DISKRETE MATHEMATIK FÜR INFORMATIK
1. ÜBUNG: 17. OKTOBER 2006

(1) Man zeige mit Hilfe des Quotientenkriteriums, dass die Reihe

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} \binom{\alpha}{n} z^n \qquad \left(\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} \right)$$

für $|z| < 1$ konvergiert. Wie groß ist der Konvergenzradius? ($\alpha \notin \{0,1,2,\ldots\}$)

(2) Man zeige, dass die Taylorreihenentwicklung der Funktion $f(z) = (1+z)^\alpha = e^{\alpha \log(1+z)}$ (an der Stelle $z_0 = 0$) der Potenzreihe aus (1) entspricht, d.h.

$$(1+z)^\alpha = \sum_{n\geq 0} \binom{\alpha}{n} z^n \qquad (|z| < 1).$$

Hinweis: $a_n = f^{(n)}(0)/n!$.

(3) Man bestimme den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$g(z) = \sum_{n\geq 0} \binom{2n}{n} z^n.$$

Hinweis: $n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$.

(4) Man zeige unter Benützung von (2):

$$\sum_{n\geq 0} \binom{2n}{n} z^n = \frac{1}{\sqrt{1-4z}}.$$

(5) Man zeige für natürliche Zahlen $k \in \{0,1,2,\ldots\}$

$$\frac{1}{(1-z)^{k+1}} = \sum_{n\geq 0} \binom{k+n}{k} z^n.$$

(6) Man bestimme der EF der Folge $a_n = n^2 + n$.

(7) Zu welcher Folge a_n ist die Funktion $A(z) = \dfrac{1}{(1-z)(1-2z)}$ EF?

(8) Sei $A(z)$ die EF der Folge a_n. Zu welcher Folge ist die Funktion $\frac{1}{2}\left(A(z) + A(-z)\right)$ EF?

(9) Man bestimme mit Hilfe EFen eine Summationsformel für

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} k^2.$$

DISKRETE MATHEMATIK FÜR INFORMATIK
2. ÜBUNG: 24. OKTOBER 2006

(10) Man bestimme der EF der Folge $a_n = 2n3^n + n/n!$.

(11) Man bestimme den Koeffizienten a_n der Potenzreihenentwicklung von
$$f(z) = \frac{2+3z^2}{\sqrt{1-5z}}.$$

(12) Man bestimme die EF zur Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ mit
$$a_n = \begin{cases} n & \text{für } n \text{ gerade,} \\ \frac{2^n}{n!} & \text{für } n \text{ ungerage.} \end{cases}$$
Hinweis: Man benütze Beispiel (8).

(13) Man löse die folgende Rekursion mit Hilfe erzeugender Funktionen:
$$a_n = 2a_{n-1} + 4^{n-1} \ (n \geq 1), \ a_0 = 1.$$

(14) Man löse die folgende Rekursion mit Hilfe erzeugender Funktionen:
$$a_n = 2a_{n-1} + 2^{n-1} \ (n \geq 1), \ a_0 = 1.$$

(15) Man stelle eine Rekursion für die gesuchten Zahlen a_n auf und löse diese:
a_n sei die größte Anzahl von Teilen, in die die Ebene durch n Geraden zerlegt werden kann.

(16) Man beweise die Formel
$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$
mit Hilfe der erzeugenden Funktion: $(1+z)^{2n} = (1+z)^n(1+z)^n$.

(17) Man zeige, dass die Funktion $f(z) = e^z/(1-2z)$ eine Potenzreihendarstellung $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ besitzt und bestimme eine Näherungsformel von a_n.
Hinweis: Man bestimme die dominante Polstelle.

(18) Welche Nullstellen und Polstellen hat die Funktion $f(z) = \tan z$?

DISKRETE MATHEMATIK FÜR INFORMATIK
3. ÜBUNG: 31. OKTOBER 2006

(19) Man löse die folgende Rekursion:

$$a_n + a_{n-1} + a_{n-2} = 0 \ (n \geq 2), \ a_0 = 3, \ a_1 = -1.$$

(20) Man löse die folgende Rekursion:

$$a_n - a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-3} = 0 \ (n \geq 3), \ a_0 = 3, a_1 = a_2 = -1.$$

(21) Man bestimme die Potenzen A^n, $n \geq 0$, der Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Hinweis: Man setze $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ b_n & a_n \end{pmatrix}$ und stelle Rekursionen für a_n und b_n auf.

(22) Es sei a_n die Anzahl aller Teilmengen der Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$, die keine zwei aufeinanderfolgenden Zahlen enthalten.
Man stelle eine Rekursion für a_n auf und löse sie!

(23) Man löse die folgende Rekursion mit Hilfe von EF:

$$a_n = 3a_{n-1} + 2^{2n-2} \ (n \geq 1), \ a_0 = 1.$$

(24) Man löse die Rekursion aus Bsp. (23) ohne EF (Ansatzmethode!!).

(25) Man zeige

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{x+k}{k} = \binom{x+n+1}{n}$$

für alle $x \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$!
(Hinweis: $(1-z)^{-x-1} \cdot (1-x)^{-1} = (1-z)^{-x-2}$.)

(26) Es seien $\hat{A}(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n/n!$ und $\hat{B}(z) = \sum_{n\geq 0} b_n z^n/n!$ exponentielle erzeugende Funktionen der Folgen a_n und b_n. Man zeige, dass die Koeffizienten des Produkts $\hat{C}(z) = \sum_{n\geq 0} c_n z^n/n! = \hat{A}(z) \cdot \hat{B}(z)$ durch

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k b_{n-k}$$

gegeben sind.

