$$d^+(v_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij} \quad \text{und} \quad d^-(v_i) = \sum_{j=1}^n a_{ji}.$$

SATZ 6.12. Sei  $A(G) = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  die Adjazenzmatrix eines Graphen  $G$  mit Knotenmenge  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ . Dann ist der Eintrag  $a_{ij}^{[k]}$  der  $k$ -ten Potenz der Adjazenzmatrix

$$A(G)^k = (a_{ij}^{[k]})_{1 \leq i, j \leq n}$$

die Anzahl der Kantenfolgen der Länge  $k$  von  $v_i$  nach  $v_j$ .

Mit Hilfe dieses Satzes läßt sich auch die **Erreichbarkeitsrelation** beschreiben.

SATZ 6.13. Sei  $A(G) = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  die Adjazenzmatrix eines Graphen  $G$  mit Knotenmenge  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  und  $m$  Kanten. Weiters sei die Matrix  $C = (c_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  durch

$$C = \sum_{k=0}^{m-1} A(G)^k$$

gegeben. Dann ist  $v_j$  von  $v_i$  genau dann erreichbar, wenn  $c_{ij} > 0$  ist.

DEFINITION 6.14. Sei  $G$  ein Graph mit Knotenmenge  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  und Kantenmenge  $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ .

Die **Inzidenzmatrix**  $B(G) = (b_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$  eines schlichten ungerichteten Graphen  $G$  ist durch

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } v_i \text{ mit } e_j \text{ inzidiert,} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben.

Die **Inzidenzmatrix**  $B(G) = (b_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$  eines gerichteten Graphen  $G$  ist durch

$$b_{ij} = \begin{cases} +1 & \text{wenn } v_i \text{ Anfangsknoten von } e_j \text{ ist,} \\ -1 & \text{wenn } v_i \text{ Endknoten von } e_j \text{ ist,} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben.

## 2. Zusammenhang von Graphen

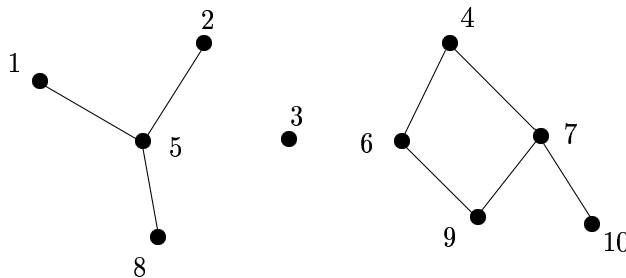
### 2.1. Ungerichtete Graphen.

DEFINITION 6.15. Ein ungerichteter Graph  $G$  heißt **zusammenhängend**, wenn es zwischen je zwei Knoten  $v, w \in V(G)$  eine Kantenfolge  $KF(v, w)$  (bzw. einen Weg  $W(v, w)$ ) gibt.

Die maximalen zusammenhängenden Teilgraphen eines ungerichteten Graphen  $G$  heißen (**Zusammenhangs-**) **Komponenten** von  $G$ .

Ein Graph  $G$  ist daher genau dann zusammenhängend, wenn er nur aus einer Zusammenhangskomponente besteht.

BEISPIEL 6.16. Die Zusammenhangskomponenten des folgenden Graphen



sind  $K_1 = \{1, 2, 5, 8\}$ ,  $K_2 = \{3\}$  und  $K_3 = \{4, 6, 7, 9, 10\}$ .

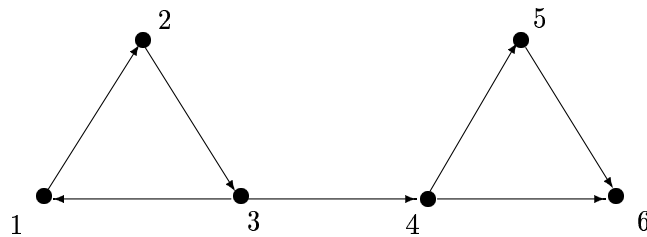
### 2.2. Azyklische Graphen.

DEFINITION 6.17. Ein gerichteter Graph  $G = (V, E)$  heißt **azyklisch** wenn er keine Zyklen (positiver Länge) enthält.

Der folgende **Markierungsalgorithmus** entscheidet, ob ein Graph azyklisch ist oder nicht.

1. (a) Bestimme alle Knoten  $v$  mit Weggrad  $d^+(v) = 0$  und markiere diese mit  $\oplus$ .  
(b) Wurde in 1.(a) kein solcher Knoten gefunden, so ist  $G$  **nicht azyklisch**  $\rightarrow$  **ENDE**.
2. (a) Sind bereits alle Knoten von  $G$  mit  $\oplus$  markiert, so ist  $G$  **azyklisch**  $\rightarrow$  **ENDE**.  
(b) Suche (unmarkierte) Knoten, von denen nur Kanten zu schon markierten führen und markiere diese mit  $\oplus$ .
3. (a) Wurde in 2.(b) mindestens ein Knoten markiert, so wiederhole 2.  
(b) Wurde in 2.(b) kein Knoten markiert, so ist  $G$  **nicht azyklisch**  $\rightarrow$  **ENDE**.

BEISPIEL 6.18. Wendet man den Markierungsalgorithmus auf den folgenden Graphen an, so durchläuft man folgende Schritte und markiert die angegebenen Punkte:



- 1.(a)  $6 \rightarrow \oplus$
- 1.(b)
- 2.(a)
- 2.(b)  $5 \rightarrow \oplus$
- 3.(a)
- 2.(a)
- 2.(b)  $4 \rightarrow \oplus$
- 2.(a)
- 2.(b)
- 3.(a)
- 3.(b)  $G$  ist nicht azyklisch

Dem Markierungsalgorithmus liegt der folgende Satz zugrunde.

**SATZ 6.19.** *Jeder azyklische Graph  $G$  besitzt einen Knoten  $v \in V(G)$  mit Weggrad  $d^+(v) = 0$  (und entsprechend auch einen Knoten  $w \in V(G)$  mit Eingrad  $d^-(w) = 0$ ).*

Dieser Satz begründet zunächst einmal den Schritt 1.(b).

Weiters beachte man, daß die Knoten, die im Schritt 1.(a) (mit  $\oplus$ ) markiert werden, sicherlich nicht in einem Zyklus liegen können, d.h. *streicht* man alle in diesem Schritt markierten Knoten und alle zu ihnen hinführenden Kanten, so entsteht ein kleinerer Graph  $G'$ , der genau dann azyklisch ist, wenn  $G$  azyklisch ist.

Im Schritt 2.(b) werden alle Knoten markiert, von denen nur Kanten zu bereits markierten führen. In  $G'$  sind dies aber genau jene Knoten  $v' \in V(G')$ , die in  $G'$  Weggrad  $d_{G'}^+(v') = 0$  haben, d.h. 2.(b) ist nichts anderes als 1.(a) angewandt auf  $G'$ . Das sukzessive Markieren stellt daher ein *Abarbeiten* jener Knoten dar, die sicherlich in keinem Zyklus von  $G$  liegen.

Schließlich trifft einer der beiden folgenden Fälle zu:

- A. Es können alle Knoten markiert werden (Fall 2.(a)), d.h. kein Knoten von  $G$  liegt in einem Zyklus, der Graph  $G$  ist daher azyklisch.
- B. Es können nicht alle Knoten markiert werden (Fall 3.(b)), d.h. nach dem Entfernen von gewissen Knoten (die in keinem Zyklus von  $G$  liegen können) bleibt ein Graph  $G''$  über, der keine Knoten  $v'' \in V(G'')$  mit Weggrad  $d_{G''}^+(v'') = 0$  besitzt. Nach Satz 6.19 ist  $G''$  und damit auch  $G$  nicht azyklisch.

### 2.3. Gerichtete Graphen.

**DEFINITION 6.20.** *Ein gerichteter Graph  $G$  heißt **stark zusammenhängend**, wenn für je zwei (verschiedene) Knoten  $v, w \in V(G)$  eine (gerichtete) Kantenfolge  $KF(v, w)$  (bzw. ein Bahn  $W(v, w)$ ) existiert.*

Die maximalen stark zusammenhängenden Teilgraphen eines gerichteten Graphen  $G$  heißen **starke Zusammenhangskomponenten** oder **Komponenten des starken Zusammenhangs** von  $G$ .

DEFINITION 6.21. Der Schatten  $G^u$  eines gerichteten Graphen  $G$  ist ein ungerichteter Graph mit der selben Knotenmenge wie  $G$  ( $V(G^u) = V(G)$ ) und  $(v, w)$  ist eine (ungerichtete) Kante von  $G^u$ , wenn  $\langle v, w \rangle$  oder  $\langle w, v \rangle$  in  $E(G)$  enthalten sind, d.h. gerichtete Kanten werden einfach durch ungerichtete ersetzt.

Ein gerichteter Graph  $G$  heißt **schwach zusammenhängend**, wenn der Schatten  $G^u$  zusammenhängend ist. Entsprechend sind die **schwachen Zusammenhangskomponenten** die Komponenten von  $G^u$ .

Die Komponenten des schwachen Zusammenhangs können daher wie im ungerichteten Fall bestimmt werden.

DEFINITION 6.22. Sei  $G$  ein gerichteter Graph, und bezeichnen  $K_1, K_2, \dots, K_r$  die Komponenten des starken Zusammenhangs. Die **Reduktion**  $G_R = (V(G_R), E(G_R))$  ist jener (gerichtete) Graph mit Knotenmenge

$$V(G_R) = \{K_1, K_2, \dots, K_r\},$$

wobei eine (gerichtete) Kante  $\langle K_i, K_j \rangle$  ( $i \neq j$ ) genau dann in  $E(G_R)$  enthalten ist, wenn es Knoten  $v \in K_i$  und  $w \in K_j$  mit  $\langle v, w \rangle \in E(G)$  gibt.

SATZ 6.23. Die Reduktion  $G_R$  eines gerichteten Graphen  $G$  ist ein azyklischer Graph.

DEFINITION 6.24. Eine **Knotenbasis**  $B$  eines gerichteten Graphen  $G$  ist eine Teilmenge  $B \subseteq V(G)$  mit den folgenden Eigenschaften:

1. Zu jedem Knoten  $v \in V(G)$  gibt es einen Knoten  $b \in B$  und einen Weg  $W(b, v)$ .
2.  $B$  ist minimal bezüglich der Eigenschaft 1., d.h. jede echte Teilmenge  $B' \subseteq B$  (mit  $B' \neq B$ ) erfüllt 1. nicht.

Für azyklische Graphen läßt sich eine (die) Knotenbasis sehr einfach ermitteln.

SATZ 6.25.  $B = \{v \in V(G) \mid d^-(v) = 0\}$  ist die einzige Knotenbasis eines azyklischen Graphen  $G$ .

Man beachte, daß wegen Satz 6.19 die so definierte Menge  $B$  in einem azyklischen Graphen nichtleer ist.

SATZ 6.26. Sei  $G$  ein gerichteter Graph, und bezeichnen  $K_1, K_2, \dots, K_l$  jene Komponenten des starken Zusammenhangs von  $G$  mit Hingrad

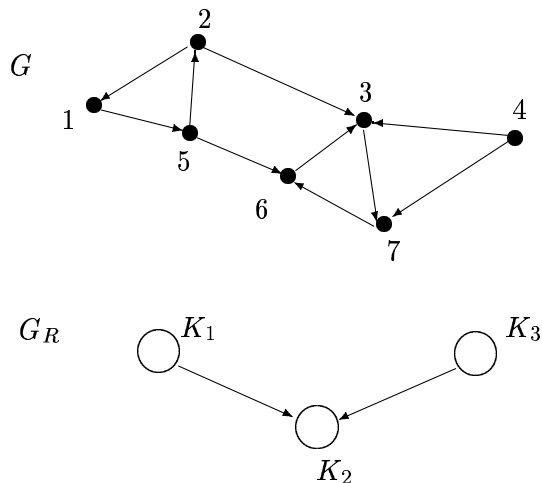
$$d_{G_R}^-(K_j) = 0 \quad (1 \leq j \leq l),$$

d.h.  $B_R = \{K_1, K_2, \dots, K_l\}$  bilden die Knotenbasis von  $G_R$ . Ist  $v_1 \in K_1, v_2 \in K_2, \dots, v_l \in K_l$  eine beliebige Auswahl von Knoten  $v_j$  aus diesen Komponenten, so ist

$$B = \{v_1, v_2, \dots, v_l\}$$

eine Knotenbasis von  $G$ . Weiters erhält man auf diese Art und Weise alle Knotenbasen von  $G$ .

KOROLLAR 6.27. Alle Knotenbasen eines gerichteten Graphen haben dieselbe Anzahl von Elementen.



BEISPIEL 6.28. Im folgenden Graphen  $G$  sind die Komponenten des starken Zusammenhangs  $K_1 = \{1, 2, 5\}$ ,  $K_2 = \{3, 6, 7\}$  und  $K_3 = \{4\}$ . Damit hat die Reduktion  $G_R$  die angegebene Gestalt.

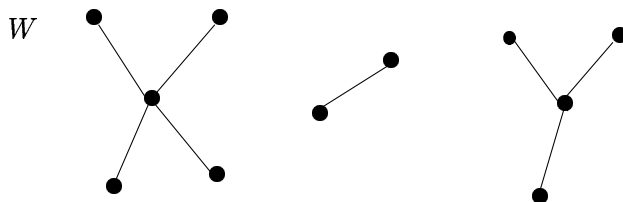
$B_R = \{K_1, K_3\}$  ist die Knotenbasis von  $G_R$ . Damit sind  $B_1 = \{1, 4\}$ ,  $B_2 = \{2, 4\}$  und  $B_3 = \{5, 4\}$  alle Knotenbasen von  $G$ .

#### 2.4. Bäume und Wälder.

DEFINITION 6.29. Ein schlichter ungerichteter Graph  $W$ , der keine Kreise enthält, heißt **Wald**.

Ein Wald  $T$ , der auch zusammenhängend ist, heißt **Baum**.

Die Zusammenhangskomponenten eines Waldes sind Bäume.



