DIE HÖHE VON REKURSIVEN BÄUMEN

Michael Drmota

Institut für Diskrete Mathematik und Geometrie

Technische Universität Wien

michael.drmota@tuwien.ac.at

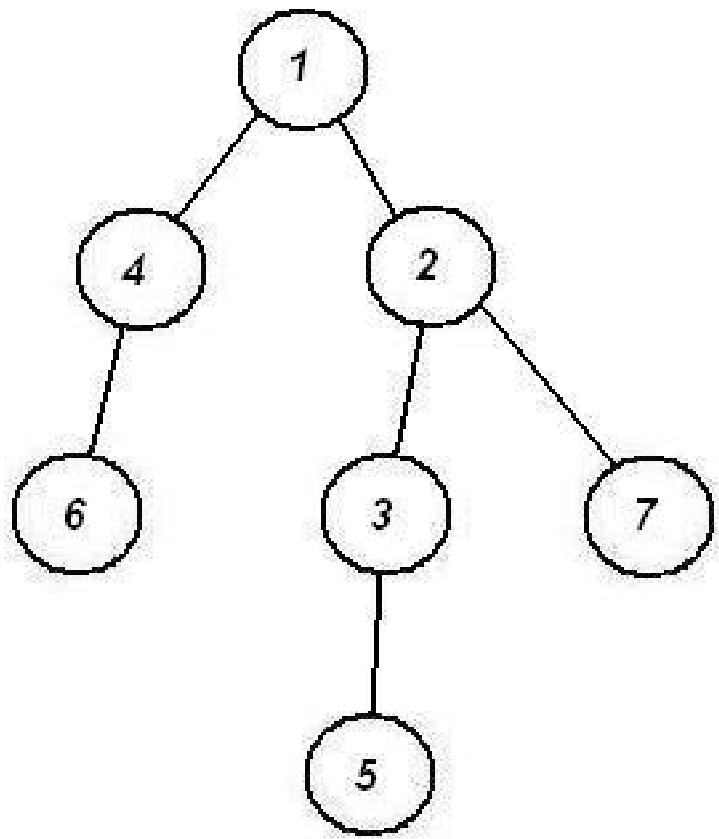
www.dmg.tuwien.ac.at/drmota/

Kolloquium aus Diskreter Mathematik, TU Graz, 2. 12. 2005

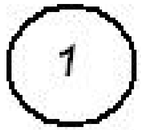
Outline of the Talk

- Rekursive Bäume
- Allgemeine “Increasing Trees”
- Binäre Suchbäume
- “Travelling Wave”-Verteilung der Höhe
- Fixpunktgleichung und Ersatzfunktionen
- “Intersection Property”