(27) Es sei $\hat{A}(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n/n!$ die exponentielle erzeugende Funktion der Folge a_n. Zu welchen Folge ist $\hat{A}'(z)$ bzw. $z\hat{A}'(z)$ exponentielle erzeugende Funktion?

DISKRETE MATHEMATIK FÜR INFORMATIK
4. ÜBUNG: 7. NOVEMBER 2006

(28) Binärbäume $\mathcal{B}$ sind Wurzelbäume mit der Eigenschaft, dass jeder interne Knoten $\bullet$ zwei Nachfolger hat (einen linken und einen rechten), während die externen Knoten $\square$ (oder Blätter) keinen Nachfolger haben. Man erkläre die symbolische Gleichung

$$\mathcal{B} = \square + (\mathcal{B}, \bullet, \mathcal{B}).$$

Sei weiters $B(z) = \sum_{n \geq 0} b_n z^n$ die erzeugende Funktion der Anzahlen b_n der Binärbäume mit n internen Knoten. Man zeige, dass sich die obige Beziehung in die Gleichung

$$B(z) = 1 + zB(z)^2$$

üebersetzt.

(29) Man löse die Gleichung für $B(z)$ aus Bsp. (28) und zeige, dass b_n durch

$$b_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

gegeben ist.

(30) Die Anzahl p_n der ebenen Wurzelbäume mit n Knoten ist dieselbe wie b_{n-1}, die Anzahle der Binärbäume mit $n-1$ internen Knoten. Diese Beobachtung hat einen tieferen Hintergrund. Mit Hilfe der sogenannten **Rotationskorrespondenz** kann eine Beziehung zwischen einem ebenen Wurzelbaum mit n Knoten und einem Binärbaum mit $n-1$ internen Knoten anzugeben.

Ausgegangen wird von einem ebenen Wurzelbaum mit n Knoten.

(a) Man streiche die Wurzel (und alle Kanten, die von der Wurzel ausgehen).

(b) Man streiche bei jedem weiteren Knoten, von dem Äste ausgehen, alle ausgehenden Kanten bis auf eine, die am weitesten links liegt.

(c) Man verbinde alle Knoten, die im ursprünglichen ebenen Wurzelbaum einen gemeinsamen direkten Vorgänger haben, zu je einer (horizontalen) Kette.

(d) Die eben eingerichteten horizontalen Kanten werden um 45° nach unten gedreht.

(e) Die $n-1$ verbliebenen Knoten fungieren nun als interne Knoten eines Binärbaums. Man ergänze noch die nötigen n externen Knoten.

Man zeige anhand eines geeigneten Beispiels, dass in dieser Korrespondenz jeder Schritt eindeutig rückgängig gemacht werden kann, sodass tatsächlich eine bijektive Beziehung entsteht.

(31) Es bezeichne t_n die Anzahl der Triangulierungen eines regelmäßigen $(n+2)$-Ecks (mit Eckpunkten $0, 1, 2, \ldots, n+1$) in n Dreiecke (wobei die Eckpunkte der Dreiecke mit den Ecken des $(n+2)$-Ecks zusammenfallen). Man zeige $t_n = b_n$ indem man für die Menge $\mathcal{T}$ aller Triangulieren (wie oben) eine symbolische Gleichung der Form

$$\mathcal{T} = \emptyset + (\mathcal{T}, \Delta, \mathcal{T})$$

bestimmt; $\emptyset$ bedeutet, dass keine Dreiecke gebildet werden ($n = 0$) und Δ bezeichnet ein Dreieck, z.B. jenes, das die zwei kleinsten Eckpunkte des $(n+2)$-Ecks enthält.

(32) Eine Komposition einer natürlichen Zahl $n \geq 1$ ist eine Darstellung von n durch eine Summe $n = x_1 + x_2 + \cdots + x_k$ für ein $k \geq 1$ und Zahlen $x_j \geq 1$, wobei die Reihenfolge beachtet werden muss, d.h. $5 = 2 + 3$ und $5 = 3 + 2$ werden als verschieden angesehen.

Man zeige, dass die EF $C(z) = \sum_{n \geq 1} C_n z^n$ der Anzahlen C_n der verschiedenen Kompositionen von n durch

$$C(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{1-z}}$$

gegeben ist. Wie kann daraus C_n berechnet werden?

(33) Wie lautet die EF der Anzahlen B_n der Kompositionen von n in Summen von 1'ern und 2'ern? Gibt es eine Beziehung zwischen B_n und den Fibonaccizahlen F_n?

(34) Eine Partition einer natürlichen Zahl $n \geq 1$ ist eine Darstellung von n durch eine Summe $n = x_1 + x_2 + \cdots + x_k$ für ein $k \geq 1$ und Zahlen $x_j \geq 1$ mit $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_k$. Man kann also Partitionen als Kompositionen ansehen, wo es nicht auf die Reihenfolge angkommt, man daher o.B.d.A. die Summanden geordnet annehmen kann.

Man zeige, dass EF $P(z) = \sum_{n \geq 1} P_n z^n$ der Anzahlen P_n der verschiedenen Partitionen von n durch

$$P(z) = \prod_{m \geq 1} \frac{1}{1 - z^m}$$

gegeben ist. (Daraus lässt sich – leider – keine einfache Formel für P_n ableiten, es gilt aber $P_n \sim 1/(4n\sqrt{3}) \exp\left(\pi\sqrt{2n/3}\right)$.)

(35) Wie lautet die EF der Anzahlen D_n von Partitionen von n in lauter verschiedene Summanden?