Man beachte, daß in einem Baum  $T$  zu je zwei Knoten  $v, w$  genau einen Weg  $W(v, w)$  gibt. (Da  $T$  zusammenhängend ist, muß es es einen Weg  $W(v, w)$  geben. Gäbe es aber einen weiteren von  $W(v, w)$  verschiedenen Weg,  $\tilde{W}(v, w)$ , so müßte es auch einen Kreis positiver Länge, was aber definitionsgemäß ausgeschlossen ist.) Die Länge dieses Weges  $W(v, w)$  bezeichnet man als den **Abstand**  $d_T(v, w)$ .

SATZ 6.30. Für einen Baum  $T$  gilt

$$\alpha_0(T) = \alpha_1(T) + 1.$$

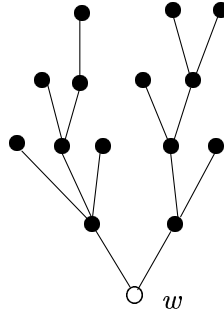
Entsprechend gilt für einen Wald  $W$  mit  $k$  Komponenten

$$\alpha_0(W) = \alpha_1(W) + k.$$

Zeichnet man in einem Baum einen Knoten  $w \in E(T)$  (**Wurzel**) aus, so kann man sich die Struktur eines Baumes sehr einfach verdeutlichen. Zeichnet man in einer graphischen Darstellung



die Nachbarn von  $w$  oberhalb von  $w$  und deren Nachbarn (mit der Ausnahme  $w$ ) wieder darüber usw., so entsteht tatsächlich ein Bild, das einem Baum ähnelt.

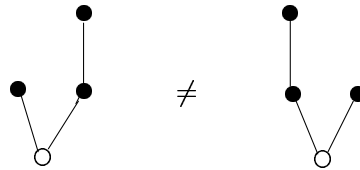


Man beachte, daß hier tatsächlich von jedem Knoten in neue Knoten verzweigt wird, da ein Baum definitionsgemäß kreisfrei ist.

**DEFINITION 6.31.** Ein Baum  $T$ , bei dem ein Knoten  $w$  (**Wurzel**) ausgezeichnet ist, heißt **Wurzelbaum**.

Knoten  $v \in V(T)$ ,  $v \neq w$ , eines Wurzelbaumes  $T$  mit Knotengrad  $d(v) = 1$  heißen **Endknoten**, **externe Knoten** oder **Blätter**. Alle anderen Knoten  $v \in V(T)$  heißen **interne Knoten**.

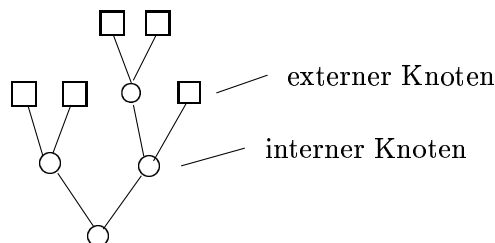
Ein **ebener Wurzelbaum** ist ein Wurzelbaum, bei dem die Links-Rechts-Reihenfolge der Nachfolgekäste der Wurzel wesentlich ist, z.B. sind werden die beiden Wurzelbäume



als verschieden betrachtet, obwohl sie natürlich denselben Graphen repräsentieren.

Der Vorteil von Wurzelbäumen ist, daß sie eine *rekursive Struktur* haben. Ist  $w'$  ein Nachbar von der Wurzel  $w$ , so bilden alle Knoten  $v \in V(T)$ , deren Verbindungsweg  $W(v, w)$  zu  $w$  über  $w'$  führt, gemeinsam mit  $w'$  einen kleineren Wurzelbaum usw.

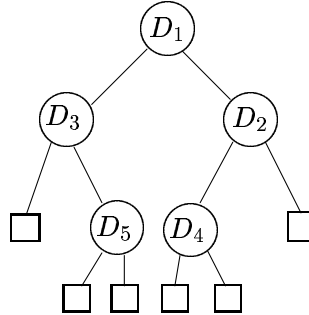
**DEFINITION 6.32.** Ein **Binärbaum**  $T$  ist ein ebener Wurzelbaum, bei dem jeder interne Knoten  $v \in V(T)$  mit Ausnahme der Wurzel  $w$  Knotengrad  $d(v) = 3$  und die Wurzel Knotengrad  $d(w) = 2$  hat, d.h. jeder interne Knoten hat genau zwei Nachfolgeknoten.



Binärbäume werden wegen ihres einfachen rekursiven Aufbaus als **Datenstrukturen** verwendet:

1. **Binärer Suchbaum:** Es sollen  $n$  Daten  $D_1, D_2, \dots, D_n$ , die mit  $n$  paarweise vergleichbaren *Schlüsseln*  $k_1, k_2, \dots, k_n$  versehen sind, in einem (noch aufzubauenden) Binärbaum gespeichert werden. Zunächst wird  $D_1$  als *Wurzel* verwendet. Nun nehme man an, die ersten  $j$  Daten  $D_1, D_2, \dots, D_j$  seien schon eingetragen, dann wird der Platz für  $D_{j+1}$  so bestimmt, daß man bei der Wurzel  $D_1$  beginnend die Schlüssel miteinander vergleicht. Ist etwa  $k_{j+1} < k_1$  so geht man (im Binärbaum) nach links weiter, und ist  $k_{j+1} > k_1$  so geht man nach rechts weiter. Erreicht man jetzt einen weiteren Knoten  $D_i$ , so vergleicht man die Schlüssel  $k_{j+1}$  und  $k_i$  in derselben Art und Weise und setzt dieses Verfahren so lange fort bis man zu einem unbesetzten Knoten kommt. Dort trägt dort  $D_{j+1}$  ein.

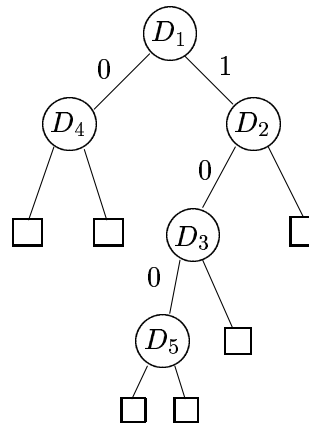
Sind etwa die Schlüssel der Datensätze  $D_1, D_2, D_3, D_4, D_5$  durch  $k_1 = 3, k_2 = 5, k_3 = 1, k_4 = 4, k_5 = 2$  gegeben, so erhält man folgenden Datenaufbau:



Die Daten  $D_1, D_2, \dots, D_n$  sind daher in den internen Knoten gespeichert.

2. **Digitaler Suchbaum:** Wieder sollen  $n$  Daten  $D_1, D_2, \dots, D_n$  gespeichert werden, wobei die Schlüssel  $k_j$  ( $1 \leq j \leq n$ ) 0-1-Folgen sind.  $D_1$  ist wie im binären Suchbaum die Wurzel. Die Platz der weiteren Datensätze  $D_j$  wird aber jetzt nicht durch Vergleich der Schlüssel gefunden, sondern man orientiert sich nur am Schlüssel  $k_j$ . Ist das erste bit 0, so geht man (bei der Wurzel beginnend) nach links weiter, ist das erste bit 1, so geht man nach rechts weiter. Im nächsten Schritt verwendet man das zweite bit in derselben Art und Weise. Dieses Verfahren führt man solange durch bis man einen freien Platz gefunden hat. Dort trägt man  $D_j$  ein.

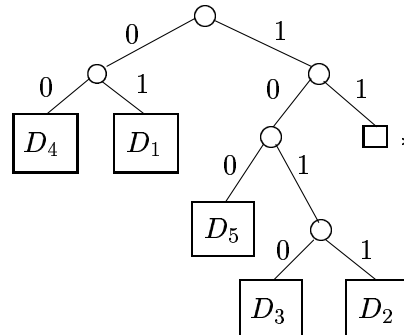
Haben die Datensätze  $D_1, D_2, D_3, D_4, D_5$  die Schlüssel  $k_1 = 01101\dots, k_2 = 10110\dots, k_3 = 10100\dots, k_4 = 00101\dots, k_5 = 10010\dots$  so ergibt sich folgender auf der nächsten Seite dargestellter Datenaufbau.



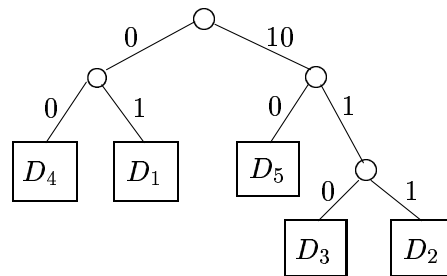
Man beachte, daß die Struktur eines binären bzw. digitalen Suchbaums von der Reihenfolge der Dateneinträge abhängt, der erste Datensatz wird z.B. immer als Wurzel verwendet.

3. **Tries:** Hier werden die Daten  $D_1, D_2, \dots, D_n$  nicht als interne Knoten eines Binärbaumes gespeichert, sondern in den externen Knoten. Die Schlüssel  $k_j$  ( $1 \leq j \leq n$ ) sind wieder 0-1-Folgen. Die Position von  $D_j$  wird durch den kürzesten eindeutigen Anfangsabschnitt von  $k_j$  bestimmt, wobei 0 wieder *gehe nach links* und 1 *gehe nach rechts* bedeutet.

Verwendet man dieselben Schlüssel  $k_1 = \underline{0}1101\dots$ ,  $k_2 = \underline{1}0110\dots$ ,  $k_3 = \underline{1}0100\dots$ ,  $k_4 = \underline{00}101\dots$ ,  $k_5 = \underline{100}10\dots$  wie im letzten Beispiel (nur daß jetzt der kürzeste eindeutige Anfangsabschnitt der Übersicht halber unterstrichen wurde), so hat der zugehörige Trie die folgende Gestalt:



Der Baum ist bei Tries nicht mehr von der Reihenfolge der Daten abhängig. (Es ist bei einem Trie übrigens sehr einfach, neue Datensätze einzutragen. Die jeweiligen kürzesten eindeutigen Anfangsabschnitte müssen dabei nicht immer neu berechnet werden. Im Gegenteil, sie lassen sich aus dem entstandenen Trie ablesen.) Ein Nachteil des Trie ist, daß unbesetzte Endknoten (\*) auftreten können. Dieser Nachteil kann dadurch behoben werden, daß *unnötige Kanten eliminiert* werden, und man erhält den sogenannten **Patricia Trie**:



## 2.5. Spannende Bäume und Gerüste.

**DEFINITION 6.33.** Ein **spannender Baum**  $T$  eines schlichten ungerichteten zusammenhängenden Graphen  $G$  ist ein Baum mit  $V(T) = V(G)$  und  $E(T) \subseteq E(G)$ , d.h. er enthält dieselben Knoten wie  $G$  und gewisse Kanten von  $G$ .

Ein **Gerüst** oder **spannender Wald**  $W$  eines schlichten ungerichteten Graphen  $G$  ist ein Wald mit  $V(W) = V(G)$  und  $E(W) \subseteq E(G)$  und denselben Zusammenhangskomponenten wie  $G$ , d.h. schränkt man  $W$  auf eine Zusammenhangskomponente  $K$  von  $G$  ein, so ist diese Einschränkung  $T$  ein spannender Baum von  $K$ .

SATZ 6.34 (Matrix-Baum-Theorem von Kirchhoff). Sei  $G$  ein schlichter ungerichteter zusammenhängender Graph mit Knotenmenge  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  und Adjazenzmatrix  $A(G)$ . Es bezeichne weiters  $D(G)$  die Diagonalmatrix der Knotengrade  $\text{diag}(d(v_1), d(v_2), \dots, d(v_n))$ , so ist jeder Kofaktor der Matrix

$$D(G) - A(G),$$

d.h. der Betrag einer beliebige  $(n - 1) \times (n - 1)$ -Unterdeterminante dieser Matrix, die Anzahl der spannenden Bäume von  $G$ .

Ist  $G$  nicht zusammenhängend, so wendet man das Matrix-Baum-Theorem für jede Komponente an und multipliziert die Ergebnisse, um die Anzahl der Gerüste von  $G$  zu erhalten.

### 3. Eulersche und Hamiltonsche Linien

#### 3.1. Eulersche Linien.

DEFINITION 6.35. Eine Kantenfolge in einem (gerichteten oder ungerichteten) Graphen  $G$  heißt **Eulersche Linie**, wenn sie jeden Knoten und jede Kante enthält, und zwar jede Kante genau einmal.

Bei einer **geschlossenen Eulerschen Linie** stimmen Anfangs- und Endknoten überein, bei einer **offenen Eulerschen Linie** sind sie verschieden.

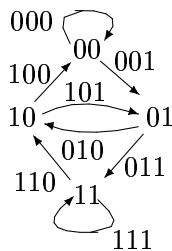
SATZ 6.36. Ein ungerichteter Graph  $G$  besitzt genau dann eine geschlossene Eulersche Linie, wenn  $G$  zusammenhängend ist und alle Knotengrade  $d(v)$  ( $v \in V(G)$ ) gerade sind.

Ein ungerichteter Graph  $G$  besitzt genau dann eine offene Eulersche Linie, wenn  $G$  zusammenhängend ist und mit der Ausnahme von zwei Knoten  $v_1, v_2 \in V(G)$  (mit ungeradem Knotengrad) alle Knotengrade  $d(v)$  ( $v \in V(G) \setminus \{v_1, v_2\}$ ) gerade sind.

SATZ 6.37. Ein gerichteter Graph  $G$  besitzt genau dann eine geschlossene Eulersche Linie, wenn  $G$  schwach zusammenhängend ist und alle Knoten  $v \in V(G)$  Hin- und Weggrad gleich sind:  $d^+(v) = d^-(v)$ .

Ein gerichteter Graph  $G$  besitzt genau dann eine offene Eulersche Linie, wenn  $G$  schwach zusammenhängend ist und mit der Ausnahme von zwei Knoten  $v_1, v_2 \in V(G)$ , für die  $d^+(v_1) = d^-(v_1) + 1$  und  $d^+(v_2) = d^-(v_2) - 1$  gilt, bei allen Knoten  $v \in V(G) \setminus \{v_1, v_2\}$  Hin- und Weggrad gleich sind:  $d^+(v) = d^-(v)$ .

