Skriptum zur Vorlesung

Höhere Mathematik für Informatiker

ausgearbeitet von

Martin Kirner Bakk. techn.

korrigiert und erweitert von

Ao. Univ. Prof. Dipl. Ing. Dr. techn. Michael Drmota

10. März 2006

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Grundbegriffe der Analysis

Notationen:	$x \in A$	x ist in A enthalten
	$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$	Durchschnitt der Mengen A und B
	$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$	Vereinigung der Mengen A und B
	$A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$	Mengendifferenz
	$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$	symmetrische Mengendifferenz
	$\bigcap_{n=1}^{N} A_n$	Durchschnitt mehrerer Mengen
	$\bigcup_{n=1}^{N} A_n$	Vereinigung mehrerer Mengen
	$\vee$	oder
	$\wedge$	und
	$\Longrightarrow$	impliziert
	$\Longleftrightarrow$	äquivalent
	$\forall$	für alle
	$\exists$	es existiert
	$\mathbb{N}$=$\{0, 1, 2, \dots\}$	Menge der natürlichen Zahlen
	$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$	Menge der ganzen Zahlen
	$\mathbb{Q}$	Menge der rationalen Zahlen
	$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
	$\mathbb{C}$	Menge der komplexen Zahlen

1.1 Komplexe Zahlen

Jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ lässt sich folgendermaßen darstellen:

$$z = a + ib \qquad a, b \in \mathbb{R},$$

dabei bezeichnte i die imagniäre Einheit. Diese erfüllt

$$i^2 = -1.$$

$a = \Re(z)$ heißt auch Realteil von z und $b = \Im(z)$ Imaginärteil.

Jede komplexe Zahl kann als *Zeiger* in der *Gaußschen Ebene* dargestellt werden (siehe Abbildung 1.1).

Die Länge dieses *Zeigers* wird auch als Betrag $r = |z|$ von z und der Winkel zur reellen Achse als Argument $\varphi = \arg(z)$ bezeichnet. Das Paar $[r, \varphi]$ bildet die *Polarkoordinaten* von z:

$$\begin{aligned}
z &= a + ib = [r, \varphi] && \dots\text{Polarkoordinaten} \\
r &= \sqrt{a^2 + b^2} = |z| && \dots\text{Betrag} \\
\varphi &= \arg(z) && \dots\text{Argument (mod } 2\pi) \\
\tan\varphi &= \tfrac{b}{a} \\
\cos\varphi &= \tfrac{b}{r}
\end{aligned}$$

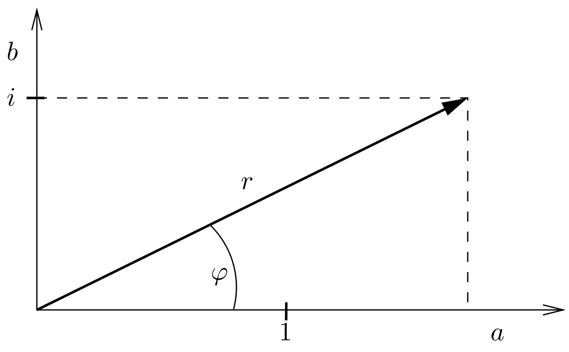

Abbildung 1.1: Komplexe Zahlen in Polarkoordinatendarstellung

Addition von komplexen Zahlen:
Komplexe Zahlen werden so addiert, dass Realteile und Imaginärteile addiert werden:

$$\begin{aligned} z_1 &= a_1 + ib_1 \\ z_2 &= a_2 + ib_2 \\ z_1 + z_2 &= (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2). \end{aligned}$$

Graphisch entspricht dies der Addition der entsprechenden Zeiger (in der Gaußschen Ebene) mittels der *Parallelogrammregel* (siehe Abbildung 1.2).

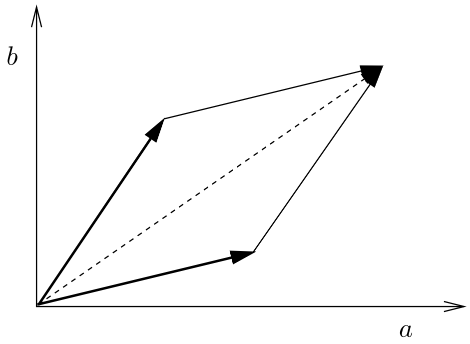

Abbildung 1.2: Graphische Darstellung einer Vektoraddition

Mulitplikation von komplexen Zahlen:

Komplexe Zahlen werden unter Benutzung des *gewohnten Distributivgesetzes* und Beachtung der Regel $i^2 = -1$ multipliziert:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) \\ &= (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1) \end{aligned}$$

In den entsprechenden Polarkoordinaten werden die Beträge multipliziert und die Argumente addiert:

$$\begin{aligned} |z_1 \cdot z_2| &= |z_1| \cdot |z_2| \\ \arg(z_1 \cdot z_2) &= \arg(z_1) + \arg(z_2) \bmod 2\pi \end{aligned}$$

Graphisch entspricht dies einer *Drehstreckung* des Zeigers von z_1 um den Betrag von z_2 und den Winkel von z_2.

Konjugiert komplexe Zahl:

Die konzugiert komplexe Zahl $\overline{z}$ von $z = a + bi$ ist durch

$$\overline{z} = a - ib$$

gegeben. Graphisch entspricht dies der Spiegelung an der reellen Achse.

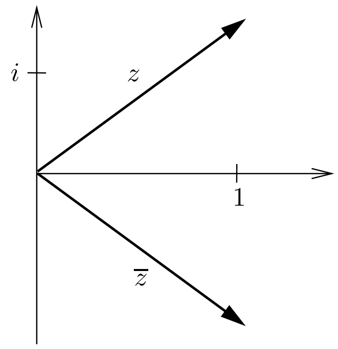

Abbildung 1.3: Graphische Darstellung eines konjugiert komplexen Zahlenpaars

Es gelten folgende Rechenregeln:

$$\begin{aligned}
\overline{z_1 + z_2} &= \overline{z_1} + \overline{z_2} \\
\overline{z_1 \cdot z_2} &= \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \\
|z| &= \sqrt{z \cdot \overline{z}} \\
\Re(z) &= \frac{z + \overline{z}}{2} \\
\Im(z) &= \frac{z - \overline{z}}{2i}
\end{aligned}$$

Daraus gewinnt man übrigens einen einfachen Beweis für $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$:

$$\begin{aligned}
|z_1 \cdot z_2|^2 &= z_1 \cdot z_2 \cdot \overline{z_1 \cdot z_2} \\
&= z_1 \cdot z_2 \cdot \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \\
&= z_1 \cdot \overline{z_1} \cdot z_2 \cdot \overline{z_2} \\
&= |z_1|^2 \cdot |z_2|^2
\end{aligned}$$

Division von komplexen Zahlen:

Die Division kann (für Nenner $z_2 \neq 0$) uneingeschränkt durchgeführt werden. Rechnerisch gelingt dies durch Erweiterung mit der konjugiert komplexen Zahl des Nenners, der dann reell wird:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{1}{\underbrace{z_2 \cdot \overline{z_2}}_{\in \mathbb{R}}} \cdot (z_1 \cdot \overline{z_2})$$

Beispiel 1.1 $\dfrac{2+3i}{1-2i} = \dfrac{(2+3i)(1+2i)}{\underbrace{(1-2i)(1+2i)}_{5}} = \dfrac{1}{5}(-4+7i) = -\dfrac{4}{5} + \dfrac{7}{5}i$

Weiters gilt (entsprechend der Multiplikation)

$$\begin{aligned}
\left|\frac{z_1}{z_2}\right| &= \frac{|z_1|}{|z_2|}, \\
\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) &= (\arg(z_1) - \arg(z_2)) \bmod 2\pi
\end{aligned}$$

Moivresche Formel:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos(n\cdot\varphi) + i\sin(n\cdot\varphi)$$

Einheitswurzeln:

Einheitswurzeln sind Wurzeln von 1:

$$\begin{array}{lll} z^n = 1 \quad \text{Wurzeln:} & n=2: & \{1,-1\} \\ & n=3: & \{-1, -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\} \qquad (\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}) \\ & n=4: & \{1,-1,i,-i\} \end{array}$$

Allgemein sind

$$z_j = \left[1, \frac{2\pi}{n}j\right] = \cos\left(\frac{2\pi}{n}j\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{n}j\right), \qquad j\in\{0,1,\ldots,n-1\}$$

genau die n verschiedenen n-ten Einheitswurzeln.