(36) Es sei $\hat{A}(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n/n!$ die exponentielle erzeugende Funktion der Folge a_n mit Konvergenzradius $R = \infty$. Wie kann das Integral

$$\int_0^\infty e^{-t} \hat{A}(zt)\, dt = ?$$

gedeutet werden?
Hinweis: Man verwende die Formel $\int_0^\infty e^{-t} t^n = n!$, die leicht mit Hilfe partieller Inegration gezeigt werden kann.

DISKRETE MATHEMATIK FÜR INFORMATIK
5. ÜBUNG: 14. NOVEMBER 2006

(37) Man bestimme der EEF $\hat{A}(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n/n!$ der Folge a_n der Anzahlen der geordneten Auswahlen von n weißen, roten und blauen Kugeln, wobei 2 oder 4 weiße Kugeln, eine gerade Anzahl von roten und eine beliebige Anzahl von blauen Kugeln vorkommen können.

(38) Man bestimme den Koeffizienten a_n der EEF von

$$\hat{A}(z) = \sum_{n\geq 0} a_n \frac{z^n}{n!} = \frac{x^2}{48}(x^2+12)(e^{2x}+1).$$

(39) Rekursive Bäume sind markierte (nicht-ebene) Wurzelbäume, bei denen die Wurzel mit 1 markiert ist und auf allen Pfaden, die von der Wurzel wegführen, die Markierungen streng monoton wachsen. Man zeige, dass es $r_n = (n-1)!$ verschiedene rekursive Bäume mit n Knoten (und Markierungen $1, 2, \ldots, n$) gibt. Wie lautet die EEF $\hat{R}(z) = \sum_{n\geq 0} r_n z^n/n!$?
Hinweis: Man zeige, dass es genau n Möglichkeiten gibt, aus einem rekursiven Baum der Größe n einen rekursiven Baum der Größe $n+1$ zu machen.

(40) Es sei $\hat{A}(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n/n!$ die EEF der Anzahlen a_n von markieren Objekten $\mathcal{A}$ der Größe n. Man zeige, dass dann

$$\hat{C}(z) = e^{\hat{A}(z)} = 1 + \hat{A}(z) + \frac{1}{2!}\hat{A}(z)^2 + \frac{1}{3!}\hat{A}(z)^3 + \cdots$$

die EEF der ungeordneten Auswahlen (mit entsprechenden modifizierten Markierungen) von Objekten $\mathcal{A}$ ist.
Hinweis: Die EEF $\hat{A}(z)^k$ entspricht den geordneten k-Tupeleln von von Objekten $\mathcal{A}$ (mit entsprechenden modifizierten Markierungen).

(41) Sei a_{nk} die Anzahl der Permutationen von $\{1, 2, \ldots, n\}$, deren Zyklendarstellung genau aus k Zyklen besteht. Man zeige

$$\sum_{n,k} a_{nk} \frac{z^n}{n!} u^k = e^{u \log \frac{1}{1-z}} = \frac{1}{(1-z)^u}.$$

(42) Die Stirlingzahlen 1. Art s_{nk} sind durch die Koeffizienten der Polynome

$$\sum_{k=0}^{n} s_{nk} u^k = u(u-1)(u-2)\cdots(u-n+1)$$

definiert. Man zeige (mit Hilfe der Binomischen Reihe)

$$\sum_{n,k} s_{nk} \frac{z^n}{n!} u^k = (1+z)^u = e^{u \log(1+z)}$$

und leite daraus $a_{nk} = |s_{nk}| = s_{nk}(-1)^{n-k}$ ab (mit a_{nk} aus Bsp. 41.)

(43) Man begründe die Rekursion

$$a_{n+1,k} = a_{n,k-1} + na_{nk}$$

der Zahlen a_{nk} aus Bsp. 41.

(44) Die Bellzahlen B_n geben an, auf wie viele Arten man eine n-elementige Menge in Systeme von nicht-leeren Teilmengen (Partitionen) zerlegen kann. Man zeige

$$\sum_{n\geq 0} B_n \frac{z^n}{n!} = e^{e^z-1}.$$

Hinweis: Man betrachte zuerst die EEF $e^z - 1$ von Partitionen in genau 1 Teilmenge und wende Bsp. 40 an.

(45) Die Stirlingzahlen 2. Art S_{nk} geben an, auf wie viele Arten man eine n-elementige Menge in genau k nicht-leere Teilmengen (Partitionen) zerlegen kann. Man zeige

$$\sum_{n,k} S_{nk} \frac{z^n}{n!} u^k = e^{u(e^z-1)}.$$

DISKRETE MATHEMATIK FÜR INFORMATIK
6. ÜBUNG: 21. NOVEMBER 2006

(46) Man beweise den Satz von Mirsky ("Dualversion" des Satzes von Dilworth): Es sei $\langle H, \leq \rangle$ eine endliche Halbordnung, bei der jede Teilkette höchstens m Elemente hat. Dann kann H in (höchstens) m disjunkte Antiketten zerlegt werden.
Hinweis: Man betrachte die Menge M der maximalen Elemente in H, die ja eine Antikette bilden und reduziere das Problem auf $H \setminus M$.