BEISPIEL 6.38. Die 0-1-Folge 00010111 der Länge 8 hat die Eigenschaft, daß sie (wenn man sie zyklisch fortsetzt) alle 8 0-1-Folgen der Länge 3 – 000, 001, 010, 101, 011, 111, 110, 100 – als Teilblöcke auftreten. Folgen dieser Art können mit Hilfe einer Eulerschen Linie auf einem **De Bruijn-Graphen** konstruiert werden. In unserem Fall sind die Knoten die 0-1-Folgen der Länge 2, d.h.  $V(G) = \{00, 01, 10, 11\}$ , und zwei Knoten werden durch eine Kante verbunden, wenn die letzte Stelle des ersten Knoten mit der ersten des zweiten Knoten übereinstimmt.



Dadurch entsteht ein gerichteter Graph, wo alle Knoten  $v$  gleichen Hin- und Weggrad haben, nämlich  $d^+(v) = d^-(v) = 2$ . Daher gibt es eine geschlossene Eulersche Linie, die dann aus offensichtlichen Gründen einer Folge wie oben entspricht. Z.B. entspricht Der Folge 00010111 der Zyklus

$$00 \rightarrow 00 \rightarrow 01 \rightarrow 10 \rightarrow 01 \rightarrow 11 \rightarrow 11 \rightarrow 10 \rightarrow 00.$$

### 3.2. Hamiltonsche Linien.

DEFINITION 6.39. *Eine Kantenfolge in einem (gerichteten oder ungerichteten) Graphen  $G$  heißt **Hamiltonsche Linie**, wenn sie jeden Knoten (mit der möglichen Ausnahme, daß Anfangs- und Endpunkt übereinstimmen) genau einmal enthält.*

*Bei einer **geschlossenen Hamiltonschen Linie** stimmen Anfangs- und Endknoten überein, bei einer **offenen Hamiltonschen Linie** sind sie verschieden.*

Im Gegensatz zu den Eulerschen Linien gibt es (bis jetzt) noch kein allgemeines Kriterium für die Existenz von Hamiltonschen Linien. Es gibt aber viele Sätze, die hinreichende Bedingungen für die Existenz einer Hamiltonschen Linie angeben. Als Beispiel dafür sei der folgende Satz angegeben.

SATZ 6.40. *Sei  $G$  ein schlichter ungerichteter Graph mit  $n$  Knoten, so daß für alle Knotenpaare  $x, y \in V(G)$ , die in  $G$  nicht durch eine Kante verbunden sind, d.h.  $(x, y) \notin E(G)$ ,*

$$d(x) + d(y) \geq n$$

*gilt. Dann gibt es in  $G$  eine geschlossene Hamiltonsche Linie.*

## 4. Planare Graphen

### 4.1. Eulersche Polyederformel.

DEFINITION 6.41. *Ein Graph  $G$  heißt **planar** oder **eben**, wenn  $G$  kreuzungsfrei in der Ebene  $\mathbb{R}^2$  dargestellt werden kann, d.h. die Kurven, die die Kanten repräsentieren, haben außer in jenen Punkten, die die Knoten repräsentieren, keine weiteren Schnittpunkte.*

Die kreuzungsfreie Darstellung eines Graphen  $G$  zerlegt die Ebene in eine endliche Anzahl von Gebieten. Es stellt sich heraus, daß diese Anzahl unabhängig davon ist, wie man  $G$  in der Ebene kreuzungsfrei repräsentiert. Man bezeichnet diese Anzahl durch  $\alpha_2(G)$ .

SATZ 6.42 (Eulersche Polyederformel). *Für einen zusammenhängenden planaren Graphen  $G$  gilt*

$$\alpha_0(G) - \alpha_1(G) + \alpha_2(G) = 2.$$

Durch Projektion eines konvexen Polyeders  $P$  (Durchschnitt von endlich vielen Halbräumen im  $\mathbb{R}^3$ ) auf eine im Inneren des Polyeders liegende Kugel erhält man auf der Kugeloberfläche eine kreuzungsfreie Darstellung eines Graphen  $G$ , der dieselbe Anzahl von Knoten, Kanten und Gebieten hat wie das Polyeder Eckpunkte, Kanten und Flächen. Projiziert man nun die Kugeloberfläche mittels stereographischer Projektion auf die Ebene (wobei als *Nordpol* weder ein Knotenpunkt noch ein Punkt einer Kante des Graphen auf der Kugeloberfläche verwendet werden darf) so wird die kreuzungsfreie Darstellung des Graphen  $G$  auf der Kugeloberfläche auf eine kreuzungsfreie Darstellung von  $G$  in der Ebene projiziert. Natürlich bleibt auch bei dieser Projektion die Anzahl der Knoten, Kanten und Gebiete gleich. Daher gilt auch

$$\alpha_0(P) - \alpha_1(P) + \alpha_2(P) = 2,$$

wobei  $\alpha_0(P)$  die Anzahl der Eckpunkte,  $\alpha_1(P)$  die Anzahl der Kanten und  $\alpha_2(P)$  die Anzahl der Flächen des Polyeders  $P$  bezeichnen.

Aus der eben geführten Überlegung ergibt sich auch die folgende Eigenschaft.

**SATZ 6.43.** *Ein Graph läßt sich genau dann kreuzungsfrei in der Ebene darstellen, wenn er kreuzungsfrei auf einer Kugeloberfläche darstellbar ist.*

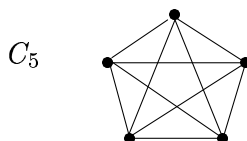
#### 4.2. Satz von Kuratowski.

**DEFINITION 6.44.** *Der **vollständige Graph**  $C_n$  ist ein schlichter ungerichteter Graph mit  $n$  Knoten, bei dem jeder Knoten mit jedem anderen durch eine Kante verbunden ist.*

**LEMMA 6.45.** *Für einen schlichten, zusammenhängenden, planaren Graphen  $G$  gilt*

$$\alpha_1(G) \leq 3\alpha_0(G) - 6.$$

**SATZ 6.46.** *Der vollständige Graph  $C_5$  ist nicht planar.*



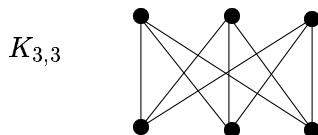
**DEFINITION 6.47.** *Ein (ungerichteter) Graph  $G$  heißt **paarer Graph**, wenn dessen Knotenmenge  $V(G)$  in zwei disjunkte nichtleere Teilmengen  $V_1, V_2$  zerlegt werden kann, so daß alle Kanten nur zwischen  $V_1$  und  $V_2$  verlaufen.*

*Der **vollständige paare Graph**  $K_{m,n}$  ( $m, n \geq 1$ ) ist ein schlichter paarer Graph mit  $m + n$  Knoten  $V(G) = V_1 \cup V_2$ , wobei  $V_1$   $m$  Knoten und  $V_2$   $n$  Knoten enthält und jeder Knoten aus  $V_1$  mit allen Knoten aus  $V_2$  durch eine Kante verbunden ist.*

**LEMMA 6.48.** *Für einen einfachen, planaren Graphen  $G$  mit der Eigenschaft, daß jeder Kreis Länge  $\geq 4$  hat gilt*

$$\alpha_1(G) \leq 2\alpha_0(G) - 4.$$

**SATZ 6.49.** *Der vollständige paare Graph  $K_{3,3}$  ist nicht planar.*



**DEFINITION 6.50.** *Ein Graph  $H$  heißt **Unterteilung** eines Graphen  $G$ , wenn  $H$  aus  $G$  dadurch hervorgeht, wenn in einer oder in mehreren Kanten von  $G$  zusätzliche Knoten eingefügt werden.*

**SATZ 6.51 (Satz von Kuratowski).** *Eine Graph  $G$  ist genau dann nicht planar, wenn er einen Teilgraphen enthält, der aus  $C_5$  oder  $K_{3,3}$  durch eventuelle Unterteilung (von Kanten) entsteht.*

### 4.3. Duale Graphen.

DEFINITION 6.52. Sei  $G$  ein in die Ebene  $\mathbb{R}^2$  eingebetteter ungerichteter planarer Graph ohne Schlingen, und es bezeichne  $F$  die Menge der Gebiete der Ebene  $\mathbb{R}^2$ , die durch den eingebetteten Graphen festgelegt werden.

Der **duale Graph**  $G^*$  von  $G$  hat als Knotenmenge  $V(G^*) = F$  und ein Paar  $(f_1, f_2)$  von verschiedenen Gebieten  $f_1, f_2 \in F$  bilden eine Kante von  $G^*$ , wenn  $f_1, f_2$  eine gemeinsame begrenzende Kante  $e \in E(G)$  haben.

Man beachte, daß, wenn es keine Knoten vom Grad  $\leq 2$  gibt, die Kantenmengen von  $G$  und  $G^*$  dadurch bijektiv aufeinander abgebildet werden, insbesondere gilt neben der Eigenschaft  $\alpha_1(G^*) = \alpha_1(G)$  auch die Gleichheit  $\alpha_0(G^*) = \alpha_2(G)$ . Es gilt sogar  $\alpha_2(G^*) = \alpha_0(G)$ , was aus dem folgenden Satz abgeleitet werden kann.

SATZ 6.53. Sei  $G$  ein in die Ebene  $\mathbb{R}^2$  eingebetteter ungerichteter planarer Graph ohne Schlingen und ohne Knoten vom Grad  $\leq 2$ . Dann ist der duale Graph  $G^*$  auch planar mit einer durch die Konstruktion natürlichen Einbettung in die Ebene  $\mathbb{R}^2$ . Weiters ist der biduale Graph  $G^{**}$  in natürlicher Weise isomorph zu  $G$ .

Es gibt noch weitere interessante Eigenschaften von planaren Graphen, wie den **Vierfarbensatz**, der aussagt, daß es möglich ist, die Gebiete eines in die Ebene eingebetteten planaren Graphen immer mit nur vier Farben färben kann, so daß je zwei aneinandergrenzende Gebiete (d.h. die eine gemeinsame begrenzende Kante besitzen) verschieden gefärbt sind. Dieser Satz wird in nächsten Abschnitt über **Färbungen** genauer besprochen.

## 5. Färbungen und Matchings

### 5.1. Chromatische Zahl.

DEFINITION 6.54. Sei  $G = (V, E)$  ein schlichter ungerichteter Graph. Eine **Färbung** ist eine Abbildung  $c : V \rightarrow R$  (in eine Menge  $R$  von "Farben").

Eine Färbung  $c : V \rightarrow R$  heißt **zulässig**, wenn für alle Kanten  $e = (x, y) \in E$

$$c(x) \neq c(y)$$

gilt, d.h. benachbarte Knoten sind verschieden gefärbt.

Die **chromatische Zahl**  $\chi(G)$  ist die minimale Anzahl von Farben, für die es eine zulässige Färbung der Knoten von  $G$  gibt.

Analog könnte man auch **zulässige Kantenfärbungen** definieren. Dies ist jedoch nicht notwendig. Ordnet man einem Graphen  $G = (V, E)$  einen Graphen  $\overline{G}$  mit Knotenmenge  $V(\overline{G}) = E$  und

$$(e_1, e_2) \in E(\overline{G}) : \iff e_1 \neq e_2 \wedge \exists x, y, z \in V : e_1 = (x, y) \wedge e_2 = (x, z),$$

so entspricht einer zulässigen Kantenfärbung von  $G$  eine zulässige Knotenfärbung von  $\overline{G}$ .

Das Bestimmen der chromatischen Zahl  $\chi(G)$  ist nur in den wenigsten Fällen einfach.

SATZ 6.55. Für jeden schlichten ungerichteten Graphen  $G = (V; E)$  gilt

$$\chi(G) \leq 1 + \max_{v \in V} d(v).$$

SATZ 6.56. Ein schlichter ungerichteter Graph  $G = (V, E)$  ist genau dann mit  $\leq 2$  Farben zulässig färbbar (d.h.  $\chi(G) \leq 2$ ), wenn er keine Kreise ungerader Länge enthält.

Graphen  $G = (V, E)$  mit chromatischer Zahl  $\chi(G) \leq 2$  heißen auch **paare Graphen**. Diese sind ja dadurch charakterisiert, daß die Knotenmenge  $V$  in zwei disjunkte Teilmengen  $V_1, V_2$  zerlegt werden kann, so daß es keine Kanten gibt, die Knoten innerhalb von  $V_1$  verbinden und keine Kanten, die Knoten innerhalb von  $V_2$  verbinden, d.h. man erhält eine zulässige Färbung mit 2 Farben, indem man alle Knoten aus  $V_1$  mit der ersten Farbe färbt und alle Knoten aus  $V_2$  mit der zweiten Farbe.

Eine detaillierte Information über die Anzahl aller möglichen Färbungen gibt das chromatische Polynom.

DEFINITION 6.57. Sei  $G = (V, E)$  ein *schlichter ungerichteter Graph* mit  $|V| = n$  Knoten. Für jede natürliche Zahl  $\lambda \geq 1$  bezeichne  $c_\lambda$  die Anzahl der verschiedenen zulässigen Färbungen von  $G$  mit  $\leq \lambda$  Farben.

Das **chromatische Polynom** von  $G$  ist ein Polynom  $P(x) \in \mathbb{R}[x]$  vom Grad  $n$  mit

$$P(\lambda) = c_\lambda$$

für alle natürlichen Zahlen  $\lambda \geq 1$ .

SATZ 6.58. Für jeden *schlichten ungerichteten Graphen*  $G$  gibt es ein *eindeutig bestimmtes chromatisches Polynom*.

