DISKRETE MATHEMATIK FÜR INFORMATIK
1. ÜBUNG: 14. OKTOBER 2008

(1) Wieviele „Wörter“ der Länge 28 gibt es, bei denen genau 5-mal der Buchstabe `a`, 14-mal `b`, 5-mal `c`, 3-mal `d` vorkommen und genau einmal `e` vorkommt?

(2) Man bestimme die Anzahl der möglichen Tototips (`1`, `2`, `x`) bei 12 Spielen und die Anzahl der möglichen richtigen Zehner. (D. h. die Anzahl derjenigen Tips, die mit einer vorgegebenen Kolonne an genau 10 der 12 Stellen übereinstimmen.)

(3) Sei M eine nichtleere endliche Menge. Zeigen Sie: M besitzt gleich viele Teilmengen mit gerader Elementanzahl wie solche mit ungerader Elementanzahl.

(4) Wieviele Möglichkeiten gibt es, aus einem 32-bändigen Lexikon genau 7 Bücher auszuwählen, wobei zwischen zwei ausgewählten Bänden immer mindestens einer im Regal stehen bleiben soll?

(5) Man beweise die Identität

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

(6) Man beweise mit Hilfe der Identität aus Bsp. (5) den binomischen Lehrsatz

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

mittels vollständiger Induktion.
Hinweis: Man schreibe $(x+y)^n = (x+y)^{n-1}(x+y)$ und benütze die Identität aus Bsp. (5).

(7) Man beweise die Vandermonde'sche Identität

$$\binom{n+m}{k} = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{n}{\ell} \binom{m}{k-\ell}$$

mittels kombinatorischer Interpretation.
Hinweis: Man betrachte alle Teilmengen der Größe k der Vereinigung von 2 disjunkten Mengen der Größen n und m.

(8) Man beweise die Identität

$$\sum_{\ell=0}^{k} (-1)^{\ell} \binom{n}{\ell} = (-1)^k \binom{n-1}{k}.$$

(9) Man zeige

$$s_{n,2} = (n-1)!H_{n-1} \qquad (n \geq 2).$$

($H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ bezeichnet die n-te harmonische Zahl.)

DISKRETE MATHEMATIK FÜR INFORMATIK
2. ÜBUNG: 21. OKTOBER 2008

(10) Man begründe die Formeln $s_{n,n-1} = S_{n,n-1} = \binom{n}{2}$.

(11) Man beweise die Formel

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S_{n,k} x^{\underline{k}} \qquad (n \geq 0).$$

(12) Man bestimme die Anzahl der injektiven Abbildungen $f : A \to B$ von einer n-elementigen Menge A in eine k-elementige Menge B.

(13) Man bestimme die Anzahl der surjektiven Abbildungen $f : A \to B$ von einer n-elementigen Menge A in eine k-elementige Menge B.
Hinweis: Die Lösung ist $k!S_{n,k}$.

(14) In einer Menge von n Personen können 8 Personen Deutsch, 6 Englisch, 5 Französisch, 5 Deutsch und Englisch, 4 Deutsch und Französisch, 3 Englisch und Französisch, 3 alle drei Sprachen und niemand keine der drei Sprachen. Wie groß ist n ?

(15) Auf wieviele Arten können acht Türme auf ein Schachbrett gestellt werden, derart, dass sie einander nicht schlagen und die weiße Diagonale freibleibt?
Hinweis: Es besteht ein Zusammenhang zu fixpunktfreien Permutationen.

(16) Wieviele natürliche Zahlen n mit $1 \leq n \leq 10^6$ gibt es, die weder durch 2 teilbar, noch Quadratzahlen, noch dritte, noch 4. Potenzen natürlicher Zahlen sind?
Hinweis: Man kann das Problem durch Weglassen der 4. Potenzen vereinfachen!

(17) Man bestimme die erzeugende Funktion der Folge $a_n = n^2$.

(18) Zu welcher Folge a_n ist $A(x) = 2x/(1 - 2x)^2$ die erzeugende Funktion?

DISKRETE MATHEMATIK FÜR INFORMATIK
3. ÜBUNG: 28. OKTOBER 2008

(19) Man bestimme ohne Verwendung von Polarkoordinaten die Lösungen der Gleichung $z^2 - 3z + 3 + i = 0$.

(20) Man bestimme alle Wurzeln $\sqrt[5]{-1+i}$ und stelle sie graphisch in der Gaußschen Zahlenebene dar.

(21) Man zeige mit Hilfe des Quotientenkriteriums, dass die Reihe

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} \binom{\alpha}{n} z^n \qquad \left(\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} \right)$$

für $|z| < 1$ konvergiert. Wie groß ist der Konvergenzradius? ($\alpha \notin \{0, 1, 2, \ldots\}$)

(22) Man bestimme den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$g(z) = \sum_{n \geq 0} \binom{2n}{n} z^n.$$

Hinweis: $n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$.