(47) Es sei $\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n^2+1)$ eine Permutation der n^2+1 Zahlen $1, 2, \ldots, n^2+1$. Man zeige, dass es in π eine monotone Teilfolge der Länge $n+1$ gibt. (Eine Teilfolge $\pi(i_1), \pi(i_2), \ldots, \pi(i_\ell)$ mit $i_1 < i_2 < \ldots < i_\ell$ ist monoton, wenn $\pi(i_1) < \pi(i_2) < \ldots < \pi(i_\ell)$ oder $\pi(i_1) > \pi(i_2) > \ldots > \pi(i_\ell)$ ist.)
Hinweis: Man definiere eine Halbordnung auf der Menge $H = \{1, 2, \ldots, n^2+1\}$ mit $i \sqsubseteq j$, falls $i \leq j$ und $\pi(i) \leq \pi(j)$. Man beobachte, dass eine monoton steigende Teilfolge von π einer Teilkette in $\langle H, \sqsubseteq \rangle$ und eine monoton fallende Teilfolge von π einer Antikette in $\langle H, \sqsubseteq \rangle$ entspricht. Schließlich wende man den Satz von Dilworth an.

(48) Man zeige, dass es auf einem regulären bipartiten Graphen (vom Grad $d > 0$) immer ein perfektes Matching gibt. (Ein Graph heisst regulär, wenn jeder Knoten denselben Knotengrad d hat. Ein Matching heisst perfekt, wenn jeder Knoten mit einer Kante des Matchings inzidiert, also alle Knoten "gematcht" werden).
Hinweis: Man wende den Heiratssatz an.

(49) Es sei A eine $n \times n$-Matrix mit natürlichen Zahlen als Eintragungen mit der Eigenschaft, dass alle Zeilen- und Spaltensummen gleich einer Zahl $d > 0$ sind. Man zeige, dass A als Summe von Permutationsmatrizen dargestellt werden kann. (Eine Matrix ist eine Permutationsmatrix, wenn in jeder Spalte und jeder Zeile genau eine 1 steht und alle anderen Eintragungen 0 sind.)
Hinweis: Man verwende Beispiel 48), indem man die Matrix A mit einem regulären bipartiten Graphen identifiziert und beobachtet, dass dann ein perfektes Matching einer Permutationsmatrix entspricht.

(50) Man bestimme die Möbiusfunktion auf der in Abbildung 1 durch das Hassediagramm angegebenen Halbordnung.

(51) Es seien $\langle H_1, \leq_1 \rangle$, $\langle H_2, \leq_2 \rangle$ zwei lokalendliche Halbordnungen mit Möbiusfunktionen μ_1 und μ_2. Das Produkt $\langle H = H_1 \times H_2, \leq \rangle$ der Halbordnungen wird durch

$$(a_1, b_1) \leq (a_2, b_2) \quad \Longleftrightarrow \quad a_1 \leq_1 a_2 \wedge b_1 \leq_2 b_2$$

definiert. Man zeige, dass

$$\mu((a_1, b_1), (a_2, b_2)) = \mu_1(a_1, a_2) \cdot \mu_2(b_1, b_2)$$

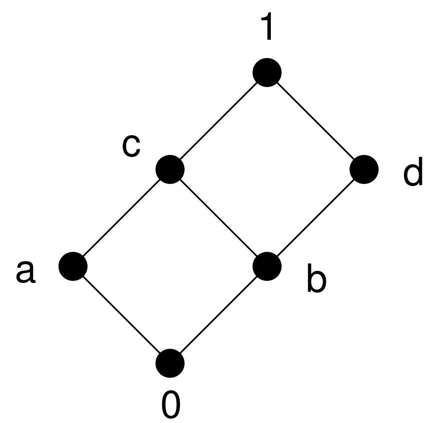

FIGURE 1. Hassediagramm einer Abbildung.

die Möbiusfunktion auf $\langle H_1 \times H_2, \leq \rangle$ ist.
Hinweis: Man beobachte, dass das Intervall $[(a_1, b_1), (a_2, b_2)]$ in H nichts anderes als $[a_1, a_2] \times [b_1, b_2]$ ist.

(52) Es seien $A_1, A_2, \ldots, A_n$ Teilmengen einer Menge E und $\overline{A} = E \setminus A$ bezeichne das Komplement in E. Für Teilmengen $I \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ definiere man die Funktion

$$f(I) = \left| \bigcap_{i \in I} A_i \cap \bigcap_{j \in \{1,2,\ldots,n\} \setminus I} \overline{A}_j \right| .$$

Man zeige:

$$\sum_{I \subseteq J \subseteq \{1,2,\ldots,n\}} f(J) = \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| .$$

(53) Es bezeichne $\varphi(n)$ die sogenannte Eulersche φ-Funktion, also die Anzahl der Zahlen $1 \leq k \leq n$ mit der Eigenschaft $\mathrm{ggT}(k, n) = 1$. Man zeige

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n.$$

Hinweis: Für einen Teiler d von n bezeichne A_d die Menge der Zahlen $1 \leq k \leq n$ mit der Eigenschaft $\mathrm{ggT}(k, n) = n/d$ bzw. dass die gekürzte Darstellung des Bruches $\frac{k}{n}$ im Nenner d stehen hat. Man überlege, dass A_d genau $\varphi(d)$ Elemente besitzt.

(54) Man zeige mit Hilfe von Bsp. 53) und Möbiusinversion

$$\varphi(n) = \sum_{d|n} d\mu\left(\frac{n}{d}\right) = n \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d}.$$

DISKRETE MATHEMATIK FÜR INFORMATIK
7. ÜBUNG: 28. NOVEMBER 2006

(55) Ein schlichter ungerichteter Graph $G = (V, E)$ heißt kubisch, wenn jeder Knoten $v \in V$ Knotengrad $d(v) = 3$ hat.
  a) Geben Sie ein Beispiel für einen kubischen Graphen mit $|V| = 6$ an!
  b) Gibt es einen kubischen Graphen mit ungerader Knotenanzahl $|V|$?
  c) Zeigen Sie, daß es zu jedem $n \geq 2$ einen kubischen Graphen mit $|V| = 2n$ gibt!