BEISPIEL 6.59. Das chromatische Polynom eines **Dreiecks** ist

$$P(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2).$$

BEISPIEL 6.60. Das chromatische Polynom eines Baumes mit  $n$  Knoten ist

$$P(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)^{n-1}.$$

Offensichtlich kann aus dem chromatischen Polynom die chromatische Zahl ermittelt werden:

$$\chi(G) = \min\{\lambda \in \mathbb{N}^+ \mid P(\lambda) \neq 0\}.$$

## 5.2. Vierfarbensatz.

Der **Vierfarbensatz** lautet, daß es bei einem in die Ebenen eingebetteten planaren Graphen möglich ist, die dadurch entstehenden Gebiete mit nur vier Farben so zu färben, daß keine zwei Gebiete, die durch eine gemeinsame Kante begrenzt werden, gleich gefärbt sind, d.h. es gibt eine zulässige Färbung der Gebiete mit vier Farben.

Interpretiert man diese Färbung der Gebiete als Knotenfärbung des dualen Graphen und benützt man die Tatsache, daß alle planaren Graphen (ohne Knoten mit Grad  $\leq 2$ , die ja bei Färbungsproblemen mit  $\geq 3$  Farben sowieso keine Rolle spielen) als duale Graphen auftreten, so kann der Vierfarbensatz auch folgendermaßen umformuliert werden.

SATZ 6.61. Für jeden *planaren Graphen*  $G$  gilt

$$\chi(G) \leq 4.$$

Der Beweis dieses Satztes ist außerordentlich schwierig und wurde erstmals von Appel und Haken mit intensiver Computerunterstützung bewiesen. Hingegen ist es möglich, mit ganz elementaren Mitteln

$$\chi(G) \leq 5$$

zu beweisen.



### 5.3. Matchings.

DEFINITION 6.62. Sei  $G = (V, E)$  ein schlichter ungerichteter Graph. Ein **Matching**  $M$  ist eine Teilmenge der Kanten  $E$ , so daß keine zwei Kanten aus  $M$  einen gemeinsamen Knoten haben.

Ein Matching  $M$  heißt **maximal**, wenn die Kardinalität  $|M|$  unter allen Matchings von  $G$  größtmöglich ist.

Ein Matching entspricht daher einer Auswahl von paarweise disjunkten zweielementiger Teilmengen der Knoten, die jeweils durch eine Kante verbunden sind.

DEFINITION 6.63. Sei  $M$  ein Matching eines schlichten ungerichteten Graphen  $G = (V, E)$ . Ein Weg  $W$  in  $G$  heißt **alternierend**, wenn die Kanten in  $W$  abwechselnd in  $M$  und  $E \setminus M$  liegen.

Eine alternierender Weg  $W$  heißt **erweiternd**, wenn sowohl Anfangs-, als auch Endknoten von  $W$  zu keiner Kante aus  $M$  gehören.

Mit Hilfe von erweiternden alternierenden Wegen können Matchings vergrößert werden.

LEMMA 6.64. Ist  $M$  Matching eines schlichten ungerichteten Graphen  $G$  und  $W$  ein erweiternder alternierender Weg in  $G$ , dann ist  $M' := M \Delta W$  ein Matching mit  $|M'| = |M| + 1$  Kanten.

Damit ergibt sich die folgende Charakterisierung von maximalen Matchings.

SATZ 6.65. Ein Matching  $M$  eines schlichten ungerichteten Graphen  $G$  ist genau dann maximal, wenn es keinen erweiternden alternierenden Weg gibt.

Bei paaren Graphen können genauere Antworten gegeben werden.

DEFINITION 6.66. Sei  $G$  ein paarer Graph, d.h.  $G$  ist ein schlichter ungerichteter Graph, dessen Knotenmenge  $V(G)$  in zwei disjunkte Teilmengen  $V_1, V_2$  zerlegt ist, so daß es keine Kanten gibt, die Knoten innerhalb von  $V_1$  verbinden und keine Kanten, die Knoten innerhalb von  $V_2$  verbinden.

Die **Defizienz**  $\delta(G)$  von  $G$  ist durch

$$\delta(G) := \max_{A \subseteq V_1} (|A| - |\Gamma(A)|)$$

definiert.

Man beachte, daß wegen  $|\emptyset| - |\Gamma(\emptyset)| = 0$  die Defizienz  $\delta(G) \geq 0$  ist.

SATZ 6.67. Sei  $G$  ein paarer Graph mit Knotenmenge  $V(G) = V_1 \cup V_2$ . Dann ist die Größe eines maximalen Matchings

$$|V_1| - \delta(G).$$

Man beachte, daß der **Heiratssatz** ein Spezialfall dieses Satzes ( $\delta(G) = 0$ ) ist.

Insbesondere können in einem paaren Graphen auch **vollständige Matchings** charakterisiert werden. (Ein Matching heißt vollständig, wenn alle Knoten zu einer Kante des Matchings gehören.) Wegen des Heiratssatzes gibt es genau dann ein vollständiges Matching, wenn  $|V_1| = |V_2|$  ist und für alle  $A \subseteq V_1$

$$|\Gamma(A)| \geq |A|$$

erfüllt ist.

## 6. Kreise und Schnitte

### 6.1. Kreise und Schnitte.

DEFINITION 6.68. Sei  $G = (V, E)$  ein schlichter ungerichteter Graph. Weiters sei  $V_1, V_2$  eine Zerlegung von  $V$ , d.h.  $V_1 \neq \emptyset$ ,  $V_2 \neq \emptyset$ ,  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$  und  $V_1 \cup V_2 = V$ . Unter dem **Schnitt**  $S = (V_1, V_2)$  von  $G$  versteht man die Menge von Kanten

$$S = (V_1, V_2) := \{(v, w) \in E \mid v \in V_1, w \in V_2\}.$$

d.h. die Kanten, die zwischen  $V_1$  und  $V_2$  bestehen.

Schnitte und Kreise eines schlichten ungerichteten zusammenhängenden Graphen haben erstaunliche Parallelen. Einige sind im folgenden Satz zusammengestellt. (Dabei bezeichne  $\Delta$  die symmetrische Differenz.)

SATZ 6.69. Sei  $G = (V, E)$  ein schlichter ungerichteter zusammenhängender Graph. Dann gelten die folgenden Eigenschaften.

1. Sei  $T$  ein spannender Baum von  $G$  und  $S$  ein Schnitt von  $G$ . Dann ist  $E(T) \cap S \neq \emptyset$ , d.h. jeder Schnitt hat mit jedem spannenden Baum wenigstens eine Kante gemeinsam.
2. Sei  $T$  ein spannender Baum von  $G$  und  $K$  ein Kreis in  $G$ . Dann ist  $(E \setminus E(T)) \cap K \neq \emptyset$ .
3. Sei  $S$  ein Schnitt von  $G$  und  $K$  ein Kreis in  $G$ . Dann ist  $|S \cap K|$  eine gerade Zahl.
4. Sind  $S_1, S_2$  zwei verschiedene Schnitte von  $G$ , dann ist  $S_1 \Delta S_2$  wieder ein Schnitt von  $G$ .
5. Sind  $K_1, K_2$  zwei verschiedene Kreise in  $G$ , dann ist  $K_1 \Delta K_2$  entweder wieder ein Kreis oder die disjunkte Vereinigung von mehreren Kreisen.

### 6.2. Kreis- und Schnittraum.

DEFINITION 6.70. Sei  $G = (V, E)$  ein schlichter ungerichteter Graph mit  $|E| = m$  Kanten. Die Potenzmenge  $\mathbf{P}(E)$  mit der symmetrischen Differenz  $\Delta$  bildet den sogenannten **Kantenraum**  $C_1(G)$  von  $G$ . (Das neutrale Element ist die leere Menge  $\emptyset$  und jede Menge ist zu sich selbst invers:  $B \Delta B = \emptyset$ .)

Der Kantenraum wird als Vektorraum über dem 2-elementigen Körper  $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$  interpretiert. ( $1 \cdot E' := E'$ ,  $0 \cdot E' := \emptyset$ .)

Daß der Kantenraum tatsächlich einen Vektorraum darstellt, sieht man am einfachsten dadurch, daß man eine Teilmenge  $E' \subseteq E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$  der Kanten durch ein  $m$ -Tupel  $(x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{Z}_2^m$  repräsentiert, und zwar ist  $x_j = 1$ , wenn  $e_j \in E'$  und  $x_j = 0$ , wenn  $e_j \notin E'$ . Offensichtlich entspricht der symmetrischen Differenzbildung die komponentenweise Addition modulo 2, also kann der Kantenraum mit  $\langle \mathbb{Z}_2^m, + \rangle$  identifiziert werden. Außerdem entspricht die oben angegebene Skalarmultiplikation  $-1 \cdot E' := E'$ ,  $0 \cdot E' := \emptyset$  – der üblichen Skalarmultiplikation auf  $\mathbb{Z}_2^m$ .

DEFINITION 6.71. Sei  $G = (V, E)$  ein schlichter ungerichteter zusammenhängender Graph. Ein **verallgemeinerter Schnitt** von  $G$  ist entweder die leere Menge oder ein Schnitt. Die Menge aller verallgemeinerter Schnitte wird als **Schnittraum**  $SR(G)$  von  $G$  bezeichnet.

Ein **verallgemeinerter Kreis** in  $G$  ist entweder die leere Menge, ein Kreis oder die disjunkte Vereinigung mehrerer Kreise. Die Menge aller verallgemeinerter Kreise wird als **Kreisraum**  $KR(G)$  von  $G$  bezeichnet.

SATZ 6.72. Sei  $G = (V, E)$  ein schlichter ungerichteter zusammenhängender Graph mit  $n$  Knoten und  $m$  Kanten. Dann gelten folgende Eigenschaften.

- Der Schnittraum  $SR(G)$  bildet einen Teilraum des Kantenraums  $C_1(G)$  der Dimension  $\dim SR(G) = n - 1$ .
- Der Kreisraum  $KR(G)$  bildet einen Teilraum des Kantenraums  $C_1(G)$  der Dimension  $\dim KR(G) = m - n + 1$ .
- Schnittraum und Kreisraum bilden orthogonale Komplemente bezüglich des gewöhnlichen inneren Produkts auf  $C_1(G)$ .

Eine Anwendung dieser Theorie bildet die Theorie linearer (elektrischer) Schaltkreise mit den **Kirchhoffsche Gesetzen**. Hier muß allerdings der Kantenraum über  $\mathbb{R}$  (oder  $\mathbb{C}$ ) betrachtet werden (was in ähnlicher Weise wie oben durchgeführt werden kann, allerdings muß auf  $G$  eine beliebige, aber feste Orientierung gewählt werden.) Die elektrischen Ströme auf den Kanten und die Spannungen zwischen zwei benachbarten Knoten werden dann als Vektoren des Kantenraums interpretiert, wobei sich herausstellt, daß eine zulässige Stromverteilung (die also den Kirchhoffsche Gesetzen genügt) ein verallgemeinerter Kreis ist und eine zulässige Spannungsverteilung ein verallgemeinerter Schnitt. Die oben angegebenen Dimensionen für diese Räume geben also an, wie viele verschiedene Gleichungen für die zu ermittelten Stöme und Spannungen *aufgestellt* werden müssen, um alle Größen berechnen zu können.

## 7. Spiele auf Graphen

### 7.1. Kerne und Grundyfunktionen.

DEFINITION 6.73. Sei  $G = (V, E)$  ein schlichter gerichteter Graph. Eine Teilmenge  $I \subseteq V$  der Knotenmenge heißt **unabhängig** oder **innenstabil**, wenn keine zwei Knoten aus  $I$  durch eine Kante verbunden sind.

Eine Teilmenge  $D \subseteq V$  der Knotenmenge heißt **dominierend** oder **außenstabil**, wenn es für alle Knoten  $v \in V \setminus D$  einen Knoten  $w \in D$  mit  $\langle v, w \rangle \in E$  gibt.

Eine Teilmenge  $K \subseteq V$  der Knotenmenge heißt **Kern**, wenn sie unabhängig und dominierend ist.

Kerne spielen eine entscheidende Rolle bei **Spiele auf Graphen**. Dabei ziehen abwechselnd zwei Personen einen (gemeinsamen) *Spielstein* entlang einer gerichteten Kante von einem Knoten zu einem benachbarten bis ein Spieler nicht mehr weiter ziehen kann.<sup>3</sup>

Betrachten wir einmal die Variante, daß jener Spieler der Gewinner ist, der den letzten Zug machen kann,<sup>4</sup> und sei  $K$  ein Kern des *Spielgraphen*. (Dieser Kern muß alle Endstellungen, d.h. alle Knoten  $v$  mit Weggrad  $d^+(v) = 0$  enthalten.) Ist nun die Anfangstellung ein Knoten im Kern, so kann jener Spieler, der den zweiten Zug macht, immer gewinnen, wenn er folgende Strategie anwendet. Der erste Spieler muß, da der Kern unabhängig ist, zu einem Knoten ziehen, der nicht im Kern liegt. Der zweite Spieler kann darauf, da der Kern dominierend ist, wieder in den Kern zurückziehen usw. Ist die Anfangsstellung umgekehrt ein Knoten außerhalb des Kern, so kann (mit derselben Strategie) jener Spieler immer gewinnen, der den ersten Zug macht. Der Kern repräsentiert daher alle *Gewinnstellungen*.

Bei einem vorgegebenen Spiel geht es also zunächst um die Bestimmung eines Kerns. Dazu kann die *Grundyfunktion* verwendet werden.

<sup>3</sup>Praktische alle Brettspiele, wie z.B. Schach oder Go, lassen sich in so ein Spiel auf einem Graphen übersetzen, allerdings entsteht dadurch (üblicherweise) ein gigantischer Graph, der sich jeder Analyse entzieht.

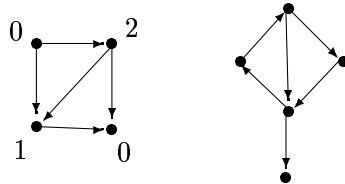
<sup>4</sup>Die Variante, wo jener Spieler verliert, der den letzten Zug machen muß, kann leicht auf den ersteren Fall zurückgeführt werden, indem man bei allen Endstellungen jeweils eine wegführende Kante zu einem neuen Knoten ergänzt.