(23) Man zeige für natürliche Zahlen $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$

$$\frac{1}{(1-z)^{k+1}} = \sum_{n \geq 0} \binom{k+n}{k} z^n.$$

(24) Man begründe mit Hilfe der entsprechenden Potenzreihenentwicklungen die Formel

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z.$$

(25) Man bestimme die Potenzreihenentwicklungen von

$$\cosh z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}) \quad \text{und} \quad \sinh z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}).$$

(26) Wie lauten die Summensätze für $\cosh(z_1 + z_2)$ und $\sinh(z_1 + z_2)$?
Hinweis: Man stelle $\cosh(z_1+z_2)$ bzw. $\sinh(z_1+z_2)$ mit Hilfe der Exponentialfunktion dar und benütze die Eigenschaft $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$.

(27) Man bestimme den Wert der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n\alpha)}{2^n}.$$

Hinweis: Man betrachte den Realteil der geometrischen Reihe $\sum (e^{i\alpha}/2)^n$.

DISKRETE MATHEMATIK FÜR INFORMATIK
4. ÜBUNG: 4. NOVEMBER 2008

(28) Man zeige:

$$\sum_{n\geq 0}\binom{2n}{n}z^n = \frac{1}{\sqrt{1-4z}}.$$

(29) Sei $A(z)$ die EF der Folge a_n. Zu welcher Folge ist die Funktion $\frac{1}{2}\left(A(z)+A(-z)\right)$ EF?

(30) Zu welcher Folge a_n ist die Funktion $A(z) = \dfrac{1}{(1-z)(1-2z)}$ EF?

(31) Man bestimme den Koeffizienten a_n der Potenzreihenentwicklung von

$$f(z) = \frac{2+3z^2}{\sqrt{1-5z}}.$$

(32) Man beweise die Formel

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$$

mit Hilfe der erzeugenden Funktion $(1+z)^{2n} = (1+z)^n(1+z)^n$.

(33) Man überprüfe für die Funktion $f(z) = z^3$ die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen.

(34) Man überprüfe mit Hilfe der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, welche der nachstehenden Funktionen komplex differenzierbar sin:

$$(a)\ f(z) = e^x(\cos y + i\sin y), \quad (b)\ f(z) = z\,\overline{z}, \quad (c)\ f(z) = z + \frac{i}{z}.$$

(35) Man bestimme die Potenzreihenentwicklung von $f(z) = \arctan(z)$. Hinweis: Man betrachte $f'(z)$.

(36) Man begründe die Grenzwertbeziehung

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = e^z \qquad (z\in\mathbb{C}).$$

Hinweis: Man logarithmiere und verwende die Potenzreihenentwicklung des Logarithmus.

DISKRETE MATHEMATIK FÜR INFORMATIK
5. ÜBUNG: 11. NOVEMBER 2008

(37) Man zeige, dass die Funktion $f(z) = e^z/(1-2z)$ eine Potenzreihendarstellung $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ besitzt und bestimme eine Näherungsformel von a_n.
Hinweis: Man bestimme die dominante Polstelle.

(38) Welche Nullstellen und Polstellen hat die Funktion $f(z) = \tan z$?

(39) Man bestimme die Potenzreihenentwicklung der Funktion $f(z) = \sin(z)$ an der Stelle $z_0 = \pi/2$.

(40) Man bestimme die Potenzreihenentwicklung der Funktion $f(z) = 1/(z-1)^2$ an der Stelle $z_0 = -1$.

(41) Für welche $z \in \mathbb{C}$ ist die Funktion $f(z) = e^{1/z}$ komplex differenzierbar? Welchen Wert hat das Integral $\int_\gamma f(z)\,dz$ für eine geschlossene Kurve γ, die einmal (gegen den Uhrzeigersinn) um den Punkt 0 herumgeht?

(42) Man bestimme die Partialbruchzerlegung von

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n = \frac{3z^2 - 2z + 2}{(z-1)^2(z+2)}$$

und explizite Formeln für die Koeffizienten a_n

(43) Wie bei (42) für die Funktion

$$f(z) = \frac{5z(z-1)}{(z^2+1)(z-3)}.$$

(44) Es seien $\hat{A}(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n/n!$ und $\hat{B}(z) = \sum_{n\geq 0} b_n z^n/n!$ exponentielle erzeugende Funktionen der Folgen a_n und b_n. Man zeige, dass die Koeffizienten des Produkts $\hat{C}(z) = \sum_{n\geq 0} c_n z^n/n! = \hat{A}(z) \cdot \hat{B}(z)$ durch

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k b_{n-k}$$

gegeben sind.

(45) Es sei $\hat{A}(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n/n!$ die exponentielle erzeugende Funktion der Folge a_n. Zu welchen Folge ist $\hat{A}'(z)$ bzw. $z\hat{A}'(z)$ exponentielle erzeugende Funktion?

DISKRETE MATHEMATIK FÜR INFORMATIK
6. ÜBUNG: 18. NOVEMBER 2008

(46) Man bestimme mit Hilfe EFen eine Summationsformel für

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} k^2.$$

Hinweis: $\sum_{n\geq 0} s_n x^n = \frac{1}{1-x} \sum_{n\geq 0} n^2 x^n$.