(56) Unter n Mannschaften wird ein Turnier ausgetragen, und es haben insgesamt schon $n + 1$ Spiele stattgefunden. Man zeige, dass mindestens eine Mannschaft dann bereits an mindestens 3 Spielen teilgenommen hat.

(57) Man zeige, dass es in einem ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit $0 < |E| < |V|$ immer einen Knoten $v \in V(G)$ mit $d(v) \leq 1$ gibt.

(58) Man zeige mit Hilfe eines geeigneten graphentheoretischen Modells, dass es in jeder Stadt mindestens zwei Bewohner mit der gleichen Anzahl von Nachbarn gibt.

(59) Sei $G = (V, E)$ ein schlichter ungerichteter Graph mit $|V| > 4$. Man zeige, daß dann entweder G oder G^κ einen Kreis enthält. (G^κ ist der komplementäre Graph zu G, d.h. G^κ enthält die selben Knoten wie G und alle Kanten $(v, w) \in V(G) \times V(G)$, $v \neq w$, die nicht in $E(G)$ enthalten sind.)

(60) Man bestimme die Komponenten des starken Zusammenhangs des gerichteten Graphen aus Abbildung 2.

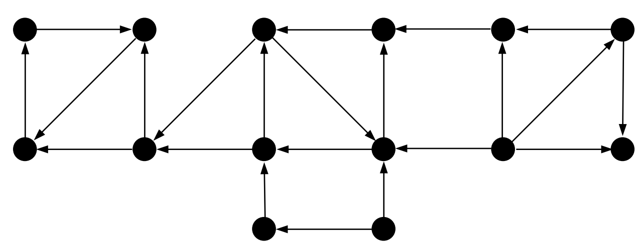

FIGURE 2. Gerichteter Graph.

(61) Man bestimme die Anzahl der Gerüste des Graphen aus Abbildung 1.

(62) [freiwillig] Es bezeichne K_n, $n \geq 2$ den vollständigen (ungerichteten) Graphen mit Knoten $V(K_n) = \{1, 2, \ldots, n\}$ und aus allen möglichen ungerichteten Kanten $e = (i, j)$ mit $1 \leq i < j \leq n$.

Man zeige, dass K_n genau n^{n-2} Gerüste besitzt.
Wie viele verschiedene Bäume mit Knoten $\{1, 2, \ldots, n\}$ gibt es?
(Hinweis: Man verwende das Matrix-Baum-Theorem. Bei der Matrix $D(K_n) - A(K_n)$ streiche man die erste Zeile und Spalte und beobachte, dass dann die Summe aller Zeilen genau $(1, 1, \ldots, 1)$ ist. Mit Hilfe dieser (neuen ersten) Zeile forme man die Matrix duch Additionen dieser Zeile so um, dass ab der 2. Zeile nur in Diagonale eine von 0 verschiedene Zahl – nämlich n – steht.)

(63) Es sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. Für eine Teilmenge $A \subseteq E$ bezeichne $\overline{A}$ die Menge der Kanten $e = (u, v) \in E$ mit der Eigenschaft, dass u und v durch eine Kantenfolge in A erreichbar sind.
Man zeige, dass diese Struktur ein Matroid bildet.

DISKRETE MATHEMATIK FÜR INFORMATIK
8. ÜBUNG: 5. DEZEMBER 2006

(64) Ein t-ärer Baum ($t \in \mathbb{N}$, $t \geq 2$) ist ein ebener Wurzelbaum, bei dem jeder Knoten entweder 0 Nachfolger (Endknoten) oder genau t Nachfolger (interner Knoten) hat. Für $t = 2$ ergeben sich also genau die Binärbäume. Wieviele Endknoten hat ein t-ärer Baum mit n internen Knoten?

(65) Es seien (a_n) und (b_n) zwei Folgen und $A(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n^s}$ und $B(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{b_n}{n^s}$ die dazugehörigen erzeugende *Dirichletreihen*. Zu welcher Folge (c_n) ist dann $C(s) = A(s)B(s)$ die erzeugende Dirichletreihe?

(66) Es sei $G = (V, E)$ ein einfacher ungerichteter Graph mit n Knoten. und $|E| > (n-1)(n-2)/2$. Man zeige, dass G zusammenhängend ist!

(67) Drei Ehepaare wollen einen Fluss überqueren. Es ist ein zweisitziges Boot vorhanden. Die Nebenbedingung ist, dass keine Ehefrau je ohne ihren (eifersüchtigen) Ehemann in einer Gesellschaft mit anderen Männern verbleiben soll. Man zeichne einen passenden Graphen und entnehme daraus eine Lösung!

(68) Man zeige: Jeder Baum ist ein paarer Graph. (Ein ungerichteter Graph G ist ein *paarer Graph* oder *bipartiter Graph*, wenn die Knotenmenge $V(G)$ in zwei disjunkte, nichtleere Teilmengen V_1, V_2 zerlegt werden kann, so daß es nur Kanten $(v_1, v_2) \in E(G)$ mit $v_1 \in V_1$ und $v_2 \in V_2$ gibt.)

(69) Man zeige: Ein ungerichteter schlichter Graph G ist genau dann ein paarer Graph, wenn jeder Kreis in G gerade Länge hat.