DEFINITION 6.74. Sei  $G = (V, E)$  ein gerichteter Graph. Eine **Grundyfunktion** ist eine Abbildung  $g : V \rightarrow \mathbb{N}$  mit der Eigenschaft

$$g(v) = \min(\mathbb{N} \setminus g(\Gamma^+(v)))$$

für alle  $v \in V$ , d.h.  $g(v)$  ist die kleinste natürliche Zahl, die bei den Nachfolgern von  $v$  nicht als Funktionswert auftritt.

BEISPIEL 6.75. Der erste Graph  $G_1$  hat die angegebene Grundyfunktion. Für den zweiten Graphen  $G_2$  gibt es keine Grundyfunktion.



SATZ 6.76. Existiert auf einem gerichteten Graphen  $G = (V, E)$  eine Grundyfunktion  $g : V \rightarrow \mathbb{N}$ , so ist die Menge

$$K := \{v \in V \mid g(v) = 0\}$$

ein Kern von  $G$ .

SATZ 6.77. Für jeden azyklischen Graphen  $G$  gibt es eine eindeutig bestimmte Grundyfunktion und einen eindeutig bestimmten Kern.

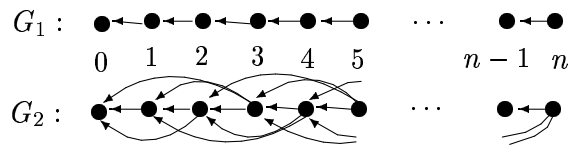
Zunächst hat die Grundyfunktion bei allen Knoten  $v$  mit Weggrad  $d^+(v) = 0$  den Wert  $g(v) = 0$ . Daraufhin bestimmt man die Grundyfunktion für alle Knoten, die nur solche Knoten als Nachfolger haben usw. Die Reihenfolge der Knoten, für die die Grundyfunktion bestimmt werden kann, ergibt sich somit aus dem *Markierungsalgorithmus*.

BEISPIEL 6.78. Beim **NIM-Spiel** entnehmen 2 Spieler abwechselnd eine gewisse Anzahl von Spielsteinen eines Haufens, z.B. immer einen Stein, oder ein, zwei oder drei Steine.

Die entsprechenden Graphen dieser Spiele (mit anfänglich  $n$  Steinen) können durch die Knotenmenge  $V = \{0, 1, 2, \dots, n\}$  beschrieben werden. Darf immer nur ein Stein gezogen werden, so ist die Kantenmenge

$$E(G_1) = \{\langle k + 1, k \rangle \mid 0 \leq k \leq n - 1\}.$$

Dürfen in einem Zug ein, zwei oder drei Steine gezogen werden, dann ist die Kantenmenge durch  $E(G_2) = \{\langle k + 1, k \rangle \mid 0 \leq k \leq n - 1\} \cup \{\langle k + 2, k \rangle \mid 0 \leq k \leq n - 2\} \cup \{\langle k + 3, k \rangle \mid 0 \leq k \leq n - 3\}$  gegeben.



Im ersten Fall, also bei  $G_1$ , ist die Grundyfunktion

$$\begin{aligned} g(0) &= g(2) = g(4) = \dots = 0, \\ g(1) &= g(3) = g(5) = \dots = 1, \end{aligned}$$

d.h. der Kern besteht aus allen geraden Knoten. Im zweiten Fall ist

$$\begin{aligned} g(0) &= g(4) = g(8) = \dots = 0, \\ g(1) &= g(5) = g(9) = \dots = 1, \\ g(2) &= g(6) = g(10) = \dots = 2, \\ g(3) &= g(7) = g(11) = \dots = 3. \end{aligned}$$

Hier besteht der Kern aus allen Knoten, die durch vier teilbar sind. Es ist klar, welcher *Gewinnstrategien* diese Kerne entsprechen.

## 7.2. Produkte von Spielen.

DEFINITION 6.79. *Es seien  $G_1 = (V_1, E_1), G_2 = (V_2, E_2), \dots, G_M = (V_M, E_M)$ , gerichtete Graphen. Dann besteht das **Produkt**  $G = G_1 \times G_2 \times \dots \times G_M$  aus der Knotenmenge*

$$V(G) := V_1 \times V_2 \times \dots \times V_M$$

*und  $\langle (v_1, v_2, \dots, v_M), (w_1, w_2, \dots, w_M) \rangle$  (mit  $v_i, w_i \in V_i, 1 \leq i \leq M$ ) ist eine Kante in  $G$ , wenn es ein  $j$  gibt mit  $\langle v_j, w_j \rangle \in E_j$  und  $v_i = w_i$  für  $i \neq j, 1 \leq i \leq M$ .*

Diese Produktbildung hat folgende Interpretation für Spielgraphen. Man nehme an,  $G_1, G_2, \dots, G_M$  repräsentieren Spiele. Im *Produktspiel*  $G = G_1 \times G_2 \times \dots \times G_M$  spielen nun wieder abwechselnd zwei Spieler, wobei jeder Spielzug aus zwei Schritten besteht. Im ersten wird ein Spiel  $G_j$  ausgewählt und im zweiten in diesem Spiel von einem Knoten entlang einer Kante zu einem anderen Knoten gezogen.

Interessanterweise genügt es, die Einzelspiele ausreichend zu kennen. Um den folgenden Satz formulieren zu können, definieren wir auf den natürlichen Zahlen eine *neue Addition*, die binäre Addition ohne Übertrag. Für  $m, n \in \mathbb{N}$  sei  $m \oplus n$  folgendermaßen definiert. Man bestimme die binäre Ziffernentwicklungen von  $m$  und  $n$  und addiere die Ziffern ohne Übertrag, d.h.  $0 + 0 = 0, 0 + 1 = 1 + 0 = 1$  und  $1 + 1 = 0$ . Die daraus erhaltene Ziffernfolge sei nun die binäre Ziffernentwicklung von  $m \oplus n$ .

SATZ 6.80. *Es seien  $G_1 = (V_1, E_1), G_2 = (V_2, E_2), \dots, G_M = (V_M, E_M)$ , gerichtete Graphen und  $g_j : V_j \rightarrow \mathbb{N}, 1 \leq j \leq M$ , Grundyfunktionen auf  $G_j$ . Dann ist die durch*

$$g((v_1, v_2, \dots, v_M)) := g_1(v_1) \oplus g_2(v_2) \oplus \dots \oplus g_M(v_M)$$

*definierte Funktion  $g : V_1 \times V_2 \times \dots \times V_M \rightarrow \mathbb{N}$  eine Grundyfunktion auf  $G = G_1 \times G_2 \times \dots \times G_M$ .*

BEISPIEL 6.81. **NIM-Spiel mit mehreren Haufen:** Es seien z.B. drei Haufen von Spielsteinen gegeben. Die zwei Spieler dürfen abwechselnd von einem der drei Haufen einen, zwei oder drei Steine entnehmen. Gewinner ist jeder, der den letzten Stein nehmen kann. Nun kann mit Hilfe des vorigen Satzes mit den bereits bekannten Grundyfunktionen der einzelnen drei Spiele entschieden werden, welche Stellungen Gewinnstellungen sind.

## 8. Erzeugende Funktionen von Graphen

### 8.1. Ungerichtete Graphen.

SATZ 6.82. *Es sei  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  eine Menge von  $n$  Knoten. Dann ist die Anzahl  $T_{nm}$  der verschiedenen schlichten ungerichteten Graphen  $G$  mit  $V(G) = V$  und  $m$  Kanten durch*

$$T_{nm} = \binom{\binom{n}{2}}{m}$$

gegeben. Die (gemischte) erzeugende Funktion dieser Anzahlen ist

$$\sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 0} T_{nm} \frac{x^n}{n!} y^m = \sum_{n \geq 0} (1+y)^{\binom{n}{2}} \frac{x^n}{n!}.$$

Bezeichnet  $C_{nm}$  die Anzahl der verschiedenen zusammenhängenden schlichten ungerichteten Graphen, so gilt auch

$$\sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 0} C_{nm} \frac{x^n}{n!} y^m = \log \left( \sum_{n \geq 0} (1+y)^{\binom{n}{2}} \frac{x^n}{n!} \right).$$

### 8.2. Gerichtete Graphen.

SATZ 6.83. *Es sei  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  eine Menge von  $n$  Knoten. Dann ist die Anzahl  $T_{nm}$  der verschiedenen schlichten gerichteten Graphen  $G$  mit  $V(G) = V$  und  $m$  Kanten durch*

$$T_{nm} = \binom{n(n-1)}{m}$$

gegeben. Die (gemischte) erzeugende Funktion dieser Anzahlen ist

$$\sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 0} T_{nm} \frac{x^n}{n!} y^m = \sum_{n \geq 0} (1+y)^{n(n-1)} \frac{x^n}{n!}.$$

Bezeichnet  $C_{nm}$  die Anzahl der verschiedenen zusammenhängenden schlichten gerichteten Graphen, so gilt auch

$$\sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 0} C_{nm} \frac{x^n}{n!} y^m = \log \left( \sum_{n \geq 0} (1+y)^{n(n-1)} \frac{x^n}{n!} \right).$$

### 8.3. Markierte Bäume.

SATZ 6.84. *Es sei  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  eine Menge von  $n$  Knoten. Dann ist die Anzahl  $T_n$  der verschiedenen Bäume  $T$  mit  $V(T) = V$  durch*

$$T_n = n^{n-2}$$

gegeben. Die exponentielle erzeugende Funktion dieser Anzahlen ist

$$\sum_{n \geq 0} T_n \frac{x^n}{n!} = \hat{r}(x) - \frac{1}{2} \hat{r}(x)^2,$$

wobei  $\hat{r}(x)$  die Gleichung

$$\hat{r}(x) = x e^{\hat{r}(x)}$$

erfüllt.

#### 8.4. Unmarkierte Bäume — der Satz von Otter.

SATZ 6.85. *Es sei  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  eine Menge von  $n$  Knoten und  $\mathcal{T}_n$  die Menge der Bäume  $T$  mit  $V(T) = V$ . Weiters sei  $\tilde{T}_n$  die Anzahl der Isomorphieklassen in  $\mathcal{T}_n$ . Die gewöhnliche erzeugende Funktion dieser Anzahlen ist*

$$\sum_{n \geq 0} \tilde{T}_n \frac{x^n}{n!} = r(x) - \frac{1}{2} (r(x)^2 - r(x^2))$$

gegeben, wobei  $r(x)$  die Gleichung

$$r(x) = x e^{r(x) + \frac{1}{2}r(x^2) + \frac{1}{3}r(x^3) + \dots}$$

erfüllt.





## Algorithmen für Netzwerke

### 1. Minimales Gerüst: Kruskal-Algorithmus

DEFINITION 7.1. Ein **Netzwerk** bzw. ein **bewerteter Graph** ist ein gerichteter oder ungerichteter Graph  $G = (V, E)$ , wo jeder Kante  $e \in E$  ein **Wert** (Gewicht, Länge, Kapazität)  $w(e) \in \mathbb{R}$  zugeordnet wird, d.h. es gibt noch eine Funktion  $w : E \rightarrow \mathbb{R}$ .

Für jede Teilmenge  $F \subseteq E$  von Kanten heißt

$$w(F) = \sum_{e \in F} w(e)$$

**Gewicht** von  $F$ .

Üblicherweise wird auch vorausgesetzt, daß für alle  $w(e) \geq 0$  gilt. In manchen Anwendungen ist es auch sinnvoll, die Bewertung  $w(e) = \infty$  zuzulassen.

Mit Hilfe des **Kruskal-Algorithmus** gelingt es in sehr einfacher Weise ein minimales bzw. maximales Gerüst eines Netzwerkes ( $G = (V, E)$  mit nichtnegativem Gewicht  $w : E \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ ) zu bestimmen.

1. Man nummeriere die Kanten  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$  nach steigendem Gewicht:

$$w(e_1) \leq w(e_2) \leq \dots \leq w(e_m).$$

2. Setze  $E' := \emptyset$ .

```

for  $j := 1$  to  $m$  do
  if  $(V, E' \cup \{e_j\})$  kreisfrei then
     $E' := E' \cup \{e_j\}$ 
  end;
end;
```

$W = (V, E')$  ist nun ein minimales Gerüst von  $G$ .

Um ein maximales Gerüst zu erhalten, muß man in 1. die Kanten nach fallendem Gewicht ordnen.

Hat  $G$   $n$  Knoten und  $k$  Zusammenhangskomponenten, so hat jedes Gerüst von  $G$  genau  $n - k$  Kanten. Daher kann 2. abgebrochen werden, wenn  $E'$  bereits  $n - k$  Kanten enthält.

Man beachte, daß es im allgemeinen es eine sehr große Anzahl von Gerüsten in einem Graphen gibt, die mit Hilfe des Matrix-Baum-Theorems berechnet werden kann. (Man kann sich damit auch einen *Überblick* über alle möglichen Gerüste zu verschaffen.) Trotzdem kann ein minimales Gerüst mit Hilfe des Kruskal-Algorithmus sehr leicht zu bestimmen.

## 2. Kürzester Weg: Dijkstra-Algorithmus

DEFINITION 7.2. Sei  $G = (V, E)$  ein Netzwerk mit Bewertung  $w : E \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ . Die **Länge** einer Kantenfolge  $e_1, e_2, \dots, e_k$  ist durch die Summe der Gewichte

$$w(\{e_1, e_2, \dots, e_k\}) = \sum_{j=1}^k w(e_j)$$

gegeben. Die **Distanz**  $d(v, w)$  zwischen zwei Knoten  $v_1, v_2 \in V$  ist die kleinstmögliche Länge einer  $KF(v_1, v_2)$ . Gibt es keine  $KF(v_1, v_2)$ , so setzt man  $d(v_1, v_2) = \infty$ .

Mit Hilfe des **Dijkstra-Algorithmus** wird von einem Knoten  $v_0 \in V$  eines Netzwerkes mit nichtnegativem Gewicht die Distanz  $d(v_0, v)$  für alle Knoten  $v \in V$  bestimmt.