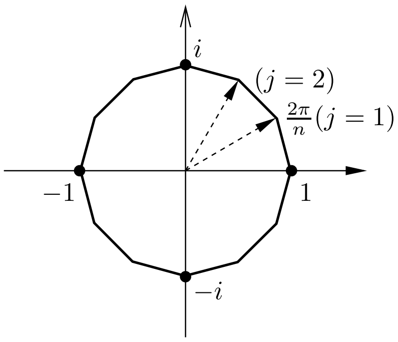

Abbildung 1.4: Die n-ten Wurzel einer komplexen Zahl bilden ein regelmäßiges n-Eck.

Entsprechend bildet man die n-te(n) Wurzel(n) einer komplexen Zahl $w\in\mathbb{C}$, d.h. man sucht z mit $z^n = w, \quad (z = \sqrt[n]{w})$
Ist w in Polarkoordinaten $w = [R,\psi]$ gegeben, so sind alle n-ten Wurzeln

$$z = \left[\sqrt[n]{R}, \frac{\psi}{n} + \frac{2\pi j}{n}\right], \quad j\in\{0,1,\ldots,n-1\}$$

Beispiel 1.2 $w = 1+i, \quad n=7, \quad |w| = \sqrt{2}, \quad \psi = \frac{\pi}{4}$

$$\begin{array}{rcll} z = \sqrt[7]{1+i} & = & \left[\sqrt[14]{2}, \frac{\pi}{28}\right] & (j=0) \\ & = & \left[\sqrt[14]{2}, \frac{\pi}{28}+\frac{2\pi}{7}\right] & (j=1) \\ & = & \left[\sqrt[14]{2}, \frac{\pi}{28}+\frac{4\pi}{7}\right] & (j=2) \end{array}$$

Quadratische Gleichung:

Wie im *reellen Fall* gibt es für die quadratische Gleichung ein Lösungsformel, die aber immer zu zwei komplexen Lösungen führt (dabei ist bei Diskriminante = 0 die gewonnene Lösung als Doppellösung zu zählen):
Die Gleichung

$$z^2 + pz + q = 0$$

mit $p, q \in \mathbb{C}$ hat die Lösungen

$$z_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

und das quadratische Polynom zerfällt in zwei Linearfaktoren

$$z^2 + pz + q = (z - z_1)(z - z_2).$$

Weiters gilt der *Vietasche Wurzelsatz*:

$$p = -(z_1 + z_2) \quad \text{und} \quad q = z_1 z_2.$$

Beispiel 1.3 *$z^2 + 2z + 2 = 0$ hat die Lösungen $z_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-2} = -1 \pm \sqrt{-1} = 1 \pm i$ und es gilt $z^2 + 2z + 2 = (z + 1 - i)(z + 1 + i)$*

Fundamentalsatz der Algebra:

Seinen $a_j \in \mathbb{C}$ $(j \in \{0, 1, \ldots, n\})$ mit $a_n \neq 0$ Dann gibt es zum Polynom

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$$

komplexe Zahlen $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ mit

$$a_n z^n + \ldots + a_0 = a_n (z - z_1) \cdot (z - z_2) \cdot \ldots \cdot (z - z_n),$$

d.h. $z_1, \ldots, z_n$ sind Nullstellen des Polynoms.

Für Polynome dritten und vierten Grads gibt es ähnlich wie bei der quadratischen Gleichung Lösungsformeln für diese Nullstellen. Es kann aber gezeigt werden, dass es für $n \geq 5$ keine allgemeinen (algebraischen) Lösungsformeln gibt. Man ist daher auf Approximationsverfahren angewiesen.

1.2 Folgen

Eine (reelle) Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$ ist eine (unendliche) Liste von reellen Zahlen $a_0, a_1, a_2 \ldots$. Diese kann auch als Folge von Punkten auf der Zahlengeraden gedeutet werden.

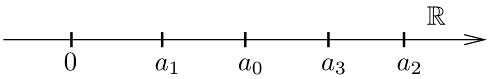

Abbildung 1.5: Folge als Punkte auf der Zahlengerade

Beispiel 1.4 $a_n = n^2,\ a_n = \frac{1}{n+1}$

Häufungspunkt:

a ist Häufungspunkt einer Folge (a_n), wenn es in jeder Umgebung von a wenigstens ein Folgenelement a_n gibt:

$$a \in \mathrm{HP}(a_n) \;:\Longleftrightarrow\; \forall \epsilon > 0\ \forall N > 0\ \exists\ n > N :\ |a_n - a| < \epsilon$$

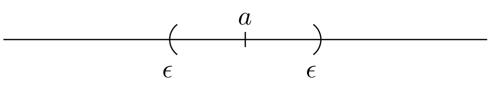

Abbildung 1.6: ϵ-Umgebung einer Zahl a

In jeder Umgebung von a liegen dann auch unendlich viele Elemente von (a_n).

Eine Folge (a_n) heißt *beschränkt*, falls

$$\exists\ C > 0 \quad \forall\ n \in \mathbb{N} : \quad |a_n| \leq C.$$

Satz 1.1 *(Bolzano-Weierstraß)*
Jede beschränke Folge (a_n) besitzt einen Häufungspunkt.

Grenzwert:

Falls eine beschränkte Folge (a_n) nur einen einzigen Häufungspunkt a besitzt, nennt man diesen *Grenzwert* oder *Limes*:

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \quad :\Longleftrightarrow \quad \begin{array}{l} \text{(i) } (a_n) \text{ beschränkt} \\ \text{(ii) } a \text{ einziger Häufungspunkt} \end{array}$$

Damit gleichbedeutend ist:

$$\boxed{\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, N > 0\ \forall\, n > N:\ |a_n - a| < \epsilon}$$

Der **Limes superior**: $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ ist der größte Häufungspunkt der Folge (a_n).

Beispiel 1.5 $a_n = (-1)^n$, $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = 1$

Der **Limes inferior**: $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ ist der kleinste Häufungspunkt der Folge (a_n).

Beispiel 1.6 $a_n = (-1)^n$, $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = 1$

Weitere Eigenschaften:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Longleftrightarrow \liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = a$$

$$a_n \le b_n \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{l} \liminf\limits_{n\to\infty} a_n \le \liminf\limits_{n\to\infty} b_n \\ \limsup\limits_{n\to\infty} a_n \le \limsup\limits_{n\to\infty} b_n \\ \left[\lim\limits_{n\to\infty} a_n \le \lim\limits_{n\to\infty} b_n\right] \end{array}$$

Uneigentlicher Häufungspunkt (HP): $+\infty, -\infty$

$$\begin{array}{rcllll} \infty \text{ ist HP von } a_n & :\Longleftrightarrow & \forall\, K > 0 & \forall\, N > 0 & \exists\, n > N: & a_n > K \\ -\infty \text{ ist HP von } a_n & :\Longleftrightarrow & \forall\, K < 0 & \forall\, N > 0 & \exists\, n > N: & a_n < K \end{array}$$

Z.B.: In diesem Fall setzt man $\overline{\lim}\, a_n = +\infty$ bzw. $\underline{\lim}\, a_n = -\infty$.