(70) Man zeige: Für einen einfachen, zusammenhängenden, planaren, Graphen $G = (V, E)$ gilt: $|E| \leq 3|V| - 6$. und folgere daraus, dass der vollständige Graph K_5 nicht planar ist.
Hinweis: Man zeige zuerst, dass in so einem Graphen $\sum_{j\geq 3} j\, f_j = 2|E|$ gilt, wobei f_j die Anzahl der Flächen mit j Kanten bezeichnet, leite daraus die Ungleichung $3|F| \leq 2|E|$ ab und verwende schließlich die Eulersche Polyederformel.

(71) Sei G ein einfacher, ungerichteter Graph. Dann wird der *line graph* G^* zu G folgendermaßen definiert: $V(G^*) = E(G)$, und (e, f) ist in $E(G^*)$, genau dann, wenn im Graphen G die Kanten e und f einen gemeinsamen Knoten haben. Man zeige: Ist G ein einfacher, ungerichteter, Eulerscher Graph (in dem Sinn, daß eine geschlossene Eulersche Linie existiert), so ist der line graph G^* Hamiltonsch und Eulersch.

(72) Für welche m, n besitzt der vollständige paare Graph $K_{m,n}$ eine geschlossene Hamiltonsche Linie? ($|V_1| = m$ und $|V_2| = n$, und alle Knoten aus V_1 sind mit allen Knoten aus V_2 verbunden.)

DISKRETE MATHEMATIK FÜR INFORMATIK
9. ÜBUNG: 12. DEZEMBER 2006

(73) [freiwillig] Ein gerichteter Graph heißt azyklisch, wenn er keinen Zyklus positiver Länge, also keine geschlossene Kantenfolge positiver Länge, besitzt. Man zeige, dass ein gerichteter Graph G genau dann azyklisch ist, wenn es möglich ist, die Knoten so zu nummerieren, so dass die Adjazenzmatrix $A(G) = (a_{ij})$ eine obere Dreiecksmatrix ist, d.h. $a_{ij} = 0$ for $i > j$.

(74) Ein Knoten u eines ungerichteten Graphen G heißt zentral, wenn

$$\max_{v \in V(G)} d(u,v) = \min_{w \in V(G)} \left(\max_{v \in V(G)} d(w,v) \right)$$

erfüllt ist. Man zeige, daß es in einem Baum T entweder genau einen zentralen Knoten u_0 oder zwei zentrale Knoten u_1, u_2 mit $(u_1, u_2) \in E(T)$ gibt.

(75) Seien T_1, T_2 zwei spannende Bäume eines zusammenhängenden Graphen und $a \in E(T_1) \setminus E(T_2)$. Man zeige, dass es dann eine Kante $b \in E(T_2) \setminus E(T_1)$ gibt, so dass die Kantenmengen $(E(T_1) \setminus \{a\}) \cup \{b\}$ und $(E(T_2) \setminus \{b\}) \cup \{a\}$ wieder zwei spannende Bäume festlegen.

(76) Man zeige, dass es zu jedem $n \geq 1$ einen "Kreis" (DeBruijn-Folge) aus 2^n Kästchen mit Eintragungen 0 oder 1 gibt, so dass alle 2^n 0-1-Folgen der Länge n als Teilabschnitte dieses Kreises auftregen (siehe Abbildung 3 für $n = 4$).
Hinweis: Man definiere einen (gerichteten) Graphen aus 2^{n-1} Knoten, die mit 0-1-Folgen der Länge $n-1$ bezeichnet werden. Weiters setzt man eine gerichtete Kante von $v = x_1 \cdots x_{n-1}$ nach $w = y_1 \cdots y_{n-1}$, wenn $x_2 = y_1$, $x_3 = y_2$, …, $x_{n-1} = y_{n-2}$ gilt, also die letzten $n-2$ Elemente von v (auch in der Reihenfolge) mit den ersten $n-2$ Elementen von w übereinstimmen. Man zeige, dass dieser Graph Eulersch ist und dass eine (geschlossene) Eulersche Linie einem gesuchten "Kreis" entspricht. Man führe dies auch bei $n = 4$ explizit durch.

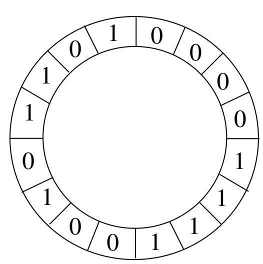

FIGURE 3. DeBruijn-Folge für $n = 4$

(77) Man beweise für $c \geq 3$:

$$R(n_1, n_2, \ldots, n_{c-2}, n_{c-1}, n_c) \leq R(n_1, n_2, \ldots, n_{c-2}, R(n_{c-1}, n_c)).$$

Hinweis: Man setze $N = R(n_1, n_2, \ldots, n_{c-2}, R(n_{c-1}, n_c))$ und betrachte eine Färbung von K_N mit c Farben. Zunächst unterscheide man zwischen den Farben $c-1$ und c nicht und wende die Ramsey-Eigenschaft für $c-1$ Farben an.

(78) Man bestimme im Netzwerk 1 aus Abbildung 4 mit Hilfe des Kruskalalgorithmus einen minimalen und einen maximalen spannenden Baum.