1. Setze  $W := \emptyset$ ,  $U := V$ ,  $l(v_0) := 0$ ,  $l(v) := \infty$  für alle  $v \in V \setminus \{v_0\}$  und  $p(v) = *$  für alle  $v \in V$ .
2. Man bestimme  $m = \min_{v \in U} l(v)$ , wähle eine Knoten  $z \in U$  mit  $l(z) = m$ .
3. Man setze  $W := W \cup \{z\}$ ,  $U := U \setminus \{z\}$  und für  $v \in U$ , die  $l(v) > l(z) + w(z, v)$  erfüllen, setze man  $p(v) := z$  und

$$l(v) := l(z) + w(z, v).$$

4. Ist  $W = V \rightarrow$  **ENDE**.  
Ist  $l(v) = \infty$  für alle  $v \in U \rightarrow$  **ENDE**.  
Gehe zu 2.

Die Menge  $W \subseteq V$  umfaßt in jedem Zeitpunkt des Algorithmus jene  $v \in V$ , für die schon bekannt ist, daß  $l(v) = d(v_0, v)$  ist. Für  $v \in U$  ist hingegen  $l(v)$  die minimale Länge einer Kantenfolge  $KF(v_0, v)$ , die mit Ausnahme von  $v$  nur Knoten aus  $W$  enthält.  $p(v)$  ist jeweils der Vorgängerknoten von  $v$  auf einer minimalen Kantenfolge  $KF(v_0, v)$ .

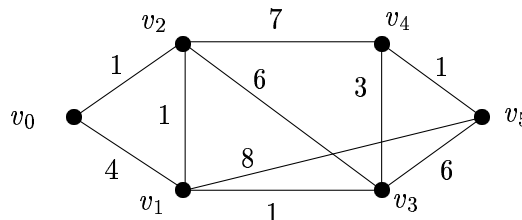
Aus diesen Bedingungen ist klar, daß der in 2. ausgewählte Knoten  $z \in U$  in  $W$  aufgenommen werden kann. Für  $v \in U \setminus \{z\}$  wird in 3.  $l(v)$  neu berechnet, da  $W$  um  $z$  erweitert wurde.

Endet der Algorithmus nicht mit  $W = V$ , sondern mit der Abbruchbedingung  $l(v) = \infty$  für alle  $v \in U$ , so ist  $G$  nicht zusammenhängend, und  $W$  umfaßt genau jene Knoten, die von  $v_0$  aus erreichbar sind.

Sucht man übrigens zu einem bestimmten Punkt  $v_1 \in V$  die Distanz  $d(v_0, v_1)$ , so kann der Algorithmus auch dann abgebrochen werden, wenn  $v_1$  in  $W$  aufgenommen wird.

Für  $v \in W$  kann durch  $v, p(v), p(p(v)), \dots, v_0$  eine  $KF(v_0, v)$  von kleinstmöglicher Länge rückverfolgt werden. Möchte man alle Kantenfolgen kleinstmöglicher Länge finden, so muß in 3. für alle Knoten  $v$  mit  $l(v) = l(z) + w(z, v)$  der Knoten  $z$  als *alternatives*  $p(y)$  vermerkt werden.

BEISPIEL 7.3. Im folgenden Graphen sollen alle Distanzen  $d(v_0, v)$  bestimmt werden.



## 1. Durchlauf

$$\begin{aligned}
m &= 0 \\
z &= v_0 \\
W &= \{v_0\}, U = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} \\
l(v_1) &= 4, l(v_2) = 1, l(v_3) = l(v_4) = l(v_5) = \infty \\
p(v_1) &= v_0, p(v_2) = v_0, p(v_3) = p(v_4) = p(v_5) = *
\end{aligned}$$

## 2. Durchlauf

$$\begin{aligned}
m &= 1 \\
z &= v_2 \\
W &= \{v_0, v_2\}, U = \{v_1, v_3, v_4, v_5\} \\
l(v_1) &= 2, l(v_3) = 7, l(v_4) = 8, l(v_5) = \infty \\
p(v_1) &= v_2, p(v_3) = v_2, p(v_4) = v_2, p(v_5) = *
\end{aligned}$$

## 3. Durchlauf

$$\begin{aligned}
m &= 2 \\
z &= v_1 \\
W &= \{v_0, v_1, v_2\}, U = \{v_3, v_4, v_5\} \\
l(v_3) &= 3, l(v_4) = 8, l(v_5) = 10 \\
p(v_3) &= v_1, p(v_4) = v_2, p(v_5) = v_1
\end{aligned}$$

## 4. Durchlauf

$$\begin{aligned}
m &= 3 \\
z &= v_3 \\
W &= \{v_0, v_1, v_2, v_3\}, U = \{v_4, v_5\} \\
l(v_4) &= 6, l(v_5) = 9 \\
p(v_4) &= v_3, p(v_5) = v_3
\end{aligned}$$

## 5. Durchlauf

$$\begin{aligned}
m &= 6 \\
z &= v_4 \\
W &= \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4\}, U = \{v_5\} \\
l(v_5) &= 7 \\
p(v_5) &= v_4
\end{aligned}$$

## 6. Durchlauf

$$\begin{aligned}
m &= 7 \\
z &= v_3 \\
W &= \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}, U = \emptyset \\
\mathbf{ENDE}
\end{aligned}$$

Man erhält damit  $d(v_0, v_1) = 2$ ,  $d(v_0, v_2) = 1$ ,  $d(v_0, v_3) = 3$ ,  $d(v_0, v_4) = 6$  und  $d(v_0, v_5) = 7$ .

### 3. Kürzester Weg: Moore-Algorithmus

Ein Nachteil des Dijkstra-Algorithmus ist, daß er nur für nicht-negative Gewichte funktioniert. Der **Moore-Algorithmus** kann hingegen auch für allgemeine Gewichte verwendet werden. Er basiert auf der Grundidee, daß so lange, wie möglich eine *Verbesserung*

$$l(v) := \min(l(v), l(z) + w(z, v))$$

durchgeführt wird. Diese Vorgangsweise führt, falls es keine Zyklen negativer Länge gibt, in endlich vielen Schritten zur Distanz  $l(v) = d(v_0, v)$  oder man erkennt, daß es einen Zyklus negativer Länge gibt, womit der Distanzbegriff nicht mehr sinnvoll ist.

Die folgende Version des Moore-Algorithmus vermeidet *unnötige Schritte* und berechnet ausgehend von einem Startknoten  $v_0$  die Distanzen  $l(v) = d(v_0, v)$  für alle  $v \in V(G)$ .  $a(v)$  bezeichnet dabei jeweils die Anzahl der Kanten auf dem momentan kürzesten Weg von  $v_0$  nach  $v$ ,  $p(v)$  den Vorgänger von  $v$  auf diesem (momentanen) kürzesten Weg und  $ANZ$  die Anzahl der Durchläufe. Schließlich deutet  $IND$  an, ob der Algorithmus abgebrochen werden kann.

Man geht davon aus, daß die Knoten  $V(G) = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$  durchnummeriert sind.

1. Setze  $l(v_0) := 0$ ,  $a(v_0) := 0$ ,  $p(v_0) := *$  und für alle Knoten  $v \in V(G) \setminus \{v_0\}$   $l(v) := \infty$ ,  $a(v) := 1$ ,  $p(v) := *$ . Weiters setze für alle Kanten  $e = (v, w)$ ,  $v \neq w$ , die nicht in  $G$  liegen  $w(e) := \infty$ , für alle Schlingen  $w(v, v) := 0$  und schließlich  $ANZ := 0$  und  $IND := 0$ .
2.   **for**  $j := 0$  **to**  $n$  **do**  
       **if**  $a(v_j) = ANZ$  **then**  
           **for**  $k = 1$  **to**  $n$   
               **if**  $l(v_j) + w(v_j, v_k) < l(v_k)$  **then**  
                    $IND := 1$   
                    $l(v_k) := l(v_j) + w(v_j, v_k)$   
                    $a(v_k) := a(v_j) + 1$   
                    $p(v_k) := p(v_j)$   
               **endif**;  
           **end**;  
       **endif**;  
   **end**;
3. Ist  $IND = 0 \rightarrow$  **ENDE**.  
    Ist  $IND = 1$ , dann führe folgendes aus:  
        $ANZ := ANZ + 1$   
       **if**  $ANZ \geq n$  **then**  $\rightarrow$  **ENDE**  
       (Es gibt einen Zyklus negativer Länge.)  
    Gehe zu 2.

Es ist zwar ein Vorteil, daß der Moore-Algorithmus auch negative Bewertungen behandeln kann, man muß aber, auch wenn man nur an der Distanz zwischen zwei bestimmten Knoten  $d(v_0, w)$  bestimmen will, *alle* Distanzen  $d(v_0, v)$ ,  $v \in V(G)$  ermitteln. Der Algorithmus kann nicht frühzeitig abgebrochen werden.

#### 4. Kürzester Weg: Floyd-Warshall-Algorithmus

Eine weitere Methode, die Distanzen zwischen den Knoten eines Netzwerkes zu bestimmen, ist der **Floyd-Warshall-Algorithmus**.

1. **Input:** Es sei  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  die Menge der Knoten und  $M = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  die Matrix der Bewertungen der Kanten  $m_{ij} := w(v_i, v_j)$ . (Für Schlingen gelte  $w(v_i, v_i) := 0$  und für Kanten  $(v_i, v_j)$ , die nicht in  $G$  enthalten sind,  $w(v_i, v_j) := \infty$ .)

2. **Algorithmus:**

```

for i := 1 to n do
  for j := 1 to n do
    for k := 1 to n do
       $m_{jk} := \min(m_{jk}, m_{ji} + m_{ik})$ 
    end;
    if  $m_{jj} < 0$  then → ENDE
    (Es gibt einen Zyklus negativer Länge.)
  end;
end;

```

3. **Output:** Die resultierende Matrix  $(m_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  ist nun die Matrix der Distanzen  $m_{ij} = d(v_i, v_j)$ .

In diesem Algorithmus werden simultan alle Distanzen  $d(v_i, v_j)$  berechnet, auch wenn es negative Bewertungen gibt.

#### 5. Maximaler Fluß: Ford-Fulkerson-Algorithmus

Im folgenden sei  $G = (V, E)$  ein gerichteter, bewerteter Graph, auf dem zwei Knoten  $s, t \in V$  ausgezeichnet sind.  $s$  habe Eingrad  $d^-(s) = 0$  und wird als **Quelle** bezeichnet und  $t$  habe Ausgangsgrad  $d^+(t) = 0$  und wird als **Senke** bezeichnet. Weiters seien

$$\Gamma^+(x) = \{y \in V \mid \langle x, y \rangle \in E\}$$

die **Nachfolger** von  $x \in V$  und

$$\Gamma^-(x) = \{y \in V \mid \langle y, x \rangle \in E\}$$

die **Vorgänger** von  $x \in G$ .

**DEFINITION 7.4.** Sei  $G = (V, E)$  ein gerichteter, bewerteter Graph mit Quelle  $s$ , Senke  $t$  und Bewertung  $w : E \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ . Eine Funktion  $\phi : E \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **Fluß** auf  $G$ , wenn

(i) für alle Kanten  $e \in E$

$$0 \leq \phi(e) \leq w(e)$$

gilt und

(ii) für alle Knoten  $x \in V \setminus \{s, t\}$  die Flußbedingung

$$\sum_{y \in \Gamma^-(x)} \phi(\langle y, x \rangle) = \sum_{y \in \Gamma^+(x)} \phi(\langle x, y \rangle)$$

erfüllt ist, d.h. es fließt genauso viel ab wie zu.

Die **Größe eines Flusses**  $\phi$  ist durch

$$v(\phi) = \sum_{y \in \Gamma^+(s)} \phi(\langle s, y \rangle)$$

gegeben.

Die Größe eines Flusses  $\phi$  kann auch auf andere Art bestimmt werden. Wegen der Flußbedingung (ii) gilt z.B.

$$v(\phi) = \sum_{x \in \Gamma^-(t)} \phi(\langle x, t \rangle),$$

was aus der Quelle  $s$  herausfließt, muß in die Senke  $t$  wieder zurückfließen. Die Größe jedes Flusses  $\phi$  ist daher sicherlich durch

$$v(\phi) \leq \min \left( \sum_{y \in \Gamma^+(s)} w(\langle s, y \rangle), \sum_{y \in \Gamma^+(s)} w(\langle s, y \rangle) \right)$$

beschränkt. Um noch bessere Abschätzungen zu erhalten, benötigt man eine entsprechende Adaptierung des Begriffs eines Schnittes für gerichtete Graphen.

**DEFINITION 7.5.** Sei  $V(G) = V_1 \cup V_2$  eine Zerlegung der Knotenmenge  $V(G)$  in zwei nichtleere, disjunkte Teilmengen, d.h.  $V_1 \neq \emptyset$ ,  $V_2 \neq \emptyset$ ,  $V_1 \cup V_2 = V(G)$  und  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ . Ein **Schnitt**  $S = (V_1, V_2)$  auf  $G$  besteht dann aus allen Kanten  $e \in E(G)$ , die Knoten aus  $V_1$  mit Knoten aus  $V_2$  verbinden oder umgekehrt, d.h.

$$S = (V_1, V_2) = (V_1 \rightarrow V_2) \cup (V_1 \leftarrow V_2),$$

wobei

$$(V_1 \rightarrow V_2) = \{\langle x, y \rangle \in E(G) \mid x \in V_1, y \in V_2\}$$

und

$$(V_1 \leftarrow V_2) = \{\langle y, x \rangle \in E(G) \mid x \in V_1, y \in V_2\}$$

bezeichnen.

**DEFINITION 7.6.** Sei  $G = (V, E)$  ein gerichteter, bewerteter Graph und  $S = (V_1, V_2)$  ein Schnitt auf  $G$ , der die Quelle  $s$  und die Senke  $t$  trennt, d.h.  $s \in V_1$  und  $t \in V_2$ . Dann bezeichnet

$$c(S) = \sum_{e \in (V_1 \rightarrow V_2)} w(e)$$

die **Kapazität des Schnittes**  $S$ .