Uneigentlicher Grenzwert:

$$\begin{array}{rclll} \lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty & \Longleftrightarrow & \overline{\lim}\, a_n & = \underline{\lim}\, a_n & = +\infty \\ & \Longleftrightarrow & \forall\, K > 0 \quad \exists\, N > 0 & \forall\, n > N: & a_n > K \end{array}$$

Nullfolge:

Eine Folge (a_n) mit Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ heisst Nullfolge. [Kurzschreibweise: $a_n \to 0$]
Eigenschaften:

- $a_n \to 0 \ \wedge\ b_n \to 0 \implies a_n \pm b_n \to 0$
- $a_n \to 0 \ \wedge\ b_n$ beschränkt $\implies a_n \cdot b_n \to 0$
- $a_n \to a \iff a_n = \underbrace{a}_{\text{konstant}} + \underbrace{(a_n - a)}_{\text{Nullfolge}}$

Grenzwertsätze:

Es seien (a_n) und (b_n) reelle Folgen:

- $a_n \to a, \qquad b_n \to b \qquad \Longrightarrow \qquad a_n \pm b_n \to a \pm b$

  bzw. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

  Beweis: $a_n + b_n = a + b + \underbrace{\underbrace{(a_n - a)}_{\to 0} + \underbrace{(b_n - b)}_{\to 0}}_{\to 0}$

- $a_n \to a, \qquad b_n \to b, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda a_n + \mu b_n \to \lambda a + \mu b$

  bzw. $\lim\limits_{n\to\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \mu \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

- $a_n \to a, \qquad b_n \to b, \qquad \Longrightarrow \qquad a_n \cdot b_n \to a \cdot b$

  bzw. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

  Beweis: $a_n \cdot b_n = a \cdot b + \underbrace{a \underbrace{(b_n - b)}_{\to 0}}_{\to 0} + \underbrace{\underbrace{(a_n - a)}_{\to 0} b_n}_{\to 0}$

- $a_n \to a, \qquad b_n \to b \neq 0, \qquad \Longrightarrow \qquad \dfrac{a_n}{b_n} \to \dfrac{a}{b}$

  bzw. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$

  Beweis: $\frac{1}{b_n} = \frac{1}{b} + \frac{b - b_n}{b b_n} \to \frac{1}{b}$, da $1/b_n$ beschränkt und $b - b_n \to 0$.
  Damit gilt auch $\frac{a_n}{b_n} = a_n \frac{1}{b_n} \to \frac{a}{b}$.

  Beispiel 1.7

  $$\begin{aligned} a_n &= \frac{2n^3 - 3n + 3}{5n^3 + 3n^2 - 1} && = && \Big/ \frac{1}{n^3} \\ &= \frac{2 - 3\frac{1}{n^2} + 3\frac{1}{n^3}}{5 + 2\frac{1}{n} - \frac{1}{n^3}} && \longrightarrow && \frac{2}{5}, \end{aligned} \qquad da\ \frac{1}{n} \to 0.$$

- $a_n \to \infty \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{a_n} \to 0$
- $a_n \to 0$ und $a_n > 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{a_n} \to \infty$

- a_n monoton + beschränkt $\Longrightarrow$ a_n konvergent
  Der Grenzwert ist die kleinste obere Schranke, falls a_n monoton wachsend ist (bzw. die größte untere Schranke, falls a_n monoton fallend ist).

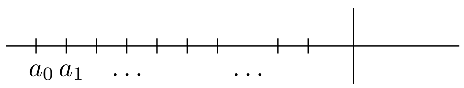

Abbildung 1.7: Monotone und beschränkte Folge

- $b_n \leq a_n \leq c_n, \quad \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a \quad \Longrightarrow \qquad \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

Cauchyfolge:

$$(a_n) \text{ ist Cauchyfolge} \quad :\Longleftrightarrow \ \forall\, \epsilon > 0 \ \ \exists\, N > 0 \ \ \forall\, m, n > N : \ |a_m - a_n| < \epsilon$$

Satz 1.2 *Sei (a_n) eine reelle Folge. Dann gilt*

$$(a_n) \text{ konvergent} \qquad \Longleftrightarrow \qquad (a_n) \text{ Cauchyfolge (C.F.)}$$

Beweis:

$\Longrightarrow$: Aus $|a_n - a| < \epsilon$ und $|a_m - a| < \epsilon$ folgt $|a_n - a_m| < 2\epsilon$

$\Longleftarrow$: Man zeigt: $\underline{\lim}\, a_n = \overline{\lim}\, a_n$ (ohne Details!).

Folgen in $\mathbb{R}^m$:

Man betrachte eine Folge von Punkten im $\mathbb{R}^m$:

$$\mathbf{a}_n = \begin{pmatrix} a_n^{(1)} \\ \vdots \\ a_n^{(m)} \end{pmatrix} \qquad\qquad a_n^{(i)} \in \mathbb{R}$$

Die Konvergenz der Folge $\mathbf{a}_n$ wird auf die Komponentenfolgen zurückgeführt bzw. kann auch mit Hilfe des (euklidischen) Abstands $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_m^2}$ beschrieben werden.

Satz 1.3

$$\mathbf{a}_n = \begin{pmatrix} a_n^{(1)} \\ \vdots \\ a_n^{(m)} \end{pmatrix} \to \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a^{(1)} \\ \vdots \\ a^{(m)} \end{pmatrix} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{matrix} a_n^{(1)} \to a^{(1)} \\ \vdots \\ a_n^{(m)} \to a^{(m)} \end{matrix}$$

$$\Longleftrightarrow \qquad \forall\, \epsilon > 0 \ \ \exists\, N > 0 \ \ \forall\, n > N : \ \|\mathbf{a}_n - \mathbf{a}\| < \epsilon$$

Entsprechendes gilt für Folgen komplexer Zahlen.

Satz 1.4 *Seien $z_n, z \in \mathbb{C}$:*

$$\begin{aligned} z_n \to z \quad &\Longleftrightarrow \quad \Re(z_n) \to \Re(z) \wedge \Im(z_n) \to \Im(z) \\ &\Longleftrightarrow \quad \forall\, \epsilon > 0 \ \ \exists\, N > 0 \ \ \forall\, n > N : \ |z_n - z| < \epsilon \\ &\Longleftrightarrow \quad \lim_{n \to \infty} |z_n - z| = 0 \end{aligned}$$

Abstandsbegriff (Metrik):

Sei X ... Menge $\neq 0$. Eine Abbildung d: $X \times X \to \mathbb{R}$ (d.h. zwei Punkten x, y wird der Abstand $d(x, y)$ zugeordnet) heiß*Metrik*, falls folgende Eigenschaften erfüllt sind

(1) $d(x, y) = 0 \iff x = y$
(2) $d(x, y) = d(y, x)$ (Symmetrie)
(3) $d(x, z) \geq d(x, y) + d(y, z)$ (Dreiecksungleichung)

Das Paar (X, d) wird als *metrischer Raum* bezeichnet und man kann in natürlicher Weise die Konvergenz von Folgen $a_n \in X$ zu einem Grenzwert $a \in X$ definieren:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} a_n = a \quad &:\iff \quad \forall\, \epsilon > 0 \;\; \exists\, N > 0 \;\; \forall\, n > N : \quad d(a_n, a) < \epsilon \\ &\iff \quad \lim_{n\to\infty} d(a_n, a) = 0 \end{aligned}$$

Die *Kugelumgebung* eines Punktes $x \in X$ mit Radius $r > 0$ wird durch

$$K(x,r) = \{\ x \in X \mid d(x,y) < r\ \}$$

definiert.