(47) Binärbäume $\mathcal{B}$ sind Wurzelbäume mit der Eigenschaft, dass jeder interne Knoten $\bullet$ zwei Nachfolger hat (einen linken und einen rechten), während die externen Knoten $\Box$ (oder Blätter) keinen Nachfolger haben. Man erkläre die symbolische Gleichung

$$\mathcal{B} = \Box + (\mathcal{B}, \bullet, \mathcal{B}).$$

Sei weiters $B(z) = \sum_{n\geq 0} b_n z^n$ die erzeugende Funktion der Anzahlen b_n der Binärbäume mit n internen Knoten. Man zeige, dass sich die obige Beziehung in die Gleichung

$$B(z) = 1 + zB(z)^2$$

üebersetzt. Weiters löse man die Gleichung für $B(z)$ und zeige, dass b_n durch

$$b_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

gegeben ist.

(48) Die Anzahl p_n der ebenen Wurzelbäume mit n Knoten ist dieselbe wie b_{n-1}, die Anzahle der Binärbäume mit $n-1$ internen Knoten. Diese Beobachtung hat einen tieferen Hintergrund. Mit Hilfe der sogenannten **Rotationskorrespondenz** kann eine Beziehung zwischen einem ebenen Wurzelbaum mit n Knoten und einem Binärbaum mit $n-1$ internen Knoten anzugeben.

Ausgegangen wird von einem ebenen Wurzelbaum mit n Knoten.

(a) Man streiche die Wurzel (und alle Kanten, die von der Wurzel ausgehen).

(b) Man streiche bei jedem weiteren Knoten, von dem Äste ausgehen, alle ausgehenden Kanten bis auf eine, die am weitesten links liegt.

(c) Man verbinde alle Knoten, die im ursprünglichen ebenen Wurzelbaum einen gemeinsamen direkten Vorgänger haben, zu je einer (horizontalen) Kette.

(d) Die eben eingerichteten horizontalen Kanten werden um 45° nach unten gedreht.

(e) Die $n-1$ verbliebenen Knoten fungieren nun als interne Knoten eines Binärbaums. Man ergänze noch die nötigen n externen Knoten.

Man zeige anhand eines geeigneten Beispiels, dass in dieser Korrespondenz jeder Schritt eindeutig rückgängig gemacht werden kann, sodass tatsächlich eine bijektive Beziehung entsteht.

(49) Es bezeichne t_n die Anzahl der Triangulierungen eines regelmäßigen $(n+2)$-Ecks (mit Eckpunkten $0, 1, 2, \dots, n+1$) in n Dreiecke (wobei die Eckpunkte der Dreiecke mit den Ecken des $(n+2)$-Ecks zusammenfallen). Man zeige $t_n = b_n$ indem man für die Menge $\mathcal{T}$ aller Triangulieren (wie oben) eine symbolische Gleichung der Form

$$\mathcal{T} = \emptyset + (\mathcal{T}, \Delta, \mathcal{T})$$

bestimmt; $\emptyset$ bedeutet, dass keine Dreiecke gebildet werden ($n = 0$) und Δ bezeichnet ein Dreieck, z.B. jenes, das die zwei kleinsten Eckpunkte des $(n+2)$-Ecks enthält.

(50) Eine Komposition einer natürlichen Zahl $n \ge 1$ ist eine Darstellung von n durch eine Summe $n = x_1 + x_2 + \cdots + x_k$ für ein $k \ge 1$ und Zahlen $x_j \ge 1$, wobei die Reihenfolge beachtet werden muss, d.h. $5 = 2 + 3$ und $5 = 3 + 2$ werden als verschieden angesehen.

Man zeige, dass die EF $C(z) = \sum_{n\ge 1} C_n z^n$ der Anzahlen C_n der verschiedenen Kompositionen von n durch

$$C(z) = \frac{1}{1 - \frac{z}{1-z}} - 1$$

gegeben ist. Wie kann daraus C_n berechnet werden?

(51) Wie lautet die EF der Anzahlen B_n der Kompositionen von n in Summen von 1'ern und 2'ern? Gibt es eine Beziehung zwischen B_n und den Fibonaccizahlen F_n?

(52) Eine Partition einer natürlichen Zahl $n \ge 1$ ist eine Darstellung von n durch eine Summe $n = x_1 + x_2 + \cdots + x_k$ für ein $k \ge 1$ und Zahlen $x_j \ge 1$ mit $x_1 \ge x_2 \ge \cdots \ge x_k$. Man kann also Partitionen als Kompositionen ansehen, wo es nicht auf die Reihenfolge angkommt, man daher o.B.d.A. die Summanden geordnet annehmen kann.

Man zeige, dass EF $P(z) = \sum_{n\ge 1} P_n z^n$ der Anzahlen P_n der verschiedenen Partitionen von n durch

$$P(z) = \prod_{m\ge 1} \frac{1}{1 - z^m}$$

gegeben ist. (Daraus lässt sich – leider – keine einfache Formel für P_n ableiten, es gilt aber $P_n \sim 1/(4n\sqrt{3}) \exp\left(\pi\sqrt{2n/3}\right)$.)