**SATZ 7.7.** Sei  $G = (V, E)$  ein gerichteter, bewerteter Graph. Dann gilt für jeden Fluß  $\phi$  auf  $G$

$$v(\phi) \leq \min_{S=(V_1, V_2), s \in V_1, t \in V_2} c(S).$$

Die Größe eines Flusses  $\phi$  kann also nie größer sein als die Kapazität irgendeines Schnittes  $S = (V_1, V_2)$ , der  $s$  und  $t$  trennt. Interessant ist, daß es auch immer einen Fluß gibt, dessen Größe gleich der kleinsten Kapazität eines solchen Schnittes ist.

**SATZ 7.8 (Ford-Fulkerson).** Sei  $G = (V, E)$  ein gerichteter, bewerteter Graph. Dann gilt

$$\max_{\phi \text{ Fluß auf } G} v(\phi) = \min_{S=(V_1, V_2), s \in V_1, t \in V_2} c(S).$$

Der Satz von Ford und Fulkerson ist in dem Sinn auch konstruktiv, daß man bei ganzwertigen (bzw. rationalwertigen) Bewertungen mit Hilfe des **Algorithmus von Ford und Fulkerson** einen maximalen Fluß immer auch berechnen kann.

Im folgenden sei nun  $G = (V, E)$  ein gerichteter, bewerteter Graph mit Quelle  $s$  und Senke  $t$ , so daß die Gewichtsfunktion  $w : E \rightarrow \mathbb{N}_0$  nur nichtnegative ganzzahlige Werte annimmt.

Ähnlich wie beim Dijkstra-Algorithmus wird jeder Knoten  $x \in V$  mit einem *signierten Vorgänger*  $p(x)$  und einem *Wert*  $\delta(x)$  markiert.

1. Setze  $\phi(e) := 0$  für alle  $e \in E$ .
2. Setze  $p(s) := +s, \delta(s) := \infty, V_1 := \{s\}$  und  $V_2 := V \setminus \{s\}$ .
3. (a) Für alle  $x \in V_1$  und  $y \in \Gamma^+(x) \cap V_2$  führe folgendes aus:
 

```

      if  $\phi(\langle x, y \rangle) < w(\langle x, y \rangle)$  then
         $p(y) := +x;$ 
         $\delta(y) := \min(\delta(x), w(\langle x, y \rangle) - \phi(\langle x, y \rangle));$ 
         $V_1 := V_1 \cup \{y\}; V_2 := V_2 \setminus \{y\};$ 
      end;
```

 (b) Für alle  $x \in V_1$  und  $y \in \Gamma^-(x) \cap V_2$  führe folgendes aus:
 

```

      if  $\Phi(\langle x, y \rangle) > 0$  then
         $p(y) := -x;$ 
         $\delta(y) := \min(\delta(x), \Phi(\langle x, y \rangle));$ 
         $V_1 := V_1 \cup \{y\}; V_2 := V_2 \setminus \{y\};$ 
      end;
```
4. Falls im letzten Durchlauf von 3.  $V_1$  vergrößert wurde oder  $t \in V_2$  ist, gehe zu 3.
5. (a) Ist  $t \in V_2 \rightarrow$  **ENDE**.
 (b)  $x := t;$ 

```

      while  $x \neq s$  do
        if  $p(x) = +z$  then
           $\phi(\langle z, x \rangle) := \phi(\langle z, x \rangle) + \delta(t);$ 
           $x := z;$ 
        end;
        if  $p(x) = -z$  then
           $\phi(\langle z, x \rangle) := \phi(\langle z, x \rangle) - \delta(t);$ 
           $x := z;$ 
        end;
      end;
```
6. Gehe zu 2.

In 1. wird der Fluß zu 0 gesetzt, da der Nullfluß sicherlich ein gültiger Fluß ist. Man könnte hier auch mit einem anderen bekannten Fluß beginnen.

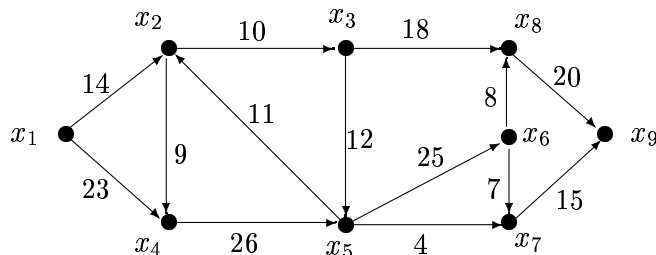
In 2. werden der Markierungen  $p(s)$  und  $\delta(s)$  initialisiert, und in 3. wird versucht, möglichst alle Knoten zu markieren. Dabei  $\delta(x)$  jeweils den maximalen Wert, um den man den Fluß entlang eines Weges  $W(s, x)$  erhöhen könnte, ohne die Flußbeschränkung  $0 \leq \phi \leq w$  zu verletzen. (Wenn man entlang eines Weges den Fluß um einen gewissen Wert erhöht, bleibt die Flußbedingung sicherlich richtig und muß daher an dieser Stelle des Algorithmus nicht berücksichtigt werden.)  $p(x) = \pm z$  ist der jeweilig Vorgänger von  $x$  auf diesem Weg.  $p(x) = +z$ , wenn  $e = \langle z, x \rangle \in E$ , d.h.  $e$  ist gleichorientiert wie der Weg  $W(s, x)$ . Um den Fluß auf  $W(s, x)$  zu erhöhen, muß  $\phi(e)$  erhöht werden.  $p(x) = -z$ , wenn  $e = \langle x, z \rangle \in E$ , d.h.  $e$  ist zum Weg  $W(s, x)$  gegenorientiert. Um

den Fluß auf  $W(s, x)$  zu erhöhen, muß  $\phi(e)$  daher erniedrigt werden. Alle markierten Knoten werden in  $V_1$  aufgenommen.

Kann man in 3. auch die Senke  $t$  markieren, so gibt es einen Weg von  $s$  nach  $t$ , auf dem der Fluß um den Wert  $\delta(t)$  erhöht werden kann. Dies wird in 5. durchgeführt.

2.–6. wird so lange wiederholt, bis es in 3. nicht mehr gelingt, auch die Senke  $t$  zu markieren. In diesem Fall ist  $S = (V_1, V_2)$ , der  $s$  und  $t$  trennt, und, wie man sofort sieht,  $c(S) = v(\phi)$ . (3. bricht ab, wenn alle Kanten  $e \in (V_1 \rightarrow V_2)$  saturiert sind und wenn auf allen Kanten  $e \in (V_1 \leftarrow V_2)$  kein Fluß fließt.) Daher hat man einen maximalen Fluß gefunden.

BEISPIEL 7.9. Es sei folgendes Netzwerk mit Quelle  $s = x_1$  und Senke  $t = x_9$  vorgegen:



Im 1. Durchlauf erhält man folgende Markierungen:

$$\begin{aligned} p(x_1) &= +x_1, \delta(x_1) = \infty, \\ p(x_2) &= +x_1, \delta(x_2) = 14, \\ p(x_3) &= +x_2, \delta(x_3) = 10, \\ p(x_4) &= +x_1, \delta(x_4) = 23, \\ p(x_5) &= +x_3, \delta(x_5) = 10, \\ p(x_6) &= +x_5, \delta(x_6) = 10, \\ p(x_7) &= +x_5, \delta(x_7) = 4, \\ p(x_8) &= +x_3, \delta(x_8) = 10, \\ p(x_9) &= +x_7, \delta(x_9) = 4. \end{aligned}$$

Es gibt also einen Weg von  $x_1$  nach  $x_9$ , auf dem der Fluß um  $\delta(x_9) = 4$  erhöht werden kann. Mit Hilfe der Funktion  $p$  kann dieser Weg rückverfolgt werden ( $x_9 \leftarrow x_7 \leftarrow x_5 \leftarrow x_3 \leftarrow x_2 \leftarrow x_1$ ). Der Fluß wird daher auf den Kanten  $\langle x_1, x_2 \rangle$ ,  $\langle x_2, x_3 \rangle$ ,  $\langle x_3, x_5 \rangle$ ,  $\langle x_5, x_7 \rangle$  und  $\langle x_7, x_9 \rangle$  von 0 auf 4 erhöht werden.

Im zweiten Durchlauf kann man den Fluß auf den Kanten  $\langle x_1, x_2 \rangle$ ,  $\langle x_2, x_3 \rangle$ ,  $\langle x_3, x_5 \rangle$ ,  $\langle x_5, x_6 \rangle$ ,  $\langle x_6, x_7 \rangle$  und  $\langle x_7, x_9 \rangle$  um 6 erhöhen.

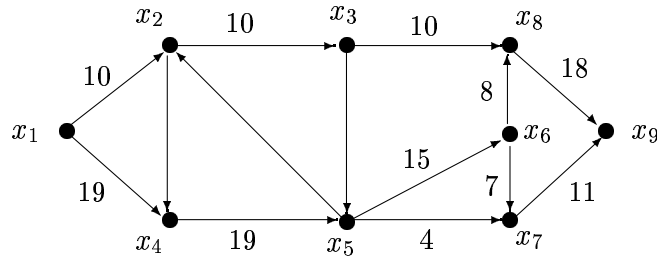
Im dritten Durchlauf erhöht man den Fluß auf den Kanten  $\langle x_1, x_4 \rangle$ ,  $\langle x_4, x_5 \rangle$ ,  $\langle x_5, x_6 \rangle$ ,  $\langle x_6, x_7 \rangle$  und  $\langle x_7, x_9 \rangle$  um 1.

Im nächsten Durchlauf wird der Fluß auf den Kanten  $\langle x_1, x_4 \rangle$ ,  $\langle x_4, x_5 \rangle$ ,  $\langle x_3, x_8 \rangle$  und  $\langle x_8, x_9 \rangle$  um 10 erhöht und auf der Kante  $\langle x_3, x_5 \rangle$  um 10 verkleinert.

Schließlich vergrößert man noch im fünften Durchlauf den Fluß auf den Kanten  $\langle x_1, x_4 \rangle$ ,  $\langle x_4, x_6 \rangle$ ,  $\langle x_5, x_6 \rangle$ ,  $\langle x_6, x_8 \rangle$  und  $\langle x_8, x_9 \rangle$  um 8 und erhält folgendes Bild, wobei die Eintragungen an den Kanten nun den Fluß representieren.

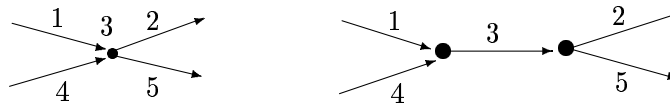
Im letzten Durchlauf gelingt es nicht mehr, alle Knoten zu markieren. Man erhält den Schnitt  $S = (V_1, V_2)$  mit  $V_1 = \{x_1, x_2, x_4, x_5, x_6\}$  und  $V_2 = \{x_3, x_7, x_8, x_9\}$ . Es ist leicht zu verifizieren, daß die Kapazität dieses Schnittes 29 mit dem Wert des momentanen Flusses übereinstimmt.





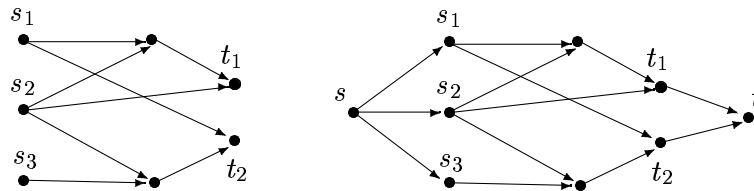
Obwohl der obige Algorithmus nur für Netzwerke (d.h. mit Kantenbewertungen) mit einer Quelle  $s$  und einer Senke  $t$  formuliert wurde, kann er auch in allgemeineren Situationen angewandt werden, indem man folgende Modifikationen durchführt.

Zunächst können auch **Knotenkapazitäten** berücksichtigt werden. Ein Knoten  $v$  mit einer Knotenkapazität  $c(v)$  wird formal zu einer gerichteten Kante  $e_v := \langle v', v'' \rangle$  aufgebläht, die die Kapazität  $w(e_v) := c(v)$  erhält:



Offensichtlich entsprechen Flüsse des ursprünglichen und des neuen Netzwerkes einander eindeutig.

Weiters kann auch die Situation **mehrerer Quellen und Senken** auf den ersteren Fall einer Quelle und einer Senke zurückgeführt werden, indem man eine *künstliche* Quelle vor die Quellen schaltet bzw. eine *künstliche* Senke nach den Senken einfügt. Die zusätzlichen Kanten erhalten alle die Kapazität  $\infty$  bzw. einen ausreichend hohen Wert:



Schließlich soll noch die Situation **oberer und unterer Kapazitäten** untersucht werden. Anstelle einer *Bewertung*  $w(e)$ , wird nun jeder Kante ein Intervall  $[w_u(e), w_o(e)]$  zugeordnet. Eine Funktion  $\phi : E \rightarrow \mathbb{R}$  heißt nun **Fluß** auf  $G$ , wenn

- (i) für alle Kanten  $e \in E$

$$w_u(e) \leq \phi(e) \leq w_o(e)$$

gilt und

- (ii) (wie oben) für alle Knoten  $x \in V \setminus \{s, t\}$  die Flußbedingung

$$\sum_{y \in \Gamma^-(x)} \phi(\langle y, x \rangle) = \sum_{y \in \Gamma^+(x)} \phi(\langle x, y \rangle)$$

erfüllt ist.

Offensichtlich kann man sofort eine *Netzwerk* (mit Intervallbewertungen) konstruieren, auf dem es keinen Fluß gibt. Allerdings, wenn es einen Fluß gibt, so gilt wieder der Satz von Ford-Fulkerson.

**SATZ 7.10.** *Sei  $G = (V, E)$  ein gerichteter, Intervall-bewerteter Graph, auf dem es einen Fluß gibt. Dann gilt*

$$\max_{\phi \text{ Fluß auf } G} v(\phi) = \min_{S=(V_1, V_2), s \in V_1, t \in V_2} c_{Int}(S),$$

wobei

$$c_{Int}(S) := \sum_{e \in (V_1 \rightarrow V_2)} w_o(e) - \sum_{e \in (V_1 \leftarrow V_2)} w_u(e)$$

die (Intervall-)Kapazität eines Schnittes  $S = (V_1, V_2)$  bezeichnet.