Beispiel 1.8

- $X = \mathbb{R}$, $d(x,y) = |x-y|$
- $X = \mathbb{C}$, $d(z,w) = |z-w|$
- $X = \mathbb{R}^m$, $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) \ = \| \mathbf{x}-\mathbf{y} \|_2 = \ \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \ldots + (x_m-y_m)^2}$
  für $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$ *(Euklidischer Abstand)*
- $X = \mathbb{R}^m$, $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) \ = \| \mathbf{x}-\mathbf{y} \|_p := \ (|x_1-y_1|^p + \ldots + |x_m-y_m|^p)^{\frac{1}{p}}$
  (L_p-Abstand)
- $X = \mathbb{R}^m$, $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) \ = \| \mathbf{x}-\mathbf{y} \|_\infty := \ \max_{1\le j\le m} |x_j - y_j|$
  (Maximum - Norm)

Beispiel 1.9
Sei

$$\begin{aligned} X = C\,[0,1] \quad &= \quad \text{Menge aller reelwertigen stetigen Funktionen auf } [0,1] \\ &= \quad \{\ f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \ \textit{stetig}\ \} \end{aligned}$$

und $d(f,g) \ = \|f-g\|_\infty = \ \max\limits_{0\le x\le 1} |f(x) - g(x)|$ der zur Maximumsnorm gehörige Abstandsbegiff zwischen f und g. Dann bildet $(C[0,1], \| \cdot - \cdot \|_\infty)$ einen metrischen (Funktionen-)Raum.

Eine Kugelumgebung einer Funktion f (mit Radius ϵ) wird auch als ϵ-Schlauch bezeichnet (siehe Abbildung 1.9).

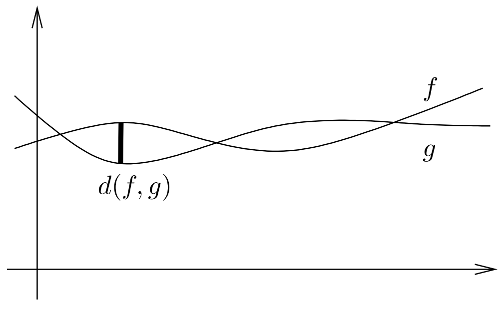

Abbildung 1.8: Distanz zwischen zwei Graphen

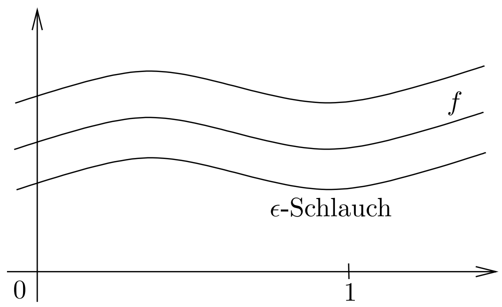

Abbildung 1.9: Epsilonschlauch einer Funktion f

1.3 Reihen

Eine unendliche Reihe ist ein Ausdruck der Form $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ und wird auch durch $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ oder

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots$$

angeschrieben, wobei a_n eine (beliebige) Folge reeller oder komplexer Zahlen ist.

Partialsummenfolge:

Für eine Reihe $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ ist die Folge

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n = a_0 + a_1 + \dots + a_N$$

die *Partialsummenfolge.*

Definition 1.1 *Eine unendliche Reihe* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *heißt konvergent, wenn* S_N *konvergent ist:*

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n = S \quad &\Longleftrightarrow \quad \lim_{N\to\infty} S_N = S \\ &\Longleftrightarrow \quad \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=0}^{N} a_n \right) = S \end{aligned}$$

Eine Reihe, die nicht konvergiert, heißt divergent.

Beispiel 1.10 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 2$

$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^N} = 2 - \frac{1}{2^N}$ $\boxed{\textbf{\textit{UE}}}$

Satz 1.5 *Für jede konvergente Reihe* $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ *gilt ist* (a_n) *eine Nullfolge:* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0.$

Beweis: $a_n = \underbrace{S_n}_{\downarrow \atop S} - \underbrace{S_{n-1}}_{\downarrow \atop S} \quad \to \quad S - S = 0$

Umgekehrt bedeutet das, daß eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sicher nicht konvergent (also divergent) ist, wenn a_n keine Nullfolge ist.

Beispiel 1.11 *Die Reihe* $1 - 1 + 1 - 1 + 1 \pm \dots$ *ist divergent.*

Harmonische Reihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$$

Die harmonische Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist nicht konvergent (also divergent).
Es gilt zwar $\frac{1}{n} \to 0$, aber die Partialsummen sind unbeschränkt:

$$\begin{aligned}
S_{2^K} &= 1 \Big| + \tfrac{1}{2} \Big| + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \Big| \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8} \Big| + \ldots + \Big| + \tfrac{1}{2^{K-1}+1} + \ldots + \tfrac{1}{2^K} \Big| \quad \geq \\
&\geq \tfrac{1}{2} \Big| + \tfrac{1}{2} \Big| + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} \Big| + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} \Big| + \ldots + \Big| + \tfrac{1}{2^K} + \ldots + \tfrac{1}{2^K} \Big| \quad = \\
&= \tfrac{1}{2} \Big| + \tfrac{1}{2} \Big| + \tfrac{1}{2} \Big| + \tfrac{1}{2} \Big| + \ldots + \Big| + \tfrac{1}{2} \Big| = \tfrac{K+1}{2}
\end{aligned}$$

Geometrische Reihe:

$$\sum_{n \geq 0} q^n = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots = \frac{1}{1-q} \quad \text{für } |q| < 1, \quad q \in \mathbb{C}$$

Partialsummenfolge (endliche geometrische Reihe):

$$S_n = \tfrac{1-q^{n+1}}{1-q} \qquad (q \neq 1)$$

$$S_n = n + 1 \qquad (q = 1)$$

Sei $q \neq 1$. Aus der Differenz von

$$\begin{aligned}
S_n &= 1 + q + \ldots + q^n \\
q \cdot S_n &= q + q^2 + \ldots + q^n + q^{n+1}
\end{aligned}$$

ergibt sich $(q-1)S_n = q^{n+1} - 1$ und damit

$$S_n = \frac{q^{n+1}-1}{q-1} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Für $|q| < 1$ folgt daraus auch die Formel $\sum\limits_{n \geq 0} q^n = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots = \frac{1}{1-q}$.
Man beachte auch

- $|q| \geq 1 \Longleftrightarrow q^n \not\to 0 \Longleftrightarrow \sum q^n$ nicht konvergent
- $|q| < 1 \Longleftrightarrow q^n \to 0 \Longleftrightarrow \sum q^n$ konvergent $\boxed{\textbf{UE}}$

Cauchysche Konvergenzkriterium für Reihen:

$$\sum_{n \geq 0} a_n \text{ konvergent} \Longleftrightarrow \forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, N > 0 \quad \forall\, n, m < N : \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| < \epsilon$$

Dies ist eine Umformulierung des Cauchykriteriums für die Partialsummenfolge S_n:
(S_n) konvergent $\Longleftrightarrow \forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, N > 0 \quad \forall\, n, m < N : |S_n - S_m| < \epsilon$
Man beachte: $S_n - S_m = \sum_{k=m+1}^{n} a_k$

Definition 1.2 *Eine Reihe* $\sum\limits_{n \geq 0} a_n$ *heißt absolut konvergent, falls die Reihe der Absolutbeträge* $\sum\limits_{n \geq 0} |a_n|$ *konvergent ist.*

Als *Kurzschreibweise* für eine absolut konvergent Reihe schreibt man auch $\sum\limits_{n\geq 0} |a_n| < \infty$.

Satz 1.6 *Jede absolut konvergente Reihe ist konvergent:*

$$\sum_{n\geq 0} |a_n| \textit{ konvergent } \implies \sum_{n\geq 0} a_n \textit{ konvergent}$$

Beweis: $\left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| < \epsilon$ (Dreiecksungleichung).