(53) Man löse die folgende Rekursion mit Hilfe erzeugender Funktionen:

$$a_n = 2a_{n-1} + 4^{n-1} \ (n \ge 1), \ a_0 = 1.$$

(54) Man löse die folgende Rekursion mit Hilfe erzeugender Funktionen:

$$a_n = 2a_{n-1} + 2^{n-1} \ (n \ge 1), \ a_0 = 1.$$

DISKRETE MATHEMATIK FÜR INFORMATIK
7. ÜBUNG: 25. NOVEMBER 2008

(55) Man bestimme der EEF $\hat{A}(z) = \sum_{n\ge 0} a_n z^n/n!$ der Folge a_n der Anzahlen der geordneten Auswahlen von n weißen, roten und blauen Kugeln, wobei 2 oder 4 weiße Kugeln, eine gerade Anzahl von roten und eine beliebige Anzahl von blauen Kugeln vorkommen können.

(56) Man bestimme den Koeffizienten a_n der EEF von

$$\hat{A}(z) = \sum_{n\ge 0} a_n \frac{z^n}{n!} = \frac{x^2}{48}(x^2+12)(e^{2x}+1).$$

(57) Rekursive Bäume sind markierte (nicht-ebene) Wurzelbäume, bei denen die Wurzel mit 1 markiert ist und auf allen Pfaden, die von der Wurzel wegführen, die Markierungen streng monoton wachsen. Man zeige, dass es $r_n = (n-1)!$ verschiedene rekursive Bäume mit n Knoten (und Markierungen $1, 2, \ldots, n$) gibt. Wie lautet die EEF $\hat{R}(z) = \sum_{n\ge 0} r_n z^n/n!$?
Hinweis: Man zeige, dass es genau n Möglichkeiten gibt, aus einem rekursiven Baum der Größe n einen rekursiven Baum der Größe $n+1$ zu machen.

(58) Es sei $\hat{A}(z) = \sum_{n\ge 0} a_n z^n/n!$ die EEF der Anzahlen a_n von markieren Objekten $\mathcal{A}$ der Größe n. Man zeige, dass dann

$$\hat{C}(z) = e^{\hat{A}(z)} = 1 + \hat{A}(z) + \frac{1}{2!}\hat{A}(z)^2 + \frac{1}{3!}\hat{A}(z)^3 + \cdots$$

die EEF der ungeordneten Auswahlen (mit entsprechenden modifizierten Markierungen) von Objekten $\mathcal{A}$ ist.
Hinweis: Die EEF $\hat{A}(z)^k$ entspricht den geordneten k-Tupeleln von von Objekten $\mathcal{A}$ (mit entsprechenden modifizierten Markierungen).

(59) Sei a_{nk} die Anzahl der Permutationen von $\{1, 2, \ldots, n\}$, deren Zyklendarstellung genau aus k Zyklen besteht. Man zeige

$$\sum_{n,k} a_{nk} \frac{z^n}{n!} u^k = e^{u \log \frac{1}{1-z}} = \frac{1}{(1-z)^u}.$$

und leite daraus die Beziehung

$$\sum_{k=0}^{n} a_{nk} u^k = u(u+1)(u+2)\cdots(u+n-1)$$

ab.

(60) Die Bellzahlen B_n geben an, auf wie viele Arten man eine n-elementige Menge in Systeme von nicht-leeren Teilmengen (Partitionen) zerlegen kann. Man zeige

$$\sum_{n\geq 0} B_n \frac{z^n}{n!} = e^{e^z-1}.$$

Hinweis: Man betrachte zuerst die EEF $e^z - 1$ von Partitionen in genau 1 Teilmenge und wende Bsp. 58 an.

(61) Man zeige für die Stirlingzahlen 2. Art:

$$\sum_{n,k} S_{nk} \frac{z^n}{n!} u^k = e^{u(e^z-1)}.$$

(62) Man löse die folgende Rekursion:

$$a_n + a_{n-1} + a_{n-2} = 0 \ (n \geq 2), \ a_0 = 3, \ a_1 = -1.$$

(63) Man bestimme die Potenzen A^n, $n \geq 0$, der Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Hinweis: Man setze $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ b_n & a_n \end{pmatrix}$ und stelle Rekursionen für a_n und b_n auf.

DISKRETE MATHEMATIK FÜR INFORMATIK
8. ÜBUNG: 9. DEZEMBER 2008

(64) Es sei a_n die Anzahl aller Teilmengen der Menge $\{1, 2, \dots, n\}$, die keine zwei aufeinanderfolgenden Zahlen enthalten.
Man stelle eine Rekursion für a_n auf und löse sie!

(65) Man beweise den Satz von Mirsky ("Dualversion" des Satzes von Dilworth): Es sei $\langle H, \leq \rangle$ eine endliche Halbordnung, bei der jede Teilkette höchstens m Elemente hat. Dann kann H in (höchstens) m disjunkte Antiketten zerlegt werden.
Hinweis: Man betrachte die Menge M der maximalen Elemente in H, die ja eine Antikette bilden und reduziere das Problem auf $H \setminus M$.