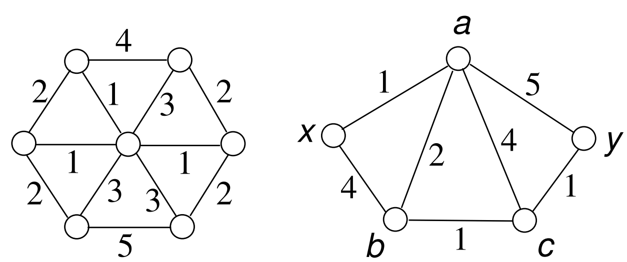

Figure 4. Netzwerk 1 und 2

(79) Bestimmen Sie mit dem Algorithmus von Dijkstra einen kürzesten Weg zwischen den Knoten x und y des Netzwerkes 2 aus Abbildung 4.

(80) [freiwillig] Es seien m, n, p drei positive natürliche Zahlen. Man zeige, dass es ein N gibt, so dass jede Folge $x_1, x_2, \ldots, x_N$ von N reellen Zahlen entweder eine streng monoton wachsende Teilfolge der Länge m, eine stren monoton fallende Teilfolge der Länge n oder eine konstante Teilfolge der Länge p besitzt.

Zusatz: Es reicht aus, $N > mnp$ zu wählen, das muss aber nicht bewiesen werden.

(81) [freiwillig] Man betrachte eine rechteckige Matrix $A = (a_{ij})$ mit lauter verschiedenen reellen Eintragungen $a_{ij} > 0$. Man sortiere zunächst in jeder Zeile von A der Größe nach (und erhält eine Matrix $B = (b_{ij})$. Darauf sortiere man jede Spalte der Matrix B ebenfalls der Größe nach (und erhält eine Matrix $C = (c_{ij})$). Man zeige, dass bei dieser Matrix C die Zeilen auch schon der Größe nach sortiert sind.

Hinweis: Man betrachte z.B. zwei Spalten von B und finde einen Algorithmus, der beide Spalten gleichzeitig sortiert, aber die Elemente der ersten Spalte in jedem Schritt immer kleiner sind als die entsprechenden Elemente der zweiten Spalte.

DISKRETE MATHEMATIK FÜR INFORMATIK
10. ÜBUNG: 9. JÄNNER 2007

(82) Man betrachte ein Flussproblem auf einem Netzwerk, das neben den üblichen Kantenkapazitäten auch Knotenkapazitäten hat, d.h. jedem Knoten v wird eine $c(v) \geq 0$ zugeordnet und ein Fluss ist nur dann zulässig, wenn die Summe der Flüsse zum Knoten v nicht göẞer als $c(v)$ ist.

Wie kann man das Netzwerk modifizieren, dass der Satz von Ford-Fulkerson angewandt werden kann (also nur Kanten – gegebenenfalls neue Kanten – Kapazitäten tragen)?

Schließlich betrachte man ein Netzwerk mit mehrerer Quellen und Senken. Kann dieses Netzwerk auch so modifiziert werden, dass der Satz von Ford-Fulkerson angewandt werden kann?

(83) Sei M ein Matching eines schlichten ungerichteten Graphen $G = (V, E)$. Ein Weg W in G heißt alternierend, wenn die Kanten in W abwechselnd in M und $E \setminus M$ liegen. Eine alternierender Weg W heißt erweiternd, wenn sowohl Anfangs-, als auch Endknoten von W zu keiner Kante aus M gehören.

Es sein nun W ein erweiternder alternierender Weg. Man zeige, dass dann $M' := M \Delta W$ ein Matching mit $|M'| = |M| + 1$ Kanten ist. (Δ ist die symmetrische Differenz.)

(84) Man zeige, dass in den ganzen Zahlen aus $a|b$ und $a|c$ auch $a|(xb+yc)$ (für beliebige ganze Zahlen x, y) folgt.

(85) Es seien x, y ungerade Zahlen. Man zeige $2|(x^2 + y^2)$, aber $4 \not| (x^2 + y^2)$.

(86) Man zeige: Aus $\mathrm{ggT}(a, 4) = 2$ und $\mathrm{ggT}(b, 4) = 2$ folgt (für ganze Zahlen a, b) $\mathrm{ggT}(a + b, 4) = 4$.

(87) Man zeige, dass für alle natürlichen Zahlen n die Teilbarkeitseigenschafte $2|(n^2 - n)$ und $6|(n^3 - n)$ gelten.

(88) Man bestimme mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus

$$\mathrm{ggT}(7469, 2464) \quad \text{und} \quad \mathrm{ggT}(1109, 4999).$$

(89) Man bestimme alle ganzen Zahlen x, y, die die Gleichung $243x + 198y = 9$ erfüllen.

(90) Man zeige $\mathrm{ggT}(a, b) \cdot \mathrm{kgV}(a, b) = a \cdot b$.

DISKRETE MATHEMATIK FÜR INFORMATIK
11. ÜBUNG: 16. JÄNNER 2007

(91) Man zeige, dass für $n > 3$ die ganzen Zahlen n, $n+2$, $n+4$ nicht alle Primzahlen sind.
Hinweis: Man betrachte die Restklassen modulo 3.

(92) [freiwillig] Man zeige, dass es unendlich viele Primzahlen p mit $p \equiv 3 \bmod 4$ gibt.
Hinweis: Man nehme an, es gäbe nur endliche viele Primzahlen $p_1, \ldots, p_m$ dieser Form und betrachte die Zahl $N = 4p_1p_2 \cdots p_m - 1$.

(93) Man zeige, dass jede ganze Zahl der Form $n^4 + 4^n$ (mit $n > 1$) keine Primzahl ist.
Hinweis: Man unterscheide zwischen geradem und ungeradem n. Insbesondere betrachte man bei ungeradem n die Zerlegung $(n^2 + 2^n + n2^{(n+1)/2})(n^2 + 2^n - n2^{(n+1)/2})$.