Beispiel 1.12

Die Reihe $e = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots$ ist absolut konvergent.

Die Reihe $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$ ist konvergent, aber nicht absolut konvergent.

Die folgenden wichtigen Vergleichskriterien basieren auf dem Satz 1.6.

Majorantenkriterium: Sei a_n eine Folge reeller oder komplexer Zahlen und $b_n \geq 0$.

$$\left.\begin{array}{ll} |a_n| \leq b_n, & \\ \sum\limits_{n\geq 0} b_n < \infty & \text{(konvergent)} \end{array}\right\} \implies \sum_{n\geq 0} a_n \text{ absolut konvergent}$$

Beweis: $\sum_{k=m+1}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=m+1}^{n} b_k < \epsilon$

Minorantenkriterium: Sei a_n eine Folge reeller oder komplexer Zahlen und $b_n \geq 0$.

$$\left.\begin{array}{ll} |a_n| \geq b_n \geq 0, & \\ \sum\limits_{n\geq 0} b_n = \infty & \text{(divergent)} \end{array}\right\} \implies \sum_{n\geq 0} a_n \text{ nicht absolut konvergent}$$

Beispiel 1.13 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$

Es gilt $\frac{n}{n^2+1} \geq \frac{1}{2n}$ für $n \geq 1$. Die Reihe $\sum\limits_{n\geq 1} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n}\right)$ ist divergent und damit auch die Reihe $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{n}{n^2+1}$.

Wurzelkriterium: Sei a_n eine Folge reeller oder komplexer Zahlen.

1. $\exists\, q < 1: \quad \sqrt[n]{|a_n|} \leq q \quad (n \geq n_0) \quad \left[\iff \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1\right]$

   $\implies \sum\limits_{n\geq 0} a_n$ absolut konvergent

2. $\exists\, q \geq 1: \quad \sqrt[n]{|a_n|} \geq q$ für unendlich viele n $\left[\Longleftarrow \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1\right]$

   $\implies \sum\limits_{n\geq 0} a_n$ nicht konvergent

Beweis:

1. $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q \quad \Longrightarrow |a_n| \leq q^n$ für ein $0 < q < 1$

   $\sum q^n$ konvergent

   $\Longrightarrow \sum\limits_{n\geq 0} a_n$ absolut konvergent

2. $\sqrt[n]{|a_n|} \geq q \geq 1 \quad \Longrightarrow |a_n| \geq 1 \quad \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$

   $\Longrightarrow \sum\limits_{n\geq 0} a_n$ nicht konvergent

Beispiel 1.14 $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{n}{3^n}$

$\sqrt[n]{\frac{n}{3^n}} = \frac{\sqrt[n]{n}}{3} \to \frac{1}{3} < 1 \quad \Longrightarrow \sum \frac{n}{3^n}$ absolut konvergent

Quotientenkriterium: Sei a_n eine Folge reeller oder komplexer Zahlen.

1. $\exists\, q < 1 : \quad \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q \quad (n \geq n_0) \qquad \left[\Longleftrightarrow \overline{\lim}_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1\right]$

   $\Longrightarrow \sum\limits_{n\to\infty} a_n$ absolut konvergent

2. $\exists\, q \geq 1 : \quad \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq q \geq 1 \quad (n \geq n_0) \qquad \left[\Longleftarrow \overline{\lim}_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1\right]$

   $\Longrightarrow \sum\limits_{n\to\infty} a_n$ divergent

Beweis:

$$
\begin{aligned}
(1) \qquad |a_n| \quad &= \quad \left|\frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_n}{a_{n-2}} \cdot \ldots \cdot \frac{a_1}{a_0} \cdot a_0\right| \\
&\leq \quad q \cdot q \cdot q \cdot \ldots \cdot q \cdot |a_0| \\
&= \quad q^n \cdot |a_0|, \qquad 0 \leq q \leq 1
\end{aligned}
$$

(2) $\boxed{\textbf{UE}}$

Beispiel 1.15 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n}{3^n}$

$\left|\frac{\frac{n+1}{3^{n+1}}}{\frac{n}{3^n}}\right| = \left|\frac{n+1}{3n}\right| \to \frac{1}{3} < 1 \Longrightarrow \quad \sum \frac{n}{3^n}$ absolut konvergent

Exponentialreihe:

$$e^z := \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots \qquad z \in \mathbb{C}.$$

$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{z^n}{n!}}\right| = \frac{|z|}{n+1} \to 0 < 1 \Longrightarrow \quad \sum \frac{z^n}{n!}$ absolut konvergent

Mit Hilfe von e^z können die Winkelfunktionen und die Hyperbelfunktionen definiert werden (man beachte, daß z auch komplex sein kann:

$$\cos(z) = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}, \qquad \sin(z) = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$$

$$\cosh(z) = \frac{e^{z}+e^{-z}}{2}, \qquad \sinh(z) = \frac{e^{z}-e^{-z}}{2}$$

Potenzreihen:

Eine Reihe der Form

$$f(z) := \sum_{n\geq 0} a_n \cdot z^n \qquad z \in \mathbb{C},\ a_n \in \mathbb{C}$$

heißt *Potenzreihe*.

$$R := \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \quad \in [0,\infty]$$

ist der sogenannte *Konverganzradius* von $f(z)$.

Aus dem Wurzelkriterium $\left[\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n \cdot z^n|} = |z| \cdot \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|z|}{R}\right]$ folgt sofort:

- $|z| < R \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n\geq 0} a_n \cdot z^n$ absolut konvergent
- $|z| > R \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n\geq 0} a_n \cdot z^n$ divergent

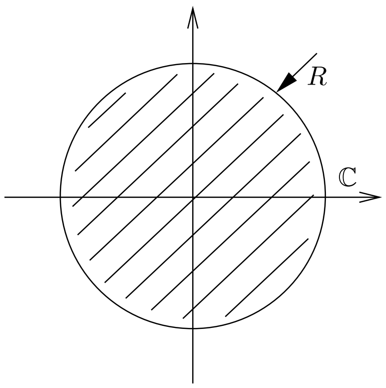

Abbildung 1.10: Konvergenzradius einer Potenzreihe

Leibnizsches Konvergenzkriterium für alternierende Reihen:

Sei a_n eine monotone Nullfolge, d.h. $a_0 \geq a_1 \geq a_2 \ldots \to 0$. Dann konvergiert die alternierende Reihe

$$\sum_{n\geq 0} (-1)^n \cdot a_n = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots$$

(Siehe auch die Abbildung 1.11.)

Beispiel 1.16

$\sum \frac{(-1)^n}{n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \ldots [= \ln 2]$

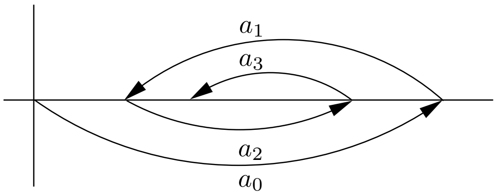

Abbildung 1.11: Graph. Begründung der Konvergenz einer alternierenden Reihe

Hyper- und Hypoharmonische Reihen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \begin{cases} \text{konvergent für } \alpha > 1 \\ \\ \text{divergent für } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Sei $\alpha > 1$. Dann ist $\frac{1}{2^{\alpha-1}} < 1$ und es gilt

$$\begin{aligned} S_{2^K-1} &= 1 + \tfrac{1}{2^\alpha} + \tfrac{1}{3^\alpha} + \tfrac{1}{4^\alpha} + \ldots \tfrac{1}{(2^K-1)^\alpha} \leq \\ &\leq 1 + \tfrac{2}{2^\alpha} + \tfrac{4}{4^\alpha} + \ldots + \tfrac{2^{K-1}}{(2^{K-1})^\alpha} = \\ &= 1 + \tfrac{1}{2^{\alpha-1}} + \tfrac{1}{(2^{\alpha-1})^2} + \ldots + \tfrac{1}{(2^{\alpha-1})^{K-1}} \leq \\ &\leq \tfrac{1}{1-\frac{1}{2^{\alpha-1}}} \end{aligned}$$

Damit sind die Partialsummen beschränkt und (da sie eine monotone Folge bilden) auch konvergent.
Für $\alpha \leq 1$ ist die harmonische Reihe $\sum \frac{1}{n}$ eine divergente Minorante.