(66) [freiwillig] Es sei $\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(n^2+1)$ eine Permutation der n^2+1 Zahlen $1, 2, \dots, n^2+1$. Man zeige, dass es in π eine monotone Teilfolge der Länge $n+1$ gibt. (Eine Teilfolge $\pi(i_1), \pi(i_2), \dots, \pi(i_\ell)$ mit $i_1 < i_2 < \dots < i_\ell$ ist monoton, wenn $\pi(i_1) < \pi(i_2) < \dots < \pi(i_\ell)$ oder $\pi(i_1) > \pi(i_2) > \dots > \pi(i_\ell)$ ist.)
Hinweis: Man definiere eine Halbordnung auf der Menge $H = \{1, 2, \dots, n^2+1\}$ mit $i \sqsubseteq j$, falls $i \leq j$ und $\pi(i) \leq \pi(j)$. Man beobachte, dass eine monoton steigende Teilfolge von π einer Teilkette in $\langle H, \sqsubseteq \rangle$ und eine monoton fallende Teilfolge von π einer Antikette in $\langle H, \sqsubseteq \rangle$ entspricht. Schließlich wende man den Satz von Dilworth an.

(67) Man zeige, dass es auf einem regulären bipartiten Graphen (vom Grad $d > 0$) immer ein perfektes Matching gibt. (Ein Graph heisst regulär, wenn jeder Knoten denselben Knotengrad d hat. Ein Matching heisst perfekt, wenn jeder Knoten mit einer Kante des Matchings inzidiert, also alle Knoten "gematcht" werden).
Hinweis: Man wende den Heiratssatz an.

(68) [freiwillig] Es sei A eine $n \times n$-Matrix mit natürlichen Zahlen als Eintragungen mit der Eigenschaft, dass alle Zeilen- und Spaltensummen gleich einer ganzen Zahl $d > 0$ sind. Man zeige, dass A als Summe von Permutationsmatrizen dargestellt werden kann. (Eine Matrix ist eine Permutationsmatrix, wenn in jeder Spalte und jeder Zeile genau eine 1 steht und alle anderen Eintragungen 0 sind.)
Hinweis: Man verwende Beispiel 48), indem man die Matrix A mit einem regulären bipartiten Graphen identifiziert und beobachtet, dass dann ein perfektes Matching einer Permutationsmatrix entspricht.

(69) Man bestimme die Möbiusfunktion auf der in Abbildung 1 durch das Hassediagramm angegebenen Halbordnung.

(70) Es seien $\langle H_1, \leq_1 \rangle$, $\langle H_2, \leq_2 \rangle$ zwei lokalendliche Halbordnungen mit Möbiusfunktionen μ_1 und μ_2. Das Produkt $\langle H = H_1 \times H_2, \leq \rangle$ der Halbordnungen wird durch

$$(a_1, b_1) \leq (a_2, b_2) \quad \iff \quad a_1 \leq_1 a_2 \wedge b_1 \leq_2 b_2$$

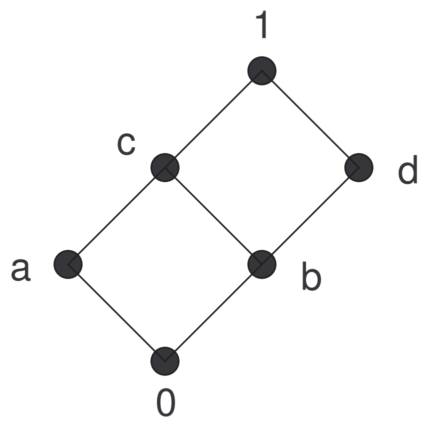

FIGURE 1. Hassediagramm einer Abbildung.

definiert. Man zeige, dass

$$\mu((a_1, b_1), (a_2, b_2)) = \mu_1(a_1, a_2) \cdot \mu_2(b_1, b_2)$$

die Möbiusfunktion auf $\langle H_1 \times H_2, \leq \rangle$ ist.
Hinweis: Man beobachte, dass das Intervall $[(a_1, b_1), (a_2, b_2)]$ in H nichts anderes als $[a_1, a_2] \times [b_1, b_2]$ ist.

(71) [freiwillig] Es bezeichne $\varphi(n)$ die sogenannte Eulersche φ-Funktion, also die Anzahl der Zahlen $1 \leq k \leq n$ mit der Eigenschaft $\mathrm{ggT}(k, n) = 1$. Man zeige

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n.$$

Hinweis: Für einen Teiler d von n bezeichne A_d die Menge der Zahlen $1 \leq k \leq n$ mit der Eigenschaft $\mathrm{ggT}(k, n) = n/d$ bzw. dass die gekürzte Darstellung des Bruches $\frac{k}{n}$ im Nenner d stehen hat. Man überlege, dass A_d genau $\varphi(d)$ Elemente besitzt.

(72) Man zeige mit Hilfe von Bsp. 71) und Möbiusinversion

$$\varphi(n) = \sum_{d|n} d\mu\left(\frac{n}{d}\right) = n \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d}.$$

DISKRETE MATHEMATIK FÜR INFORMATIK
9. ÜBUNG: 16. DEZEMBER 2008

(73) Ein schlichter ungerichteter Graph $G = (V, E)$ heißt kubisch, wenn jeder Knoten $v \in V$ Knotengrad $d(v) = 3$ hat.
  a) Geben Sie ein Beispiel für einen kubischen Graphen mit $|V| = 6$ an!
  b) Gibt es einen kubischen Graphen mit ungerader Knotenanzahl $|V|$?
  c) Zeigen Sie, daß es zu jedem $n \geq 2$ einen kubischen Graphen mit $|V| = 2n$ gibt!