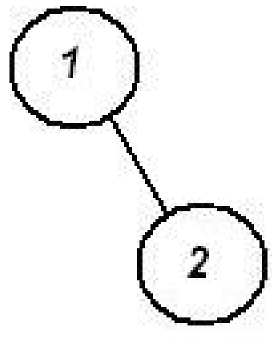
Rekursive Bäume



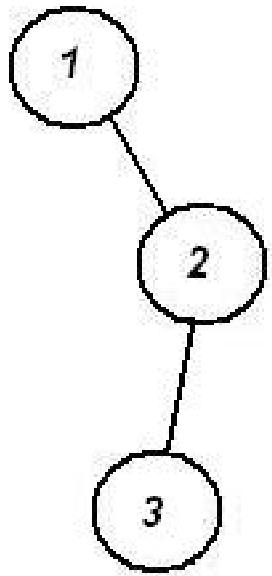
Rekursive Bäume



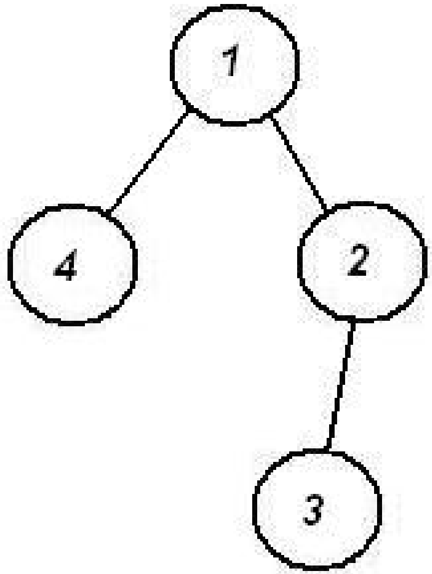
Rekursive Bäume



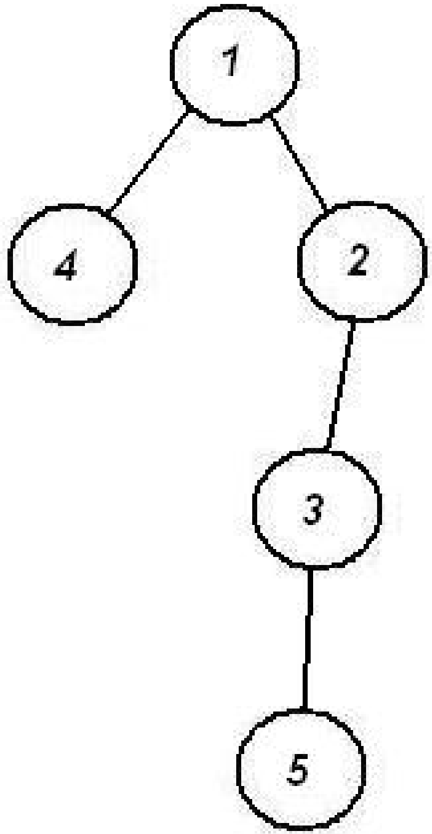
Rekursive Bäume



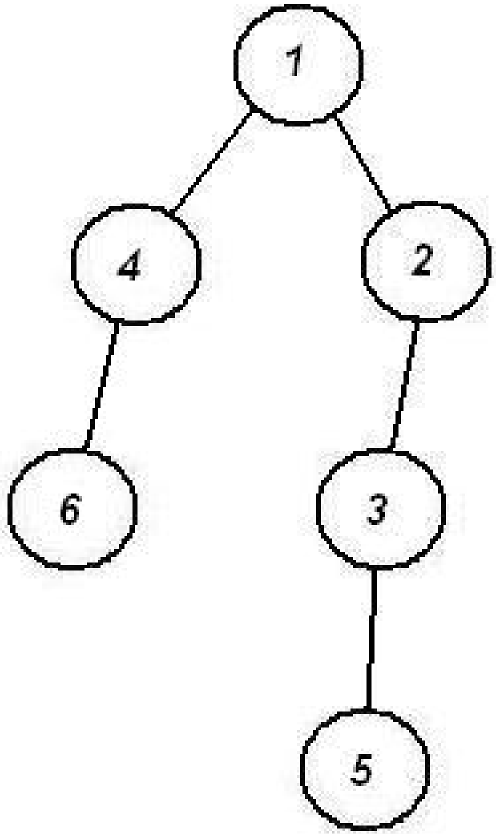
Rekursive Bäume



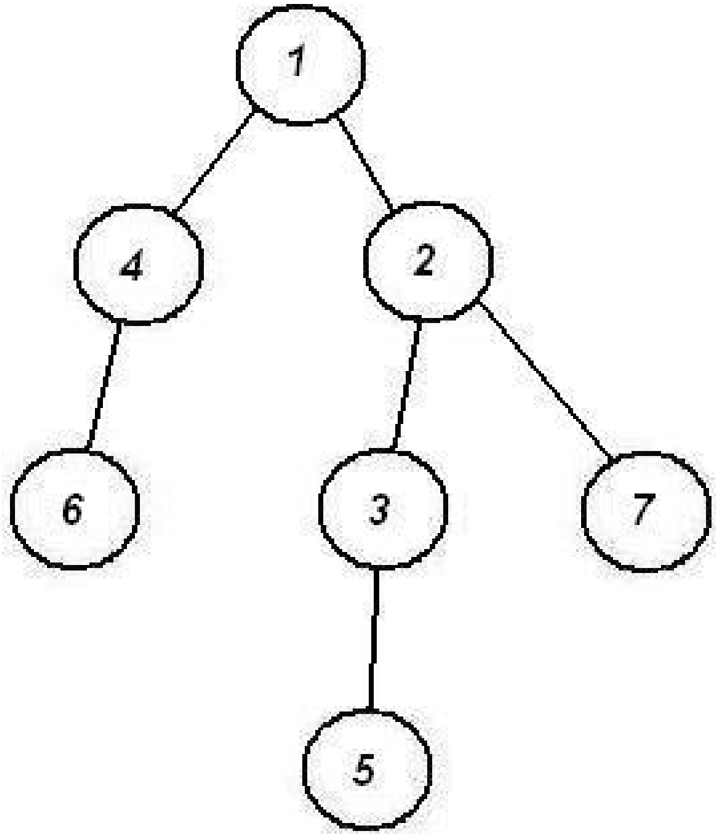
Rekursive Bäume



Rekursive Bäume



Rekursive Bäume



Rekursive Bäume

Kombinatorische Beschreibung:

- markierter Wurzelbaum
- Labels sind streng monoton wachsend
- Links-Rechts-Reihenfolge irrelevant

Rekursive Bäume

Anzahl rekursiver Bäume:

$$\begin{aligned} y_n &= \text{Anzahl rekursiver Bäume der Größe } n \\ &= (n-1)! \end{aligned}$$

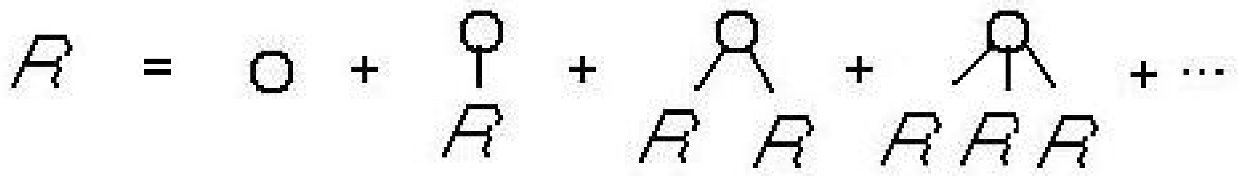
Der Knoten mit Label j hat genau $j-1$ Möglichkeiten, eingefügt zu werden $\Longrightarrow \quad y_n = 1 \cdot 2 \cdots (n-1)$.

Rekursive Bäume

Erzeugende Funktion:

$$y(x) = \sum_{n\geq 1} y_n \frac{x^n}{n!} = \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n} = \log \frac{1}{1-x}$$

$$\boxed{y'(x) = 1 + y(x) + \frac{y(x)^2}{2!} + \frac{y(x)^3}{3!} + \cdots = e^{y(x)}}$$



Die Unterbäume der Wurzel bilden eine **ungeordnete** Folge von rekursiven Bäumen. $(y'(x) = \sum_{n\geq 0} y_{n+1} x^n / n!)$

Rekursive Bäume

Wahrscheinlichkeitstheoretisches Modell:

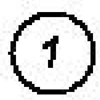
Wachstumsprozess:

- Der Prozess startet mit der Wurzel, die das Label 1 erhält.

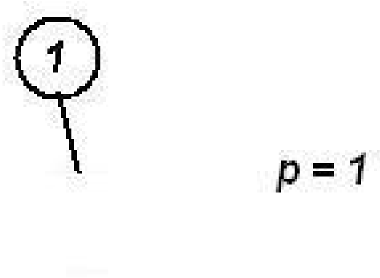
- Im j-ten Schritt wird ein neuer Knoten (mit Label j) an einen der bisherigen $j-1$ Knoten, jeweils mit Wahrscheinlichkeit $1/(j-1)$ angehängt.

Nach n Schritten hat jeder Baum (der Größe n) gleiche Wahrscheinlichkeit $1/(n-1)!$.