(94) Man bestimme die Einer- und die Zehnerstelle von 2^{1000}.

(95) Man löse folgende linearen Kongruenz: $77x \equiv 14 \bmod 119$.

(96) Man löse das folgende System von linearen Kongruenzen:

$$x \equiv 2 \bmod 3, \; x \equiv 3 \bmod 5, \; x \equiv 4 \bmod 7.$$

(97) Man zeige, dass für beliebige verschiedene ungerade Primzahlen p und q die Beziehung $p^{q-1} + q^{p-1} \equiv 1 \bmod pq$ gilt.

(98) Man zeige für natürliche Zahlen: $d|n \implies \varphi(d)|\varphi(n)$.

(99) [freiwillig] Man zeige, dass für verschiedene ganze Zahlen $m, n > 0$ die Fermatzahlen $F_m = 2^{2^m} + 1$ und $F_n = 2^{2^n} + 1$ teilerfremd sind.
Hinweis: Man zeige zuerst $(2^{2^m} + 1)|(2^{2^n} - 1)$ für $m < n$.

DISKRETE MATHEMATIK FÜR INFORMATIK
12. ÜBUNG: 23. JÄNNER 2007

(100) Man zeige, dass $\mathbb{Z}_m$ für eine zusammengesetzte ganze Zahl m kein Körper ist.

(101) Welche der Polynome $f_1(x) = x^3 + 1$, $f_2(x) = x^3 + x + 1$, $f_3(x) = x^3 + x^2 + 1$, $f_4(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ sind irreduzibel über $\mathbb{Z}_2$?
[freiwillig] Sind die irreduziblen Polynome auch primitiv?

(102) Man konstruiere einen Körper mit 8 Elementen.

(103) Man zeige, dass das Polynom $m(x) = x^8 + x^4 + x^3 + x + 1$ irreduzibel über $\mathbb{Z}_2$ ist.

(104) Man identifiziere im Körper $\mathbb{F}_{256}$, der mit Hilfe des Polynoms $m(x)$ aus Beispiel (103) konstruiert wird, eine Restklasse $b(x) = b_7x^7 + b_6x^6 + \cdots b_1x + b_0$ modulo $m(x)$ (alles über $\mathbb{Z}_2$) mit einem Byte $b_7b_6 \dots b_1b_0 \in \{0,1\}^8$.
Man bilde Summe und Produkt der Bytes 1001 0101 und 1100 1100.

(105) Man betrachte wieder den Körper $\mathbb{F}_{256}$. Man zeige, dass die Abbildung $\alpha : \mathbb{F}_{256} \to \mathbb{F}_{256}$, $x \mapsto x^2$ ein Körperisomorphismus ist, d.h. α ist bijektiv und es gelten die Homomorphiebeziehungen $\alpha(x \cdot y) = \alpha(x) \cdot \alpha(y)$ und $\alpha(x + y) = \alpha(x) + \alpha(y)$.
Hinweis: Die Bijektivität folgt am einfachsten daraus, dass die multiplikative Gruppe $\langle \mathbb{F}_{256} \setminus \{0\}, \cdot \rangle$ zyklisch ist, also α, wenn man sie auf die Potenzen eines erzeugenden Elements zurückführt, der Multiplikation mit 2 modulo 255 entspricht. Die Homomorphieeigenschaften kann man direkt nachrechen, man beachte dabei $x + x = (1+1)\,x = 0\,x = 0$.

(106) Es sei $(r_j)_{j\geq 0}$ eine Schieberegisterfolge in $\mathbb{Z}_2$, d.h. es gibt ein $n \geq 1$ und $t_1, t_2, \dots, t_n \in \mathbb{Z}_2$ mit

$$r_j = \sum_{i=1}^{n} t_i r_{j-i} \qquad (j \geq n).$$

Man zeige (wie im Fall linearer Rekursionen), dass die erzeugende Funktion (= formale Potenzreihe) $R(x) = \sum_{j\geq 0} r_j x^j$ als rationale Funktion

$$R(x) = \frac{s(x)}{t(x)}$$

mit Polynomen $s(x), t(x) \in \mathbb{Z}_2[x]$ dargestellt werden kann. Insbesondere kann für $t(x) = 1 - \sum_{i=1}^{n} t_i x^i$ genommen werden, und der Grad von $s(x)$ ist kleiner als n.

(107) [freiwillig] Es sei F ein endlicher Körper. Man zeige, dass es dann eine kleinsete natürliche Zahl $p > 0$ mit der Eigenschaft

$$\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{p-\text{mal}} = 0$$

gibt. Weiters zeige man, dass man dadurch eine Kopie von $\mathbb{Z}_p$ in F gewinnt, nämlich die Elemente

$$F_p := \{0, 1, 1 + 1, 1 + 1 + 1, \ldots, \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{(p-1)-\text{mal}}\}.$$

Dann schließe man weiters, dass p eine Primzahl sein muss.

(108) [freiwillig] In Beispiel (107) wurde ein Unterkörper F_p eines endlichen Körpers F ermittelt. Man interpretiere nun F als Vektorraum über F_p, d.h. die Elemente von F sind die Vektoren, und man bildet Linearkombinationen nur mit Koeffizienten aus F_p. Da F endlich ist, gibt es nun eine endliche Basis $b_1, \ldots, b_n \in F$. Jedes Element aus $x \in F$ kann daher eindeutig als Linearkombination $x = y_1 b_1 + \cdots + y_n b_n$ mit $y_1, \ldots, y_n \in F_p$ dargestellt werden. Man leite daraus ab, dass F genau p^n Elemente hat.