(74) Unter n Mannschaften wird ein Turnier ausgetragen, und es haben insgesamt schon $n + 1$ Spiele stattgefunden. Man zeige, dass mindestens eine Mannschaft dann bereits an mindestens 3 Spielen teilgenommen hat.

(75) Man zeige mit Hilfe eines geeigneten graphentheoretischen Modells, dass es in jeder Stadt mindestens zwei Bewohner mit der gleichen Anzahl von Nachbarn gibt.

(76) Sei $G = (V, E)$ ein schlichter ungerichteter Graph mit $|V| > 4$. Man zeige, daß dann entweder G oder G^κ einen Kreis enthält. (G^κ ist der komplementäre Graph zu G, d.h. G^κ enthält die selben Knoten wie G und alle Kanten $(v, w) \in V(G) \times V(G)$, $v \neq w$, die nicht in $E(G)$ enthalten sind.)

(77) [freiwillig] Es bezeichne K_n, $n \geq 2$ den vollständigen (ungerichteten) Graphen mit Knoten $V(K_n) = \{1, 2, \ldots, n\}$ und aus allen möglichen ungerichteten Kanten $e = (i, j)$ mit $1 \leq i < j \leq n$.
Man zeige, dass K_n genau n^{n-2} Gerüste besitzt.
Wie viele verschiedene Bäume mit Knoten $\{1, 2, \ldots, n\}$ gibt es?
(Hinweis: Man verwende das Matrix-Baum-Theorem. Bei der Matrix $D(K_n) - A(K_n)$ streiche man die erste Zeile und Spalte und beobachte, dass dann die Summe aller Zeilen genau $(1, 1, \ldots, 1)$ ist. Mit Hilfe dieser (neuen ersten) Zeile forme man die Matrix duch Additionen dieser Zeile so um, dass ab der 2. Zeile nur in Diagonale eine von 0 verschiedene Zahl – nämlich n – steht.)

(78) Man zeige: Jeder Baum ist ein paarer Graph. (Ein ungerichteter Graph G ist ein *paarer Graph* oder *bipartiter Graph*, wenn die Knotenmenge $V(G)$ in zwei disjunkte, nichtleere Teilmengen V_1, V_2 zerlegt werden kann, so daß es nur Kanten $(v_1, v_2) \in E(G)$ mit $v_1 \in V_1$ und $v_2 \in V_2$ gibt.)

(79) Man zeige: Ein ungerichteter schlichter Graph G ist genau dann ein paarer Graph, wenn jeder Kreis in G gerade Länge hat.

(80) Ein t-ärer Baum ($t \in \mathbb{N}$, $t \geq 2$) ist ein ebener Wurzelbaum, bei dem jeder Knoten entweder 0 Nachfolger (Endknoten) oder genau t

Nachfolger (interner Knoten) hat. Für $t = 2$ ergeben sich also genau die Binärbäume. Wieviele Endknoten hat ein t-ärer Baum mit n internen Knoten?

(81) Man bestimme die Komponenten des starken Zusammenhangs des gerichteten Graphen aus Abbildung 2.

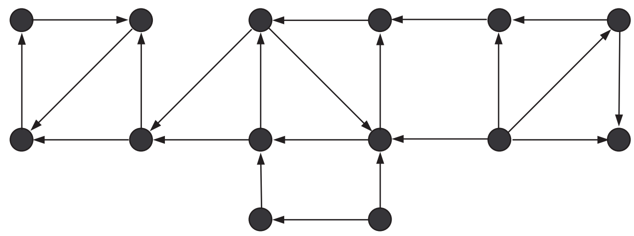

Figure 2. Gerichteter Graph.

DISKRETE MATHEMATIK FÜR INFORMATIK
10. ÜBUNG: 13. JÄNNER 2009

(82) Es sei $G = (V, E)$ ein einfacher ungerichteter Graph mit n Knoten. und $|E| > (n-1)(n-2)/2$. Man zeige, dass G zusammenhängend ist!

(83) Man zeige: Für einen einfachen, zusammenhängenden, planaren, Graphen $G = (V, E)$ gilt: $|E| \leq 3|V| - 6$. und folgere daraus, dass der vollständige Graph K_5 nicht planar ist.
Hinweis: Man zeige zuerst, dass in so einem Graphen $\sum_{j\geq 3} j\, f_j = 2|E|$ gilt, wobei f_j die Anzahl der Flächen mit j Kanten bezeichnet, leite daraus die Ungleichung $3|F| \leq 2|E|$ ab und verwende schließlich die Eulersche Polyederformel.

(84) Sei G ein einfacher, ungerichteter Graph. Dann wird der *line graph* G^* zu G folgendermaßen definiert: $V(G^*) = E(G)$, und (e, f) ist in $E(G^*)$, genau dann, wenn im Graphen G die Kanten e und f einen gemeinsamen Knoten haben. Man zeige: Ist G ein einfacher, ungerichteter, Eulerscher Graph (in dem Sinn, daß eine geschlossene Eulersche Linie existiert), so ist der line graph G^* Hamiltonsch und Eulersch.