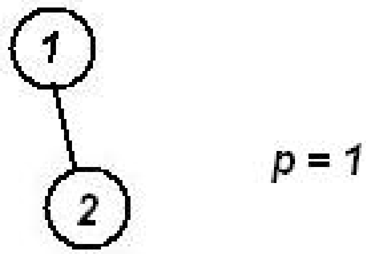
Rekursive Bäume



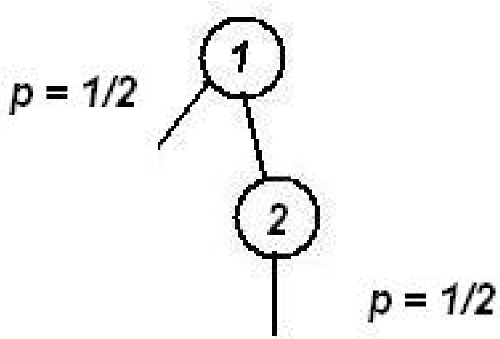
Rekursive Bäume



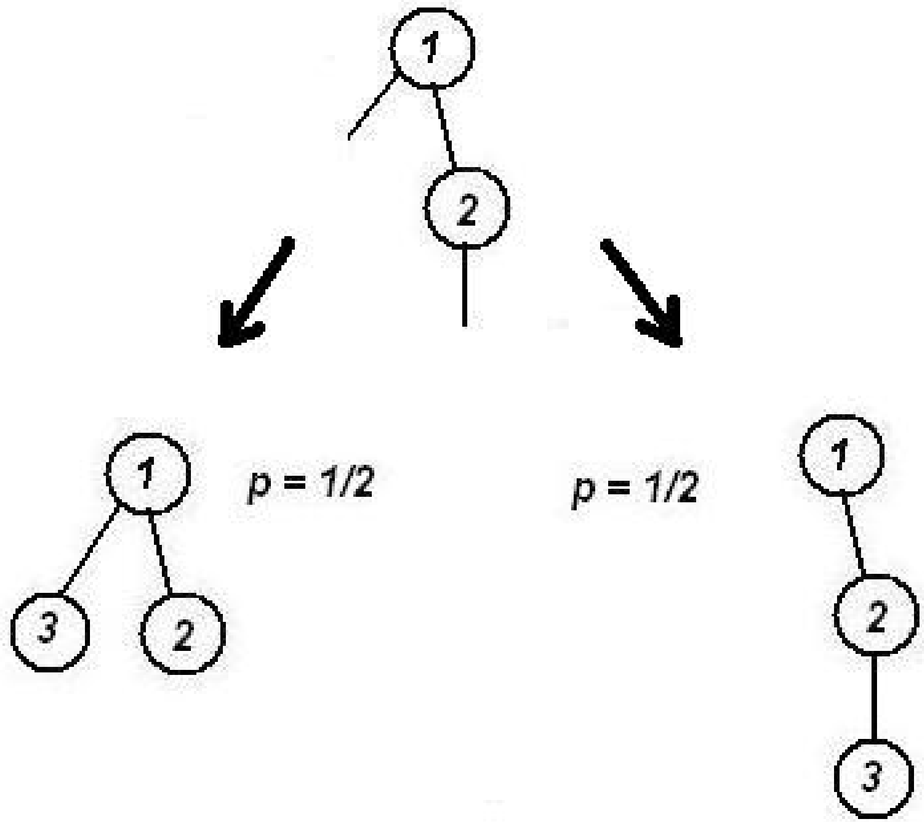
Rekursive Bäume



Rekursive Bäume

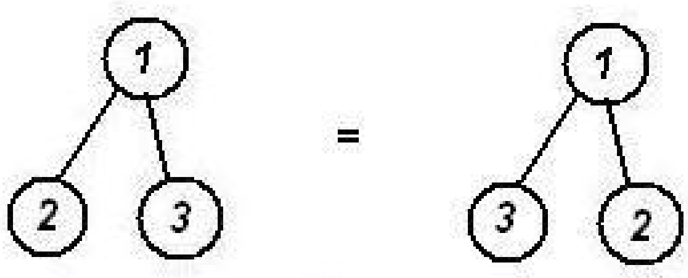


Rekursive Bäume



Rekursive Bäume

Bemerkung.



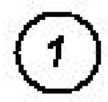
Rekursive Bäume

Höhe H_n

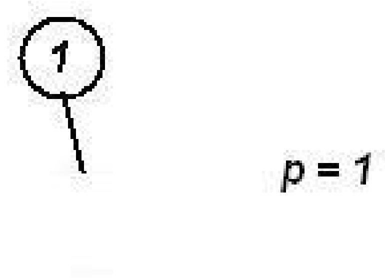
[Pittel 1994]

$$\boxed{\frac{H_n}{\log n} \longrightarrow e \qquad (f.s.)}$$

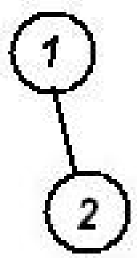
Ebene rekursive Bäume



Ebene rekursive Bäume

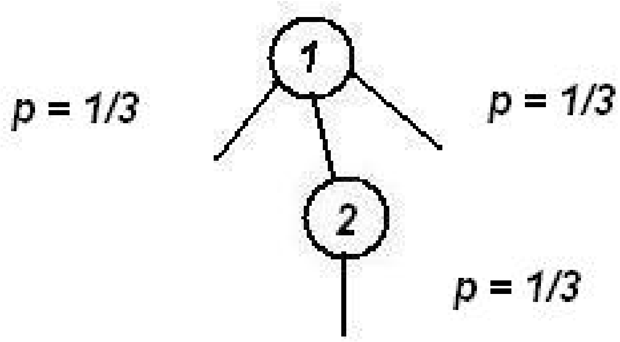


Ebene rekursive Bäume

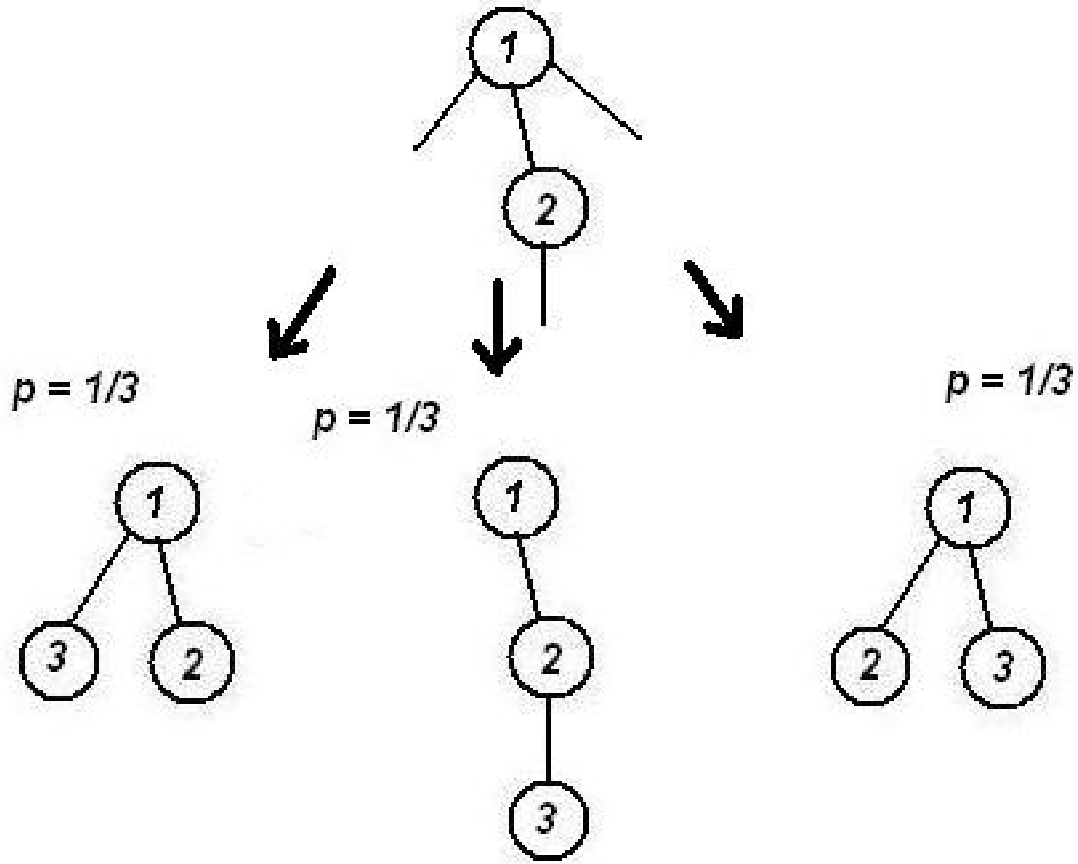


$p = 1$

Ebene rekursive Bäume

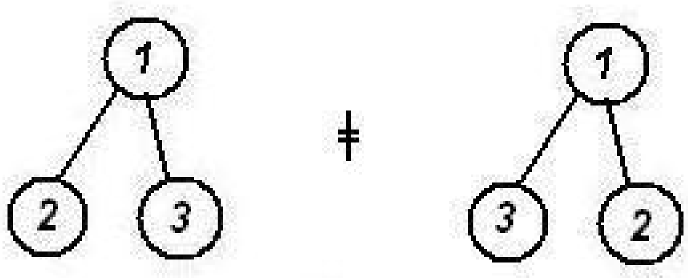


Ebene rekursive Bäume



Ebene rekursive Bäume

Bemerkung



Ebene rekursive Bäume

Anzahl von ebenen rekursiven Bäumen:

$$\begin{aligned} y_n &= \text{Anzahl von ebenen rekursiven Bäume der Größe } n \\ &= 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3) = (2n-3)!! \\ &= \frac{(2n-2)!}{2^{n-1}(n-1)!} \end{aligned}$$

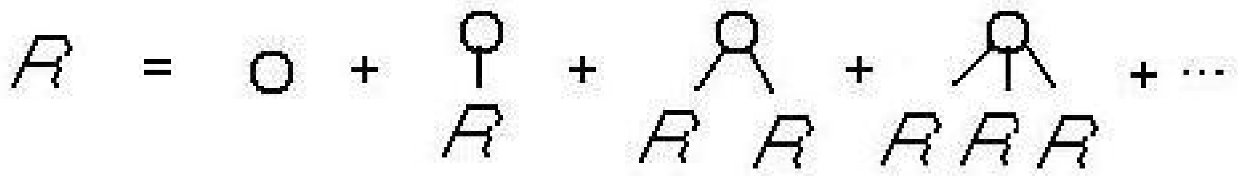
Im j-ten Schritt hat der Knoten j genau $2j-3$ Möglichkeiten, eingesetzt zu werden $\Longrightarrow y_n = 1 \cdot 3 \cdots (2n-3)$.