Der entsprechende Algorithmus zur Bestimmung eines maximalen Flusses hat nun folgende Gestalt:

(Man beachte die *geringfügigen* Änderungen im 3. Schritt.)

1. Es sei  $\phi$  ein (bekannter) Fluß auf (dem Intervall-bewerteten Graphen)  $G$ .
2. Setze  $p(s) := +s, \delta(s) := \infty, V_1 := \{s\}$  und  $V_2 := V \setminus \{s\}$ .
3. (a) Für alle  $x \in V_1$  und  $y \in \Gamma^+(x) \cap V_2$  führe folgendes aus:
 

```

      if  $\phi(\langle x, y \rangle) < w_o(\langle x, y \rangle)$  then
         $p(y) := +x;$ 
         $\delta(y) := \min(\delta(x), w_o(\langle x, y \rangle) - \phi(\langle x, y \rangle));$ 
         $V_1 := V_1 \cup \{y\}; V_2 := V_2 \setminus \{y\};$ 
      end;
```

 (b) Für alle  $x \in V_1$  und  $y \in \Gamma^-(x) \cap V_2$  führe folgendes aus:
 

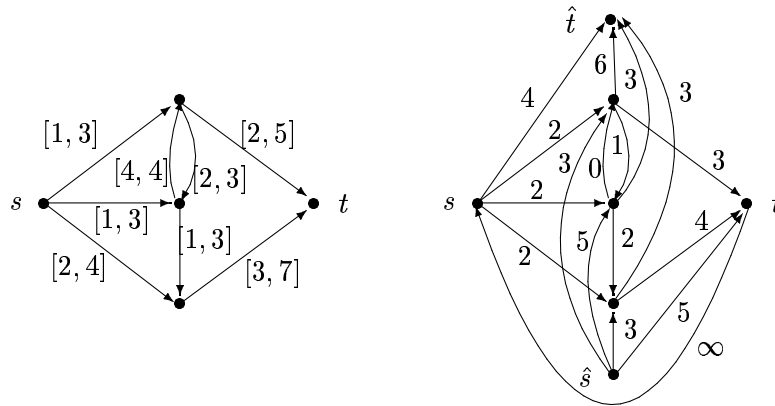
```

      if  $\Phi(\langle x, y \rangle) > w_u(\langle x, y \rangle)$  then
         $p(y) := -x;$ 
         $\delta(y) := \min(\delta(x), \Phi(\langle x, y \rangle) - w_u(\langle x, y \rangle));$ 
         $V_1 := V_1 \cup \{y\}; V_2 := V_2 \setminus \{y\};$ 
      end;
```
4. Falls im letzten Durchlauf von 3.  $V_1$  vergrößert wurde oder  $t \in V_2$  ist, gehe zu 3.
5. (a) Ist  $t \in V_2 \rightarrow$  **ENDE**.
 (b)  $x := t;$ 

```

      while  $x \neq s$  do
        if  $p(x) = +z$  then
           $\phi(\langle z, x \rangle) := \phi(\langle z, x \rangle) + \delta(t);$ 
           $x := z;$ 
        end;
        if  $p(x) = -z$  then
           $\phi(\langle z, x \rangle) := \phi(\langle z, x \rangle) - \delta(t);$ 
           $x := z;$ 
        end;
      end;
```
6. Gehe zu 2.

Es bleibt nur mehr zu entscheiden, ob es überhaupt einen Fluß auf einem Intervall-bewerteten Graphen  $G$  gibt, und wenn ja, wie man einen berechnen kann. Zu diesem Zweck geht man vom ursprünglichen Netzwerk zu einem Ersatznetzwerk über, das eine neue Quelle  $\hat{s}$  und eine neue Senke  $\hat{t}$  hat.



Zur Erläuterung betrachte man einen Knoten, etwa die (ursprüngliche) Quelle  $s$ . Von ihr führen drei Kanten mit den Bewertungen  $[1, 3]$ ,  $[1, 3]$ ,  $[2, 4]$  weg. Die unteren Kapazitäten  $1, 1, 2$  werden aufsummiert und als Bewertung  $1 + 1 + 2 = 4$  einer zusätzlichen Kante von  $s$  zur neuen Senke  $\hat{t}$  verwendet. Anstatt der alten Intervallbewertungen  $[1, 3]$ ,  $[1, 3]$ ,  $[2, 4]$  verwendet man nun die Differenzen  $3 - 1 = 2$ ,  $3 - 1 = 2$ ,  $4 - 2 = 2$ . Entsprechend verfährt man mit den anderen Knoten. (Bei eingehenden Kanten entsteht natürlich eine zusätzliche Kante von der der neuen Quelle  $\hat{s}$ .) Schließlich wird noch  $t$  und  $s$  mit einer Kante mit Kapazität  $\infty$  eingefügt.

Man überlegt leicht, daß ein Fluß auf dem ursprünglichen Intervall-bewerteten Graphen einem Fluß auf dem neuen (in üblichen Sinn Kanten-)bewerteten Graphen entspricht, auf dem alle *neuen* Kanten *saturiert* (d.h. voll ausgelastet) sind, und umgekehrt. Ein Fluß, bei dem alle neuen Kanten saturiert sind, ist aber nach dem Satz von Ford-Fulkerson ein maximaler Fluß. Daher gibt es im ursprünglichen Intervall-bewerteten Graphen genau dann einen Fluß, wenn es im Ersatznetzwerk jeder maximale Fluß die Eigenschaft hat, daß alle neuen Kanten saturiert sind. Dies kann aber mit Hilfe des Algorithmus von Ford-Fulkerson überprüft werden. Damit ist auch dieses Problem vollständig gelöst.



## Literaturverzeichnis

- [1] M. Aigner, *Kombinatorik I, II*, Springer, Berlin, 1975, 1976.
- [2] C. Berge, *Graphs and Hypergraphs*, North Holland, Amsterdam, 1973.
- [3] N. Chistofides, *Graph Theory, An Algorithmic Approach*, Academic Press, New York, 1975.
- [4] L. R. Ford and D. R. Fulkerson, *Flows in Networks*, Princeton University Press, Princeton, 1962.
- [5] F. Harary and E. M. Palmer, *Graphical Enumeration* Academic Press, New York, 1973.
- [6] C. L. Liu, *Introduction to Combinatorial Mathematics*, McGraw-Hill, New York, 1968.
- [7] V. N. Sachkov, *Combinatorial Methods in Discrete Mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [8] R. P. Stanley, *Enumerative Combinatorics, Volume I*, Wadsworth & Brooks, Monterey, 1986.
- [9] W. T. Tutte, *Graph Theory*, Addison-Wesley, Readings, 1984.
- [10] J. H. van Lint and R. M. Wilson, *A Course in Combinatorics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
- [11] H. Walther und G. Nägler, *Graphen - Algorithmen - Programme*, Springer, Wien, 1987.



# Index

- ähnliche Matrizen, 3
- Ableitungsoperator, 19
- Abstand zweier Knoten, 70
- adjazente Knoten, 63
- Adjazenzmatrix, 66
- Algorithmus von Dijkstra, 88
- Algorithmus von Floyd-Warshall, 91
- Algorithmus von Ford und Fulkerson, 91, 93
- Algorithmus von Kruskal, 87
- Algorithmus von Moore, 90
- allgemeine Lösung einer linearen Rekursion, 6
- alternierender Weg, 79
- Anfangsknoten, 63
- Ansatzmethode, 6, 7
- arithmetische Funktion, 46, 50
- außenstabile Knotenmenge, 81
- azyklischer Graph, 67
  
- Bahn, 65
- Baum, 70
- Bernoullipolynome, 24
- Bernoullizahlen, 24
- bewerteter Graph, 87
- Binärbäume, 36
- Binärbaum, 71
- binärer Suchbaum, 72
- Binomische Reihe, 11
- Blatt eines Baumes, 71
  
- Catalanzahlen, 36
- chromatische Polynom, 78
- chromatische Zahl, 77
  
- Datenstruktur, 71
- De Bruijn-Graph, 74
- Defizienz eines paaren Graphen, 79
- Diedergruppe, 57
- Differentialoperator, 18
- Differenzoperator, 7
- digitaler Suchbaum, 72
- Dijkstra-Algorithmus, 88
- Dirichletsche Reihe, 53
- Distanz, 88
- dominierende Knotenmenge, 81
- dualer Graph, 77
  
- ebener Graph, 75
  
- ebener Wurzelbaum, 71
- Eigenraum, 4
- eigentliche arithmetische Funktion, 46
- Eigenwert einer Matrix, 2
- einfacher Graph, 63
- Endknoten, 63
- Endknoten eines Baumes, 71
- Eulerprodukt, 54
- Eulersche Konstante, 26
- Eulersche Linie, 74
- Eulersche Polyederformel, 75
- exponentiell erzeugende Funktion, 27
- exponentielle erzeugende Funktion, 30
- externer Knoten eines Baumes, 71
  
- Färbung eines Graphen, 77
- Faltung arithmetischer Funktionen, 46
- Fibonaccizahlen, 1
- Floyd-Warshall-Algorithmus, 91
- Fluß, 91, 95
- formale Ableitung, 17
- formale Potenzreihe, 15
  
- Gerüst, 73
- gerichtete Kante, 63
- gerichteter Graph, 63
- geschlossene Eulersche Linie, 74
- geschlossene Hamiltonsche Linie, 75
- geschlossene Kantenfolge, 65
- gewöhnliche erzeugende Funktion, 30
- gewöhnliche erzeugende Funktion, 12, 27
- Graph, 63
- Grundyfunktion, 82
  
- Halbordnung, 43
- Hamiltonsche Linie, 75
- harmonischen Zahlen, 26
- Hassediagramm, 43
- Heiratssatz, 45
- Hingrad, 64
- homogene Lösung, 8
- Homogene lineare Rekursion, 1
  
- induzierter Teilgraph, 64
- Inhomogene lineare Rekursion, 8
- Inklusions-Exklusions-Prinzip, 49
- innenstabile Knotenmenge, 81
- interner Knoten eines Baumes, 71

- Inzidenzmatrix, 66, 67  
 isomorphe Graphen, 65  
  
 Jordan-Kästchen, 3  
 Jordansche Normalform, 3  
  
 Kante, 63  
 Kantenfolge, 64  
 Kantenraum, 80  
 Kantenzug, 65  
 Kapazität eines Schnittes, 92  
 Kern eines Graphen, 81  
 Knoten, 63  
 Knotenbasis, 69  
 Knotengrad, 63  
 Koeffizienten einer Potenzreihe, 15  
 Kombinationen mit Wiederholung, 32  
 Kombinationen ohne Wiederholung, 31  
 kombinatorische Struktur, 30  
 Komponente, 67  
 Komposition von Potenzreihen, 16  
 Konvergenzabszisse, 53  
 Kreis, 65  
 Kreisraum, 80  
  
 Länge einer Kantenfolge, 64  
 Lagrangesche Inversionsformel, 16  
 Laguerrepolynome, 20  
 leere Kantenfolge, 64  
 Lemma von Burnside, 55  
 lineare Ordnung, 43  
  
 Markierungsalgorithmus, 67  
 Matching, 79  
 Matrix-Baum-Theorem, 74  
 maximales Matching, 79  
 Mehrfachkante, 63  
 Moore-Algorithmus, 90  
  
 Nachbar eines Knotens, 63  
 Nachfolger, 91  
 Nachfolger eines Knoten, 64  
 Netzwerk, 87  
 Normale Polynomfamilie, 18  
 Normale Polynomfamilie vom Binomialtyp, 19  
  
 offene Eulersche Linie, 74  
 offene Hamiltonsche Linie, 75  
  
 paarer Graph, 76, 78  
 Partialbruchzerlegung, 10  
 partielle Ordnung, 43  
 partikuläre Lösung, 8  
 Patricia Trie, 73  
 planarer Graph, 75  
 Potenzsummen, 26  
 Produkt kombinatorischer Strukturen, 31  
 Produkt von Graphen, 83  
  
 Quelle, 91  
  
 Reduktion eines Graphen, 69  
 Rekursionsgleichung, 1  
 Riemannsche Zetafunktion, 53  
 Rotationskorrespondenz, 37  
  
 Satz von Dilworth, 45  
 Satz von Kuratowski, 76  
 Satz von Polya, 59  
 schlichter Graph, 63  
 Schlinge, 63  
 Schnitt, 92  
 Schnitt eines Graphen, 80  
 Schnittraum, 80  
 schwach zusammenhängender Graph, 69  
 schwache Zusammenhangskomponente, 69  
 Senke, 91  
 spannender Baum, 73  
 spannender Wald, 73  
 stark zusammenhängender Graph, 68  
 starke Zusammenhangskomponente, 69  
 Stirlingzahlen, 22  
 Stirlingzahlen 1. Art, 23  
 Stirlingzahlen 2. Art, 21, 23  
 Summe arithmetischer Funktionen, 46  
 Summe kombinatorischer Strukturen, 31, 33  
 Summenformel von Euler-McLaurin, 26  
 Symmetriegruppe, 57  
  
 Teilgraph, 64  
 Totalordnung, 43  
 translationsinvarianter Operator, 18  
 Trie, 73  
  
 unabhängige Knotenmenge, 81  
 unendliche untere Dreiecksmatrix, 21  
 ungerichtete Kante, 63  
 ungerichteter Graph, 63  
 Unterteilung, 76  
  
 verallgemeinerter binomische Lehrsatz, 19  
 Verschiebungsoperator, 18  
 Vierfarbensatz, 78  
 vollständiger Graph, 76  
 vollständiger paarer Graph, 76  
 vollständiges Matching, 79  
 Vorgänger, 64, 91  
  
 Wald, 70  
 Weg, 65  
 Weggrad, 64  
 Wurzel eines Baumes, 70, 71  
 Wurzelbaum, 71  
  
 Zetafunktion einer Halbordnung, 46  
 zulässige Färbung eines Graphen, 77  
 zusammenhängender Graph, 67  
 Zusammenhangskomponente, 67  
 Zyklentyp einer Permutation, 56  
 Zyklenzeiger einer Permutationsgruppe, 56  
 Zyklus, 65



## Übungsbeispiele