(85) Für welche m, n besitzt der vollständige paare Graph $K_{m,n}$ eine geschlossene Hamiltonsche Linie? ($|V_1| = m$ und $|V_2| = n$, und alle Knoten aus V_1 sind mit allen Knoten aus V_2 verbunden.)

(86) Ein gerichteter Graph heißt azyklisch, wenn er keinen Zyklus positiver Länge, also keine geschlossene Kantenfolge positiver Länge, besitzt. Man zeige, dass ein gerichteter Graph G genau dann azyklisch ist, wenn es möglich ist, die Knoten so zu nummerieren, so dass die Adjazenzmatrix $A(G) = (a_{ij})$ eine obere Dreiecksmatrix ist, d.h. $a_{ij} = 0$ for $i > j$.

(87) Ein Knoten u eines ungerichteten Graphen G heißt zentral, wenn

$$\max_{v \in V(G)} d(u, v) = \min_{w \in V(G)} \left(\max_{v \in V(G)} d(w, v) \right)$$

erfüllt ist. Man zeige, daß es in einem Baum T entweder genau einen zentralen Knoten u_0 oder zwei zentrale Knoten u_1, u_2 mit $(u_1, u_2) \in E(T)$ gibt.

(88) Seien T_1, T_2 zwei spannende Bäume eines zusammenhängenden Graphen und $a \in E(T_1) \setminus E(T_2)$. Man zeige, dass es dann eine Kante $b \in E(T_2) \setminus E(T_1)$ gibt, so dass die Kantenmengen $(E(T_1) \setminus \{a\}) \cup \{b\}$ und $(E(T_2) \setminus \{b\}) \cup \{a\}$ wieder zwei spannende Bäume festlegen.

(89) Man zeige, dass es zu jedem $n \geq 1$ einen "Kreis" (DeBruijn-Folge) aus 2^n Kästchen mit Eintragungen 0 oder 1 gibt, so dass alle 2^n 0-1-Folgen der Länge n als Teilabschnitte dieses Kreises auftregen (siehe

Abbildung 3 für $n = 4$).
Hinweis: Man definiere einen (gerichteten) Graphen aus 2^{n-1} Knoten, die mit 0-1-Folgen der Länge $n-1$ bezeichnet werden. Weiters setzt man eine gerichtete Kante von $v = x_1 \cdots x_{n-1}$ nach $w = y_1 \cdots y_{n-1}$, wenn $x_2 = y_1$, $x_3 = y_2$, …, $x_{n-1} = y_{n-2}$ gilt, also die letzten $n-2$ Elemente von v (auch in der Reihenfolge) mit den ersten $n-2$ Elementen von w übereinstimmen. Man zeige, dass dieser Graph Eulersch ist und dass eine (geschlossene) Eulersche Linie einem gesuchten "Kreis" entspricht. Man führe dies auch bei $n = 4$ explizit durch.

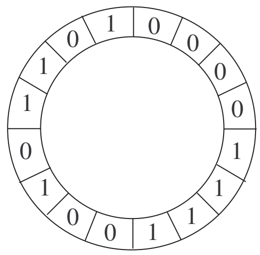

FIGURE 3. DeBruijn-Folge für $n = 4$

(90) [freiwillig] Man beweise für $c \geq 3$:

$$R(n_1, n_2, \ldots, n_{c-2}, n_{c-1}, n_c) \leq R(n_1, n_2, \ldots, n_{c-2}, R(n_{c-1}, n_c)).$$

Hinweis: Man setze $N = R(n_1, n_2, \ldots, n_{c-2}, R(n_{c-1}, n_c))$ und betrachte eine Färbung von K_N mit c Farben. Zunächst unterscheide man zwischen den Farben $c-1$ und c nicht und wende die Ramsey-Eigenschaft für $c-1$ Farben an.

DISKRETE MATHEMATIK FÜR INFORMATIK
11. ÜBUNG: 20. JÄNNER 2009

(91) Man bestimme im Netzwerk 1 aus Abbildung 4 mit Hilfe des Kruskalalgorithmus einen minimalen und einen maximalen spannenden Baum.

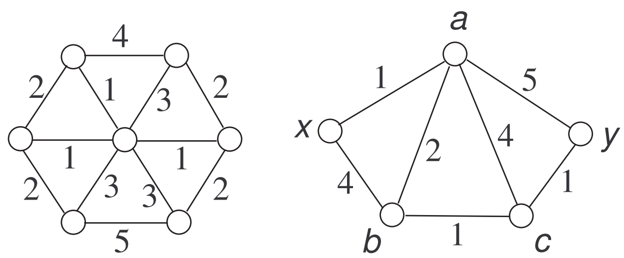

FIGURE 4. Netzwerk 1 und 2

(92) Bestimmen Sie mit dem Algorithmus von Dijkstra einen kürzesten Weg zwischen den Knoten x und y des Netzwerkes 2 aus Abbildung 4.

(93) Man betrachte ein Flussproblem auf einem Netzwerk, das neben den üblichen Kantenkapazitäten auch Knotenkapazitäten hat, d.h. jedem Knoten v wird eine $c(v) \geq 0$ zugeordnet und ein Fluss ist nur dann zulässig, wenn die Summe der Flüsse zum Knoten v nicht gößer als $c(v)$ ist.