Ebene rekursive Bäume

Erzeugende Funktionen:

$$y(x) = \sum_{n\geq 1} y_n \frac{x^n}{n!} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^{n-1}} \binom{2(n-1)}{n-1} \frac{x^n}{n} = 1 - \sqrt{1-2x}$$

$$\boxed{y'(x) = 1 + y(x) + y(x)^2 + y(x)^3 + \cdots = \frac{1}{1-y(x)}}$$



Die Unterbäume der Wurzel bilden eine **geordnete** Folge von ebenen rekursiven Bäumen. ($y'(x) = \sum_{n\geq 0} y_{n+1} x^n / n!$)

Ebene rekursive Bäume

Wahrscheinlichkeitstheoretisches Modell:

Wachstumsprozess

- Der Prozess startet mit der Wurzel, die das Label 1 erhält.

- Im j-ten Schritt wird ein neuer Knoten (mit Label j) an einen der bisherigen Knoten mit Weggrad d mit Wahrscheinlichkeit $(d+1)/(2j-3)$ angehängt.

Nach n Schritten hat jeder Baum (der Größe n) gleiche Wahrscheinlichkeit $1/(2n-3)!!$.

Ebene rekursive Bäume

Höhe H_n

[Pittel 1994]

$$\boxed{\frac{H_n}{\log n} \to \frac{1}{2s} = 1.79556\ldots \qquad (f.s.)}$$

wobei $s = 0.27846\ldots$ die positive Lösung von $se^{s+1} = 1$ ist.

Allgemeine “Increasing Trees”

$\mathcal{P}_n$: Menge aller *ebener rekursiver Bäume* der Größe n

$\phi_0, \phi_1, \ldots$: Gewichtsfolge ($\phi_0 > 0$, $\phi_j > 0$ für ein $j \geq 2$)

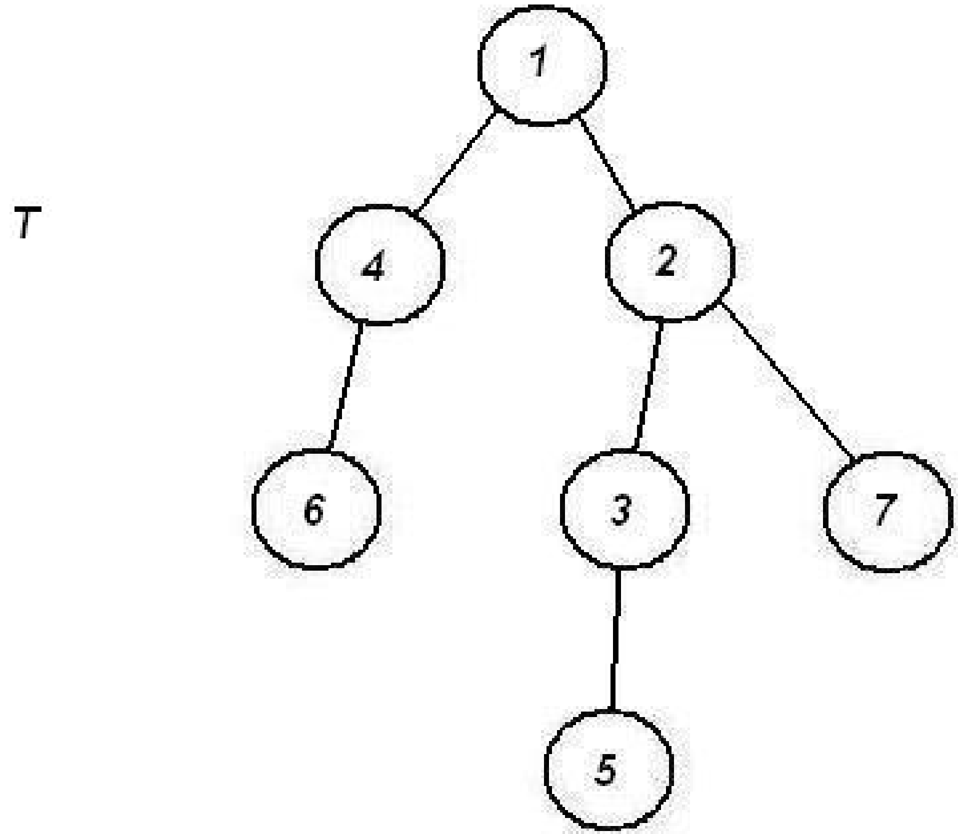
$$\phi(t) = \phi_0 + \phi_1 t + \phi_2 t^2 + \cdots$$

Gewicht eines Baumes $T \in \mathcal{P}_n$:

$$\boxed{\omega(T) = \prod_{j \geq 0} \phi_j^{N_j(T)}}$$

wobei $N_j(T) =$ die Anzahl der Knoten in T mit Weggrad j bezeichnet.

Allgemeine "Increasing Trees"



$$\omega(T) = \phi_0^3 \phi_1^2 \phi_2^2$$

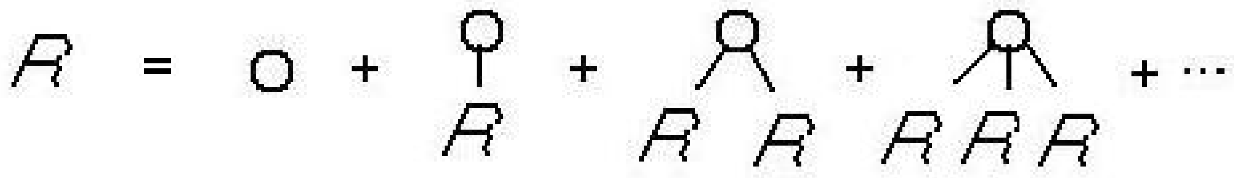
Allgemeine “Increasing Trees”

Erzeugende Funktionen:

$$y_n = \sum_{T \in \mathcal{P}_n} \omega(T)$$

$$y(x) = \sum_{n \geq 1} y_n \frac{x^n}{n!}$$

$$\boxed{y'(x) = \phi_0 + \phi_1\, y(x) + \phi_2\, y(x)^2 + \cdots = \phi(y(x))}$$



Allgemeine “Increasing Trees”

Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $\mathcal{P}_n$

Für $T \in \mathcal{P}_n$ sei:

$$\pi_n(T) := \frac{\omega(T)}{y_n}$$

Bemerkung. Im allgemeinen ist nicht klar, of π_n durch einen Wachstumsprozess induziert wird.