Man beachte, daß bei diesen Reihen $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ sowohl das Wurzel- als auch das Quotientenkriterium versagt!.

Satz 1.7 *Jede Umordnung einer absolut konvergenten Reihe ist auch konvergent, und zwar zum selben Grenzwert.*

Cauchyprodukt:

Die Reihe $\sum\limits_{n\geq 0} c_n$ mit $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ ist das Cauchyprodukt der Reihen $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ und $\sum\limits_{n\geq 0} b_n$:

$$\sum_{n\geq 0} a_n \cdot \sum_{n\geq 0} b_n := \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right)$$

Das Cauchyprodukt entsteht aus einer Umordnung der formal (mit dem Distributivgesetz) ausmultiplizierten Reihen:

$$\begin{aligned}(a_0+a_1+\ldots)\cdot(b_0+b_1+\ldots) = \quad & a_0b_0+a_0b_1+\ldots\\ & +a_1b_0+a_1b_1+\ldots\\ = \quad & a_0\cdot(b_0+b_1+\ldots)\\ & +a_1\cdot(b_0+b_1+\ldots)+\ldots\\ = \quad & \underbrace{a_0b_0}_{c_0}+\underbrace{a_0b_1+a_1b_0}_{c_1}+\ldots\\ & +\underbrace{(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)}_{c_2}+\\ = \quad & \textstyle\sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{(\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k})}_{c_n}\end{aligned}$$

Satz 1.8 $\sum\limits_{n\geq 0} a_n,\ \sum\limits_{n\geq 0} b_n$ *absolut konvergent* $\Longrightarrow$

1. *Das Cauchyprodukt* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\sum\limits_{k=0}^{n} a_kb_{n-k})$ *ist auch absolut konvergent.*
2. *Für die Grenzwerte gilt* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\sum\limits_{k=0}^{n} a_kb_{n-k}) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n.$

Satz 1.9 (Funktionalgleichung der Exponentialfunktion)

$$e^{z+w} = e^z\cdot e^w \qquad (z,w\in\mathbb{C}).$$

Beweis: Die Reishe $e^z = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ ist absolut konvergent. Demnach gilt (auch für die Grenzwerte)

$$\begin{aligned} e^z\cdot e^w \quad = \quad & \sum_{n\geq 0}\frac{z^n}{n!}\cdot\sum_{m\geq 0}\frac{z^m}{m!} && =\\ = \quad & \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} n!\frac{z^k}{k!}\cdot\frac{w^{n-k}}{(n-k)!} && =\\ = \quad & \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\underbrace{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}z^k\cdot w^{n-k}}_{(z+w)^n} && =\\ = \quad & \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+w)^n}{n!} && = \quad e^{z+w}\end{aligned}$$

Aus der Exponentialfunktion (und deren Funktionalgleichung) lassen sich weitere Beziehungen ableiten.

- $\cos z = \dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!} = 1-\frac{z^2}{2}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\ldots$
- $\sin z = \dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!} = z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\ldots$

- $\cos(z+w) = \cos z \cdot \cos w - \sin z \cdot \sin w$
- $\sin(z+w) = \sin z \cdot \cos w + \cos z \cdot \sin w$
- $(\sin z)^2 + (\cos z)^2 = 1$
- $\cosh z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{z^{2k}}{(2k)!} = 1 + \dfrac{z^2}{2} + \dfrac{z^4}{4!} + \dots$
- $\sinh z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = z + \dfrac{z^3}{3!} + \dfrac{z^5}{5!} + \dots$
- $\cosh(iz) = \cos(z)$
- $\cosh(z+w) = \cosh(z) \cdot \cosh(w) + \sinh(z) \cdot \sinh(w)$
- $\sinh(z+w) = \sinh(z) \cdot \cosh(z) + \cosh(w) \cdot \sinh(w)$
- $(\cosh z)^2 - (\sinh z)^2 = 1$

1.4 Stetige Funktionen

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Die Menge (der Punkte in der Ebene)

$$\{ \ (x, f(x)) \ | \ x \in D \ \}$$

ist der **Graph der Funktion** f. (Die Menge D heißt auch *Definitionsbereich* von f.)

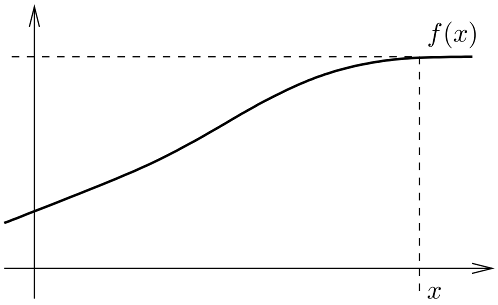

Abbildung 1.12: Graphische Darstellung eines Graphen f(x)

Die Stetigkeit der Funktion f in einem Punkt $x_0 \in D$ kann auf verschiedene Weise definiert werden:

Definition 1.3 ***f stetig im Punkt*** $\mathbf{x_0}$***:*** $\Longleftrightarrow$

1. *Für jede Folge $x_n \in D$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ gilt: Die Folge $f(x_n)$ konvergiert zum Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$. (Folgenstetigkeit)*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \implies \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

$$\boxed{\textit{Kurzschreibweise:} \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)}$$

2. $\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0| < \epsilon.$ *(Umgebungsstetigkeit)*
Man beachte: $\delta = \delta(\epsilon,\ x_0)$ hängt von ϵ und x_0 ab.

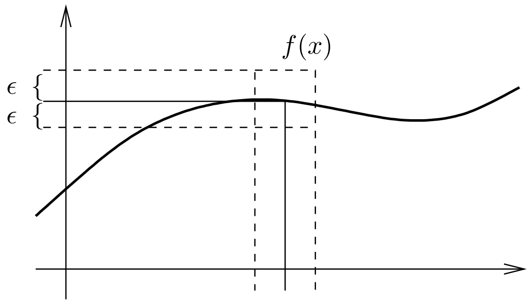

Abbildung 1.13: Graphische Darstellung der Umgebungsstetigkeit einer Funktion $f(x)$.

Satz 1.10 *Eine Funktionen f ist in einem Punkt $x_0 \in D$ genau dann folgenstetig, wenn sie dort umgebungsstetig ist.*

Definition 1.4 *Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion.*

$$f \text{ stetig auf } D \;:\Longleftrightarrow\; f \text{ ist für alle } x_0 \in D \text{ stetig}$$

Definition 1.5 *Sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist gleichmäßig stetig, falls*

$$\forall\, \epsilon\; > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x, y \in D : \quad |x - y| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

Hier hängt das $\delta = \delta(\epsilon)$ nur von ϵ ab.

Beispiel 1.17 Die folgenden Funktionen sind stetig.

- $f(x) = x$
- $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_d x^d$ (Polynome)

  $x_n \to x_0 \implies x_n^j \to x_0^j \implies \sum_{j=0}^{d} a_j x_n^j \to \sum_{j=0}^{d} a_j x_0^j$
- $f(x) = \frac{p(x)}{g(x)}$, $p(x), g(x)$ Polynome mit $g(x_0) \neq 0$ (rationale Funktionen).