Wie kann man das Netzwerk modifizieren, dass der Satz von Ford-Fulkerson angewandt werden kann (also nur Kanten – gegebenenfalls neue Kanten – Kapazitäten tragen)?

Schließlich betrachte man ein Netzwerk mit mehrerer Quellen und Senken. Kann dieses Netzwerk auch so modifiziert werden, dass der Satz von Ford-Fulkerson angewandt werden kann?

(94) Sei M ein Matching eines schlichten ungerichteten Graphen $G = (V, E)$, also eine Teilmenge der Kanten E mit der Eigenschaft, dass jeder Knoten $v \in V$ höchstens mit einer Kante aus M inzidiert. Ein Weg W in G heißt alternierend, wenn die Kanten in W abwechselnd in M und $E \setminus M$ liegen. Eine alternierender Weg W heißt erweiternd, wenn sowohl Anfangs-, als auch Endknoten von W zu keiner Kante aus M gehören.

Es sein nun W ein erweiternder alternierender Weg. Man zeige, dass dann $M' := M \Delta W$ ein Matching mit $|M'| = |M| + 1$ Kanten ist. (Δ ist die symmetrische Differenz.)

(95) [freiwillig] Man betrachte eine rechteckige Matrix $A = (a_{ij})$ mit lauter verschiedenen reellen Eintragungen $a_{ij} > 0$. Man sortiere zunächst in jeder Zeile von A der Größe nach (und erhält eine Matrix $B = (b_{ij})$. Darauf sortiere man jede Spalte der Matrix B ebenfalls der Größe nach (und erhält eine Matrix $C = (c_{ij})$). Man zeige, dass bei dieser Matrix C die Zeilen auch schon der Größe nach sortiert sind.
Hinweis: Man betrachte z.B. zwei Spalten von B und finde einen Algorithmus, der beide Spalten gleichzeitig sortiert, aber die Elemente der ersten Spalte in jedem Schritt immer kleiner sind als die entsprechenden Elemente der zweiten Spalte.

(96) Man zeige, dass in den ganzen Zahlen aus $a|b$ und $a|c$ auch $a|(xb+yc)$ (für beliebige ganze Zahlen x, y) folgt.
Die Notation "a teilt b", i.Z. $a|b$, bedeutet, dass es eine ganze Zahl k mit $ak = b$ gibt.

(97) Es seien x, y ungerade Zahlen. Man zeige $2|(x^2 + y^2)$, aber $4 \not| (x^2 + y^2)$.

(98) Man zeige, dass für alle natürlichen Zahlen n die Teilbarkeitseigenschaften $2|(n^2 - n)$ und $6|(n^3 - n)$ gelten.

(99) Man bestimme alle ganzen Zahlen x, y, die die Gleichung $243x + 198y = 9$ erfüllen.

DISKRETE MATHEMATIK FÜR INFORMATIK
12. ÜBUNG: 27. JÄNNER 2009

(100) Man zeige: Aus $\mathrm{ggT}(a, 4) = 2$ und $\mathrm{ggT}(b, 4) = 2$ folgt (für ganze Zahlen a, b) $\mathrm{ggT}(a + b, 4) = 4$.

(101) Man zeige $\mathrm{ggT}(a, b) \cdot \mathrm{kgV}(a, b) = a \cdot b$.

(102) Man zeige, dass es unendlich viele Primzahlen p mit $p \equiv 3 \bmod 4$ gibt.
Hinweis: Man nehme an, es gäbe nur endliche viele Primzahlen $p_1, \ldots, p_m$ dieser Form und betrachte die Zahl $N = 4p_1p_2 \cdots p_m - 1$.

(103) Man zeige, dass jede ganze Zahl der Form $n^4 + 4^n$ (mit $n > 1$) keine Primzahl ist.
Hinweis: Man unterscheide zwischen geradem und ungeradem n. Insbesondere betrachte man bei ungeradem n die Zerlegung $(n^2 + 2^n + n2^{(n+1)/2})(n^2 + 2^n - n2^{(n+1)/2})$.

(104) Man löse folgende linearen Kongruenz: $77x \equiv 14 \bmod 119$.

(105) Man löse das folgende System von linearen Kongruenzen:

$$x \equiv 2 \bmod 3,\ x \equiv 3 \bmod 5,\ x \equiv 4 \bmod 7.$$

(106) Man bestimme die Einer- und die Zehnerstelle von 2^{1000}.

(107) Welche der Polynome $f_1(x) = x^3 + 1$, $f_2(x) = x^3 + x + 1$, $f_3(x) = x^3 + x^2 + 1$, $f_4(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ sind irreduzibel über $\mathbb{Z}_2$?
Ein Polynom $f(x)$ vom Grad k mit Koeffizienten aus einem Körper K heißt irreduzibel (oder unzerlegbar) über K, wenn es unmöglich ist, $f(x)$ als Produkt zweiter Polynome (mit Koeffizienten aus K) mit Graden kleiner als k darzustellen.

(108) Man zeige, dass das Polynom $m(x) = x^8 + x^4 + x^3 + x + 1$ irreduzibel über $\mathbb{Z}_2$ ist.