Allgemeine “Increasing Trees”

Beispiele:

- **Rekursive Bäume:** $\phi(t) = \sum_{j\geq 0} \frac{t^j}{j!} = e^t$, $\phi_j = \frac{1}{j!}$

  Der Faktor $1/j!$ “reduziert” ebene Bäume zu nicht-ebene Bäume.

- **Ebene rekursive Bäume:** $\phi(t) = 1 + t + t^2 + \cdots = \frac{1}{1-t}$, $\phi_j = 1$

- **Binäre Suchbäume:** $\phi(t) = (1+t)^2$, $\phi_0 = 1$, $\phi_1 = 2$, $\phi_2 = 1$.

In all diesen drei Beispielen wird π_n durch eine Wachstumsprozess induziert.

Allgemeine “Increasing Trees”

Satz [Panholzer & Prodinger]

Die Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen π_n auf $\mathcal{P}_n$ wird genau dann durch eine (knotengradabhängigien) Wachstumsprozess induziert, wenn $\phi(t)$ eine drei folgenden Formen hat:

- $\phi(t) = \phi_0 \left(1 + \frac{\phi_1}{D\phi_0} t\right)^D$ für ein $D \in \{2, 3, \ldots\}$ und $\phi_0 > 0$, $\phi_1 > 0$.

- $\phi(t) = \phi_0 e^{\frac{\phi_1}{\phi_0} t}$ mit $\phi_0 > 0$, $\phi_1 > 0$.

- $\phi(t) = \dfrac{\phi_0}{\left(1 - \frac{\phi_1}{r\phi_0} t\right)^r}$ für ein $r > 0$ und $\phi_0 > 0$, $\phi_1 > 0$.

Allgemeine "Increasing Trees"

(Knotengradabhängiger) Wachstumsprozess

- Der Prozess startet mit der Wurzel, die das Label 1 erhält.

- Im j-ten Schritt wird ein neuer Knoten (mit Label j) an einen der bisherigen Knoten (mit Weggrad d) mit einer Wahrscheinlichkeit angehängt, die proportional zu
$$\frac{(d+1)\phi_{d+1}\phi_0}{\phi_d}$$
ist.

Um alle möglichen π_n zu erhalten, genügt es mit $\phi_0 = \phi_1 = 1$ zu arbeiten:

$$\boxed{\phi(t) = (1+t)^D, \quad \phi(t) = e^t, \quad \phi(t) = 1/(1-t)^r}$$

Allgemeine “Increasing Trees”

Rekursive Bäume: $\phi(t) = e^t$

$$\phi_d = \frac{1}{d!} \quad \Longrightarrow \quad \frac{(d+1)\phi_{d+1}\phi_0}{\phi_d} = 1$$

Jeder neue Knoten wird mit gleicher Wahrscheinlichkeit an einen der früheren angehängt.

Allgemeine “Increasing Trees”

Verallgemeinerte ebene rekursive Bäume: $\phi(t) = 1/(1-t)^r$ $(r > 0)$

$$\phi_d = \binom{r+d-1}{d} \quad \Longrightarrow \quad \frac{(d+1)\phi_{d+1}\phi_0}{\phi_d} = d + r$$

Ein neuer Knoten wird an eine vorhandenen Knoten (mit Weggrad d) mit einer Wahrscheinlichkeit angehängt, die proportional zu $\boxed{d+r}$ ist.

Für $r = 1$ ergibt das die (üblichen) ebenen rekursiven Bäume.

Verallgemeinerte ebene rekursive Bäume

$\phi(t) = 1/(1-t)^r \quad (r > 0)$

Höhe H_n

[Pittel 1994]

$$\boxed{\frac{H_n}{\log n} \to \frac{1}{(1+r)s} \quad (f.s.)}$$

wobei s die positive Lösung von $rse^{s+1} = 1$ ist.

Die Verteilung der Knotengrade

Satz

Sei $\phi(t) = 1/(1-t)^r$ für ein $r > 0$ und sei

$$\begin{aligned}
\lambda_d &= \lim_{n\to\infty} \pi_n(\text{Weggrad eines zufälligen Knotens} = d) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\text{Erwartete Anzahl der Knoten mit Weggrad } d}{n}
\end{aligned}$$

Dann gilt

$$\boxed{\lambda_d = \frac{(r+1)\Gamma(2r+1)\Gamma(r+d)}{\Gamma(r)\Gamma(2r+d+2)}.}$$

Man beachte:

$$\lambda_d \sim \frac{(r+1)\Gamma(2r+1)}{\Gamma(r)} \cdot d^{-2-r}.$$

Verallgemeinerte ebene rekursive Bäume sind “scale free” (Barabasi-Albert-Modell).

Binäre Suchbäume

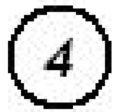
Speicherern von Daten:

4, 6, 3, 5, 1, 8, 2, 7

Binäre Suchbäume

Speichern von Daten:

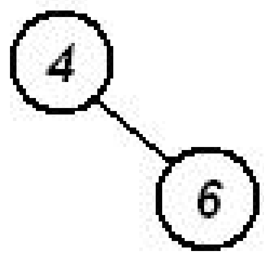
6, 3, 5, 1, 8, 2, 7



Binäre Suchbäume

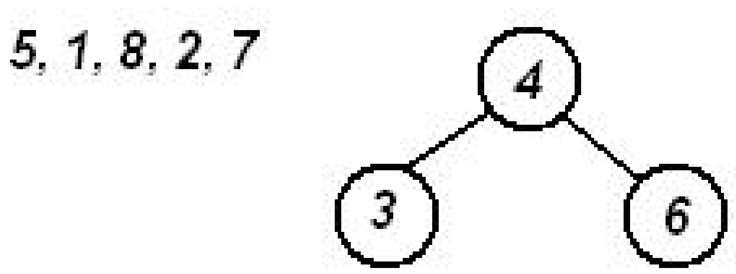
Speichern von Daten:

3, 5, 1, 8, 2, 7



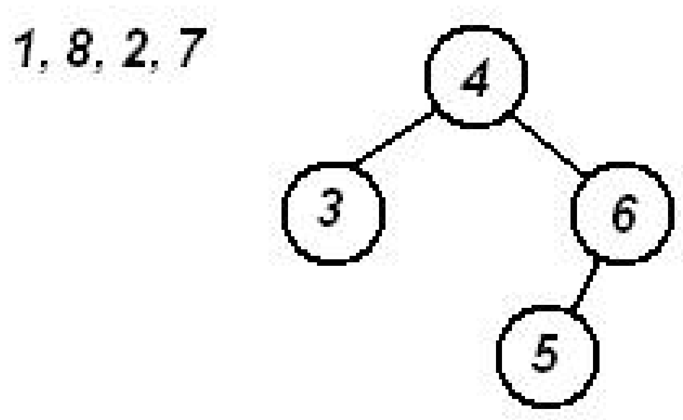
Binäre Suchbäume

Speichern von Daten:



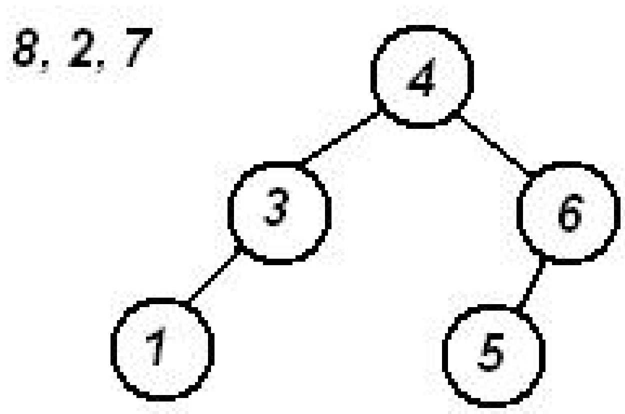
Binäre Suchbäume

Speichern von Daten:



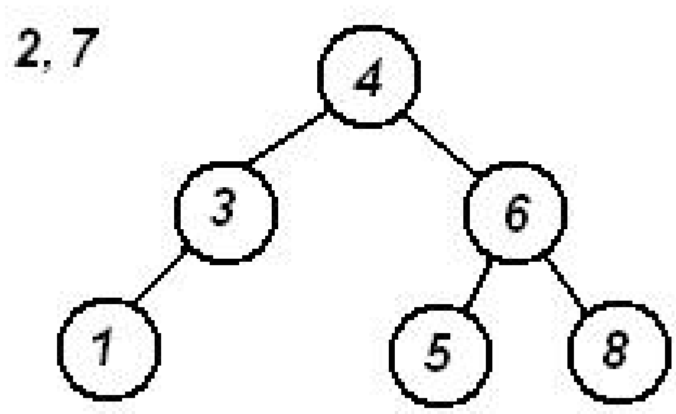
Binäre Suchbäume

Speichern von Daten:



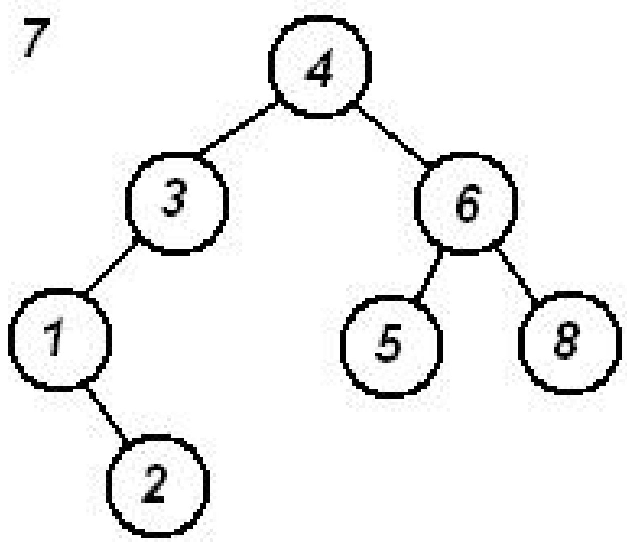
Binäre Suchbäume

Speichern von Daten:



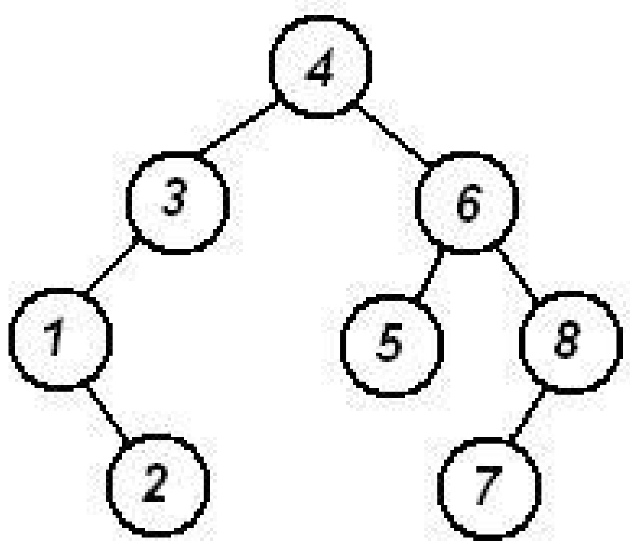
Binäre Suchbäume

Speichern von Daten:



Binäre Suchbäume

Speichern von Daten:



D-äre rekursive Bäume

$\phi(t) = (1+t)^D$

Höhe H_n

[Devroye 200?]

$$\boxed{\frac{H_n}{\log n} \to c_D \qquad (f.s.)}$$

wobei $c = c_D > 1$ die Gleichung $c \log \dfrac{De}{c(D-1)} = \dfrac{1}{D-1}$ erfüllt.

Erzeugende Funktionen

Sei $y(z) = \sum_{n\ge 0} y_n z^n/n!$ die erzeugende Funktion von $y_n = \sum_{T\in\mathcal{P}_n} \omega(T)$:

$$y'(z) = \phi(y(z)), \quad y(0) = 0.$$

$$\mathbf{P}\{H_n \le k\} = \frac{1}{y_n} \sum_{T\in\mathcal{P}_n,\, H(T)\le k} \omega(T)$$

$$y_k(z) = \sum_{n\ge 0} y_n \mathbf{P}\{H_n \le k\} \frac{z^n}{n!}.$$

$\Longrightarrow$

$$\boxed{y'_{k+1}(z) = \phi(y_k(z))}$$

mit Anfangsbedingungen $y_0(x) = 0$ und $y_{k+1}(0) = 0$.

Verteilung der Höhe

D-äre rekursive Bäume

$\phi(t) = (1+t)^D$, ($D \ge 2$ eine natürliche Zahl), $y'_{k+1}(z) = (1+y_k(z))^D$

$\rho = 1/(D-1)$ Konvergenzradius von $y(z) = (1-(D-1)z)^{1/(D-1)} - 1$

$$c_D \log \frac{De}{c_D(D-1)} = \frac{1}{D-1}$$

$F(y)$ Lösung von

$$\boxed{y^{\frac{1}{D-1}} F(ye^{-1/c_D}) = \frac{\Gamma\left(\frac{D}{D-1}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{D-1}\right)^d} \int_{y_1+\cdots+y_D=y,\, y_j\ge 0} \prod_{j=1}^{D} \left(F(y_j) y_j^{\frac{1}{D-1}-1} \right) d\mathbf{y}}$$

Verteilung der Höhe

D-äre rekursive Bäume

Satz 1 $\phi(t) = (1+t)^D$

$$\mathbf{E}\, H_n = c_D \log n + O\Big(\sqrt{\log n}\,(\log\log n)\Big)$$

$$\boxed{\mathbf{P}\{H_n \le k\} = F\Big((D-1)n/y_k(\rho)^{D-1}\Big) + o(1)}$$

$$\mathbf{P}\{|H_n - \mathbf{E}\, H_n| \ge \eta\} \ll e^{-c\eta} \qquad (c > 0)$$

Verteilung der Höhe

Bemerkung 1:

$$\mathbf{Var}\, H_n = O(1)$$

Bemerkung 2:

$h_n = \mathrm{max}\{k : y_k(\rho)^{d-1} \le n\}$

$W(x) = F(e^{-x})$ *"travelling wave"*

$$\boxed{\mathbf{P}\{H_n \le h_n + r\} = W\left(\log \frac{y_{h_n}(\rho)^{D-1}}{(D-1)n} + \frac{r}{c_D}\right) + o(1)}$$

$(-1/c_D \le \log \frac{y_{h_n}(\rho)^{D-1}}{(D-1)n} \le 1/c_D$ ist beschränkt)

Verteilung der Höhe

Rekursive Bäume

$\phi(t) = e^t, \quad y'_{k+1}(z) = e^{y_k(z)}$

$y(z) = \log \frac{1}{1-z}$

$F(z)$ Lösung von

$$\boxed{y\,F(y/e^{1/e}) = \int_0^y F(z/e^{1/e})F(y-z)\,dz}$$

Verteilung der Höhe

Rekursive Bäume

Satz 2 $\phi(t) = e^t$

$$\mathbf{E}\, H_n = e \log n + O\Big(\sqrt{\log n}\, (\log \log n)\Big).$$

$$\boxed{\mathbf{P}\{H_n \le k\} = F(n/y_k'(\rho)) + o(1)}$$

$$\mathbf{P}\{|H_n - \mathbf{E}\, H_n| \ge \eta\} \ll e^{-c\eta} \quad (c > 0)$$

Verteilung der Höhe

Verallgemeinerte ebene rekursive Bäume

$\phi(t) = 1/(1-t)^r$, $r = \frac{A}{B} > 0$ rationale Zahl

$\rho = 1/(r+1)$ Konvergenzradius von $y(z) = 1 - (1-(r+1)z)^{1/(r+1)}$

$c_r' = 1/((r+1)s)$ mit $r\,s\,e^{s+1} = 1$

$$y^{\frac{1}{d-1}} F(ye^{-1/c_r'}) = \frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{A+B}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{A+B}\right)^{A+B+1}} \times$$
$$\times \int\limits_{y_1+\cdots+y_{A+B+1}=y, y_j \ge 0} \prod_{j=1}^{B+1} \left(F(y_j e^{-1/c_r'}) y_j^{\frac{1}{A+B}-1} \right)$$
$$\times \prod_{\ell=B+2}^{A+B+1} \left(F(y_\ell) y_\ell^{\frac{1}{A+B}-1} \right) d\mathbf{y}$$

Verteilung der Höhe

Verallgemeinerte ebene rekursive Bäume

$$G(y) = \frac{\Gamma\left(\frac{A}{A+B}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{A+B}\right)^{A}} \int_{z_1+\cdots+z_A=1, z_j \ge 0} \prod_{j=1}^{A} \left(F(yz_j) z_j^{\frac{1}{A+B}-1} \right) d\mathbf{z}$$

Verteilung der Höhe

Verallgemeinerte ebene rekursive Bäume

Satz 3 $r = \frac{A}{B} > 0$ rationale Zahl, $\phi(t) = 1/(1-t)^r$

$$\mathbf{E}\, H_n \sim c_r' \log n.$$

$$\boxed{\mathbf{P}\{H_n \le k\} = G\Big((r+1)n/(y_k'(\rho))^{1+\frac{1}{r}}\Big) + o(1)}$$

$$\mathbf{P}\{|H_n - \mathbf{E}\, H_n| \ge \eta\} \ll e^{-c\eta} \quad (c > 0)$$

Ersatzfunktionen

$\boxed{D\text{-äre rekursive Bäume}}$ $\phi(t) = (1+t)^D$

$$\tilde{y}_k(z) = y_k(z) + 1 = 1 + \sum_{n \geq 0} \mathbf{P}\{H_n \leq k\} y_n \frac{z^n}{n!}$$

$$\boxed{\tilde{y}'_{k+1}(z) = \tilde{y}_k(z)^D}$$

mit Anfangsbedingugen $\tilde{y}_0(z) = 1$, $\tilde{y}_k(0) = 1$.

Ersatzfunktionen

D-äre rekursive Bäume

$$y^{\frac{1}{D-1}} F(y e^{-1/c_D}) = \frac{\Gamma\left(\frac{D}{D-1}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{d-1}\right)^d} \int_{y_1+\cdots+y_D=y, y_j \ge 0} \prod_{j=1}^{D} \left(F(y_j) y_j^{\frac{1}{D-1}-1} \right) d\mathbf{y}$$

$$\Psi(u) = \frac{1}{(D-1)^{\frac{1}{D-1}} \Gamma\left(\frac{1}{D-1}\right)} \int_0^\infty F(y)\, y^{\frac{1}{D-1}-1} e^{-uy}\, dy$$

$$\boxed{\overline{y}_k(z) := e^{k/(c_D(D-1))} \cdot \Psi\left(e^{k/c_D}(\rho - z)\right)}$$

$(\rho = 1/(D-1))$

Ersatzfunktionen

D-äre rekursive Bäume

- $1 - \overline{y}_k(0) \sim Ck \left(\frac{D}{c_D}\right)^k, \qquad \overline{y}_k(\rho) = e^{k/(c_D(D-1))}.$

- $$\boxed{\overline{y}'_{k+1}(z) = \overline{y}_k(z)^D}$$

- Für jede natürliche Zahl ℓ und für jede reelle Zahl $k > 0$ hat die Differenz
$$\tilde{y}_\ell(z) - \overline{y}_k(z)$$
genau eine Nullstelle. (**“Intersection Property”**)

Ersatzfunktionen

D-äre rekursive Bäume

- $\overline{y}_k(z) = \sum_{n\ge 0} \overline{y}_{k,n} \frac{z^n}{n!}$ ist ganze Funktion mit Koeffizienten

$$\overline{y}_{k,n} = \frac{(D-1)^n}{\Gamma\left(\frac{1}{D-1}\right)} \int_0^\infty F\left((D-1)ve^{-k/c_D}\right) v^{\frac{1}{D-1}-1+n} e^{-v}\, dv$$

  und asymptotisch gilt

$$\boxed{\frac{\overline{y}_{k,n}}{y_n} = F\left((D-1)ne^{-k/c_D}\right) + o(1)}$$

Ersatzfunktionen

D-äre rekursive Bäume

Beweisidee

- $\tilde{y}_k(z) = y_k(z) + 1$ wird durch die *Ersatzfunktion* $\overline{y}_{e_k}(z)$ approximiert:

$$\tilde{y}_k(\rho) = \overline{y}_{e_k}(\rho) \quad \Longleftrightarrow \quad e_k = c_D(D-1)(\log \tilde{y}_k(\rho)) \sim k.$$

- $\tilde{y}_k(z) \approx \overline{y}_{e_k}(z)$ in Umgebung von $z = \rho$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\mathbf{P}\{H_n \le k\} \approx \overline{y}_{n,e_k} = F\Big((D-1)n/y_k(\rho)^{d-1}\Big) + o(1)}$$