Satz 1.11 *f, g stetig*

$\Longrightarrow$ *(1)* $f \pm g$ *stetig*

(2) $f \cdot g$ *stetig*

(3) $\frac{f}{g}$ *stetig* *(falls $g \neq 0$)*

Satz 1.12 *$f(x)$, $g(x)$ stetig $\implies$ $f(g(x))$ stetig*

Beweis: $x_n \to x_0 \implies g(x_n) \to g(x_0) \implies f(g(x_n)) \to f(g(x_0))$.

Ganz analog zu stetigen Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ können stetige Funktionen zwischen metrischen Räumen definiert werden.

Definition 1.6 *Es seien* (X,d), $(Y,\overline{d})$ *metrische Räume,* $f : X \to Y$ *eine Funktion und* $x_0 \in X$.

f ***stetig im Punkt*** $x_0 \in X$: $\Longleftrightarrow$

1. $x_n \to x_0 \Longrightarrow f(x_n) \to f(x_0)$ *(Folgenstetigkeit)*

$$\boxed{\textit{Kurzschreibweise: } \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)}$$

2. $\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad d(x,x_0) < \delta \quad \Longrightarrow \quad \overline{d}(f(x), f(x_0) < \epsilon$ *(Umgebungsstetigkeit)*

f ***stetig auf*** X: $\Longleftrightarrow$ f *ist für alle* $x_0 \in X$ *stetig.*

Beispiel 1.18 $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^m$ *sind metrische Räume (mit dem üblichen Abstandsbegriff). Die vorher definierte Konvergenz auf diesen Räumen entspricht genau der obigen allgemeinen Definition.*

Beispiel 1.19 Projektionen: $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \to x_1 \qquad \text{stetig} \qquad \boxed{\textbf{\textit{UE}}}$$

Beispiel 1.20 $f(x,y,z) = 3 + 4xz^2 - 5y^3$ ist stetig als Funktion $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.
(Zusammensetzung stetiger Funktionen: Projektionen, Addition, Multiplikation)

Beispiel 1.21 $f(z) = e^z$, $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist stetig.

1. $\lim_{z \to 0} e^z = e^0 = 1$ (d.h. e^z ist stetig an der Stelle $z_0 = 0$):

$$|e^z - 1| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \right| \le \sum_{n=1}^{\infty} |z|^n = \frac{|z|}{1-|z|} \qquad \left(\frac{1}{n!} \le 1\right)$$

(ohne Beschränkung der Allgemeinheit: $|z| < 1$)

$$\Longrightarrow \lim_{z \to 0} |e^z - 1| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{z \to 0} e^z = 1$$

2. Wegen $e^z = e^{z_0} \cdot e^{z - z_0}$ gilt:

$$\lim_{z \to z_0} e^z = e^{z_0} \cdot \lim_{z \to z_0} e^{z - z_0} = e^{z_0} \cdot \lim_{z - z_0 \to 0} e^{z - z_0} = e^{z_0} \cdot 1 = e^{z_0}.$$

Beispiel 1.22 $\sin z$, $\cos z$, $\sinh z$, $\cosh z$ sind stetig

Satz 1.13 *Sei* $f(z) = \sum_{n \ge 0} a_n z^n$ *eine Potenzreihe mit Konvergenzradius* $R = 1/\overline{\lim}_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 0$.
Dann ist $f(z)$ *für* $|z| < R$ *stetig.*

Satz 1.14 (Nullstellensatz) *Sei* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *stetig und es gelte* $f(a) < 0$ *und* $f(b) > 0$.

$$\Longrightarrow \exists\, \xi \in (a,b): \quad f(\xi) = 0.$$

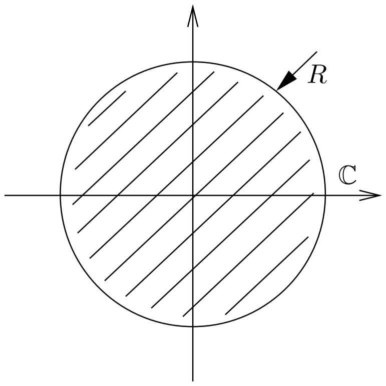

Abbildung 1.14: Konvergenzradius einer Potenzreihe

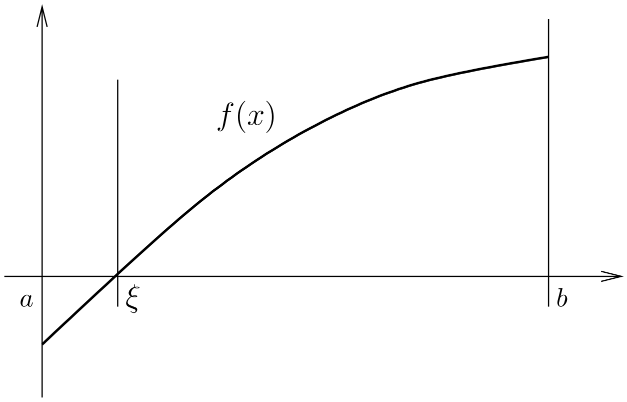

Abbildung 1.15: Nullstellensatz

Beweis:
Man definiert eine Folge von Intervallen $I_n = [a_n, b_n]$ mit $f(a_n) \leq 0$, $f(b_n) > 0$, $I_{n+1} \subseteq I_n$ und $l(I_{n+1}) = \frac{1}{2} l(I_n)$ folgendermaßen.
Zunächst setzt man $a_0 = a$, $b_0 = b$, d.h. $I_0 = [a, b]$.
Ist nun $I_n = [a_n, b_n]$ gegeben, setzt man $\xi_n = (a_n + b_n)/2$. Ist $f(\xi_n) \leq 0$ definiert man $a_{n+1} = \xi_n$ und $b_{n+1} = b_n$. Andernfalls definiert man $a_{n+1} = a_n$ und $b_{n+1} = \xi_n$.
Die Intervalle I_n bilden eine Intervallschachtelung. Es gibt daher eine einzige reelle Zahl ξ mit

$$\xi := \bigcap_{n \geq 1} I_n.$$

Offensichtlich gilt $a_n \to \xi$ und $b_n \to \xi$. Wegen $f(a_n) \leq 0$ ist $f(\xi) = f(\lim a_n) \leq 0$. (Hier wurde die Stetigkeit von f benutzt.) Entsprechend folgt aus $f(b_n) > 0$ die Ungleichung $f(\xi) = f(\lim b_n) \geq 0$. Demnach muss $f(\xi) = 0$ gelten.

Eine einfache Verallgemeinerung des Nullstellensatzes ist die folgende Zwischenwerteigenschaft:

Satz 1.15 *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $f(a) \leq f(b)$.*

$$\Longrightarrow \forall\, \eta \in [f(a), f(b)] \quad \exists\, \xi \in [a, b] : \; f(\xi) = \eta$$

Beweis: Man betrachte die Funktion $g(x) = f(x) - \eta$. Dann ist $g(a) \leq 0$ und $g(b) \geq 0$. Aus dem Nullstellensatz folgt, daß es ein $\xi \in (a, b)$ mit $g(\xi) = 0$ gibt. Damit ist aber $f(\xi) = g(\xi) + \eta = \eta$.