Ersatzfunktionen

Rekursive Bäume $\phi(t) = e^t$

$$y_k(z) = \sum_{n\ge 0} \mathbf{P}\{H_n \le k\} \frac{z^n}{n}$$

$$\boxed{y'_{k+1}(z) = e^{y_k(z)}}$$

$$Y_k(z) = y'_k(z) = \sum_{n\ge 0} \mathbf{P}\{H_{n+1} \le k\} z^n$$

$$\boxed{Y'_{k+1}(z) = Y_{k+1}(z) Y_k(z)}$$

$(Y_{k+1}(0) = 1)$

Ersatzfunktionen

Rekursive Bäume

$$y\,F(y/e^{1/e}) = \int_0^y F(z/e^{1/e})F(y-z)\,dz$$

$$\Psi(u) = \int_0^\infty F(y)e^{-yu}\,dy$$

$$\boxed{\overline{Y}_k(z) = e^{k/e}\cdot\Psi\left(e^{k/e}(1-z)\right)}$$

Ersatzfunktionen

Rekursive Bäume

- $1 - \overline{Y}_k(0) \sim Ck\left(\frac{2}{e}\right)^k, \qquad \overline{Y}_k(1) = e^{k/e}.$

- $$\boxed{\overline{Y}'_{k+1}(z) = \overline{Y}_{k+1}(z)\overline{Y}_k(z)}$$

- Für jede natürliche Zahl ℓ und für jede reelle Zahl $k > 0$ hat die Differenz

$$Y_\ell(z) - \overline{Y}_k(z)$$

genau eine Nullstelle. (**“Intersection Property”**)

Ersatzfunktionen

Rekursive Bäume

- $\overline{Y}_k(z) = \sum_{n\geq 0} \overline{Y}_{k,n} z^n$ ist ganze Funktion mit Koeffizienten

$$\overline{y}_{k,n} = \int_0^\infty F\left(ve^{-k/e}\right) v^n e^{-v}\, dv$$

und asymptotisch gilt

$$\boxed{\overline{Y}_{k,n} = F\left(ne^{-k/e}\right) + o(1)}$$

Ersatzfunktionen

Rekursive Bäume

Bemerkung:

Die Funktionen

$$\overline{y}_k(z) = \int_0^z \overline{Y}_k(t)\,dt = \log \overline{Y}_{k+1}(z)$$

erfüllen die Rekursion

$$\boxed{\overline{y}_{k+1}(z) = e^{\overline{y}_k(z)}}$$

Ersatzfunktionen

$\boxed{\textbf{Verallgemeinerte ebene rekursive Bäume}}$ $\phi(t) = (1-t)^{-r}$, $r = \frac{A}{B}$

$$y_k(z) = \sum_{n\ge 0} y_n \mathbf{P}\{H_n \le k\} z^n/n!$$

$$\boxed{y'_{k+1}(z) = \frac{1}{(1-y_k(z))^r}}$$

$$Y_k(z) = \left(y'_k(z)\right)^{\frac{1}{A}} \qquad \left(\text{d.h. } y'_k(z) = Y_k(z)^A = \sum_{n\ge 0} y_{n+1} \mathbf{P}\{H_{n+1} \le k\} \frac{z^n}{n!}\right)$$

$$\boxed{Y'_{k+1}(z) = \frac{1}{B} Y_{k+1}(z)^{B+1} Y_k(z)^A}$$

$(Y_{k+1}(0) = 1)$

Ersatzfunktionen

Verallgemeinerte ebene rekursive Bäume

$$
\begin{aligned}
y^{\frac{1}{d-1}} F(y e^{-1/c_r'}) = {} & \frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{A+B}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{A+B}\right)^{A+B+1}} \times \\
& \times \int\limits_{y_1+\cdots+y_{A+B+1}=y, y_j \geq 0} \prod_{j=1}^{B+1} \left(F(y_j e^{-1/c_r'}) y_j^{\frac{1}{A+B}-1} \right) \\
& \times \prod_{\ell=B+2}^{A+B+1} \left(F(y_\ell) y_\ell^{\frac{1}{A+B}-1} \right) \, d\mathbf{y}
\end{aligned}
$$

Ersatzfunktionen

Verallgemeinerte ebene rekursive Bäume

$$\overline{\Psi}(u) = \frac{1}{(r+1)^{\frac{1}{A+B}}\Gamma\left(\frac{1}{A+B}\right)} \int_0^\infty F(y)\, y^{\frac{1}{A+B}-1} e^{-uy}\, dy$$

$$\boxed{\overline{Y}_k(z) = e^{k/(c'_r(A+B))} \cdot \overline{\Psi}\left(e^{k/c'_r}\left(\frac{1}{r+1} - z\right)\right)}$$

Ersatzfunktionen

Verallgemeinerte ebene rekursive Bäume

$$G(y) = \frac{\Gamma\left(\frac{A}{A+B}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{A+B}\right)^A} \int_{z_1+\cdots+z_A=1, z_j \geq 0} \prod_{j=1}^{A} \left(F(yz_j) z_j^{\frac{1}{A+B}-1} \right) d\mathbf{z}$$

$$\Psi(u) = \overline{\Psi}(u)^A = \frac{1}{(r+1)^{\frac{r}{1+r}} \Gamma\left(\frac{r}{1+r}\right)} \int_0^\infty G(y) y^{-\frac{1}{1+r}} e^{-yu}\, dy$$

$$\boxed{\overline{y}_k(z) = \int_0^z e^{\frac{rk}{c'_r(1+r)}} \cdot \Psi\left(e^{k/c'_r}\left(\frac{1}{r+1} - t\right)\right)} dt$$

Ersatzfunktionen

Verallgemeinerte ebene rekursive Bäume

- $$\boxed{\overline{Y}'_{k+1}(z) = \frac{1}{B}\overline{Y}_{k+1}(z)^{B+1}\overline{Y}_k(z)^A}$$

- $$\boxed{\overline{y}'_{k+1}(z) = \frac{1}{(1-\overline{y}_k(z))^r}}$$

etc.

“Intersection Property”

Lemma

$\tilde{y}_0(x) = 1$, $\boxed{\tilde{y}'_{k+1}(x) = \tilde{y}_k(x)^D}$ mit $\tilde{y}_{k+1}(0) = 1$.

$$\overline{y}_k(z) := e^{k/(c_D(D-1))} \cdot \Psi\left(e^{k/c_D}(\rho - z)\right) \qquad (k \in \mathbb{R})$$

$\boxed{\overline{y}'_{k+1}(x) = \tilde{y}_k(x)^D}$ mit $0 < \overline{y}_{k+1}(0) < 1$

$\Longrightarrow$ Für jede natürliche Zahl ℓ und für jede reelle Zahl $k > 0$ hat die Differenz

$$\tilde{y}_\ell(z) - \overline{y}_k(z)$$

genau eine Nullstelle

"Intersection Property"

Beweis

Die Behauptung ist für $\ell = 0$ (trivialerweise) für alle $k > 0$ richtig.

$\ell \to \ell + 1$:

$$\overline{y}'_{\ell+1}(x) - \tilde{y}'_{k+1}(x) = (\overline{y}_\ell(x) - \tilde{y}_k(x)) \underbrace{\sum_{j=0}^{D-1} \overline{y}_\ell(x)^j \tilde{y}_k(x)^{D-1-j}}_{>0}$$

$\Longrightarrow \overline{y}'_{\ell+1}(x) - \tilde{y}'_{k+1}(x)$ hat genau eine Nullstelle.

$\Longrightarrow \overline{y}_{\ell+1}(x) - \tilde{y}_{k+1}(x)$ hat genau eine Nullstelle.