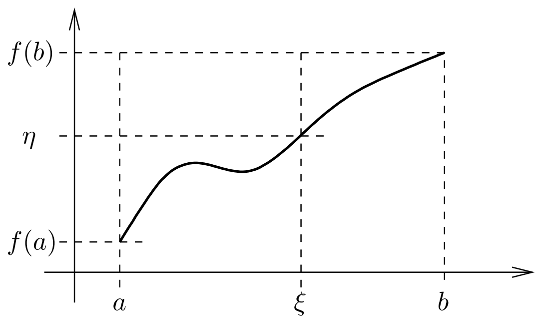

Abbildung 1.16: Graphische Veranschaulichigung des (Zwischenwert-)Satzes 1.15

Satz 1.16 *Sei* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *stetig.* $\Longrightarrow$

1. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *ist gleichmäßig stetig.*
2. $\exists\, \xi_1 \in [a, b] : \; f(\xi_1) = \max\limits_{a \le x \le b} f(x)$

   $\exists\, \xi_2 \in [a, b] : \; f(\xi_2) = \min\limits_{a \le x \le b} f(x)$

Das bedeutet, daß f *ein Maximum und ein Minimum besitzt, das auch angenommen wird. Insbesondere ist* f *auf* $[a, b]$ ***beschränkt***.

Beispiel 1.23 $f(x) = \frac{1}{x}$ ist auf dem offenen Intervall $(0, 1)$ stetig, aber nicht beschränkt. Der obere Satz gilt (i.a.) also nur für stetige Funktionen auf abgeschlossenen Intervallen.

Umkehrfunktion:

Sei $f : A \to B$ eine Funktion. Sie heißt **bijektiv** oder **invertierbar**, wenn es eine Funktion $f^{-1} : B \to A$ mit

$$f(f^{-1}(x)) = x \quad (\text{für } x \in B) \quad \text{und} \quad f^{-1}(f(x)) = x \quad (\text{für } x \in A)$$

gibt. Die Funktion f^{-1} heißt **Umkehrfunktion**.

Man beachte: $(f^{-1})^{-1}(x) = f(x)$.

Satz 1.17 *Sei* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *stetig. Dann gilt*

1. $\exists\, f^{-1}(x) \Longleftrightarrow f$ *streng monoton.*
2. $f^{-1}(x)$ *ist dann auch stetig und streng monoton.*

Beispiel 1.24

$f(x) = \sqrt{x}$ ist für $x \ge 0$ stetig und streng monoton (als Umkehrfunktionen von x^2 für $x \ge 0$).

Beispiel 1.25
Die Exponentialfunktion e^x $(x \in \mathbb{R})$ ist streng monoton wachsend und bildet $\mathbb{R}$ auf die positiven reellen Zahlen $(0, \infty)$ bijektiv ab:

Für $x > 0$ folgt aus der Potenzreihentwicklung $e^x > 1 + x > 1$. Daher gilt für $x < y$

$$e^y = e^x \underbrace{e^{y-x}}_{>1} > e^x$$

und außerdem $\lim\limits_{x \to \infty} e^x = \infty$. Weiters ist $e^{-x} = 1/e^x$. Also ist $e^x \ne 0$ und $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.

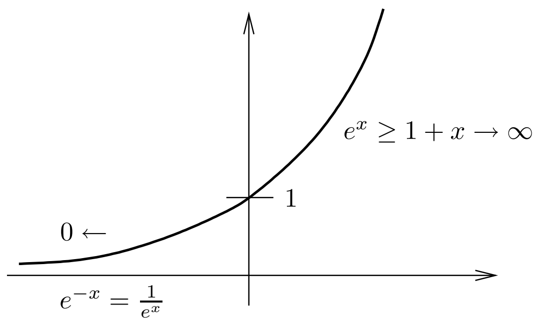

Abbildung 1.17: Graphische Darstellung der Exponentialfunktion

Eigenschaften des natürlichen Logarithmus:

Die Umkehrfunktion von e^x ist der **natürliche Logarithmus**

$$f(x) = \ln x$$

Dieser ist für $x > 0$ definiert, stetig und streng mononton wachsend.

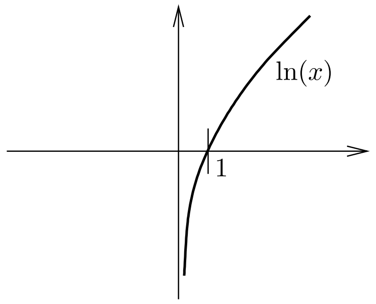

Abbildung 1.18: Logarithmus: Umkehrung der Exponentialfunktion

Die Gleichung $e^{x+y} = e^x e^y$ üebersetzt sich in folgende Rechenregeln:

$$\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$$

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a), \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$

Allgemeine Exponentialfunktion:

Für $a > 0$ wird a^x folgendermaßen definiert:

$$a^x := e^{x \cdot \ln a}.$$

Für natürliche x sind dies die gewöhnlichen Potenzen. Z.B.:

$$a^3 = a \cdot a \cdot a \qquad e^{3 \ln a} = e^{\ln(a^3)} = a^3 = a \cdot a \cdot a$$

Es gelten folgende Rechenregeln:

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y \qquad a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

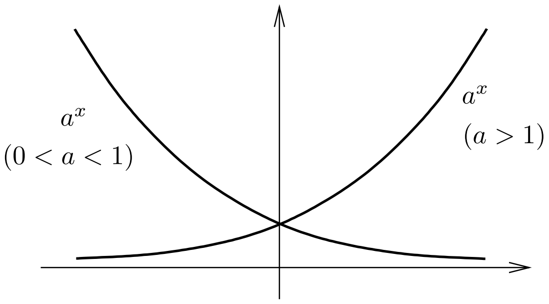

Abbildung 1.19: Graphische Dartstellung der allg. Logarithmusfunktion

Allgemeiner Logarithmus:

Die Umkehrfunktion der allgemeinen Exponentialfuntion ist der allgemeine Logarithmus:

$f(x) = a^x, \qquad (a > 0, a \neq 1)$

$f^{-1}(x) = \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}, \qquad a > 1$ **UE**

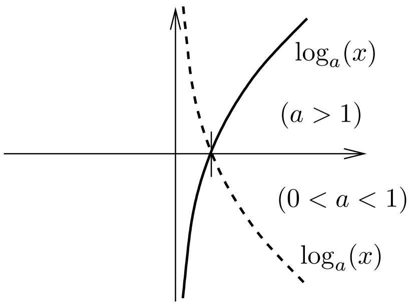

Abbildung 1.20: Allgemeine Logarithmusfunktion

Beispiel 1.26 Winkelfunktionen:

Es ist leicht zu sehen, daß der relle Cosinus $\cos x$ eine kleinste positive Nullstelle hat. (Man benützt die Eigenschaften $|\cos(x)| \leq 1$, $(\cos x)' = -\sin x$ etc.) Diese Nullstelle nennen wir $\frac{\pi}{2}$, d.h. $\pi = 3.14159\ldots$ ist das Doppelte der kleinsten Nullstelle von $\cos x$. Es ist auch leicht nachzuprüfen, daß $\cos x$ für $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ streng monoton fallend ist.
Aus den Summensätzen folgt nun

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x \cdot \underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0} - \sin x \cdot \underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{1} = -\sin(x) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

und

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

und durch mehrfache Anwendung dieser Regeln die Periodizität dieser Funktionen:

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \cos(x + 2\pi) & = & \cos x \\ \sin(x + 2\pi) & = & \sin x \end{array}}$$

Wegen $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ beschreibt die Zuordung $x \mapsto (\cos x, \sin x)$, $0 \le x \le 2\pi$ genau die Linie des Einheitskreises. x wird auch als **Winkel** (im Bogenmaß) bezeichnet.

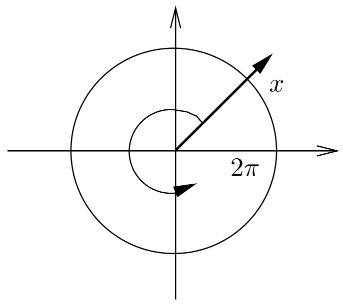

Abbildung 1.21: sin und cos durchlaufen einmal den Einheitskreis

Mit Hilfe der Winkelfunktionen lassen sich auch komplexe Zahlen $z \in \mathbb{C}$ (nun exaktifiziert) in Polarkoordinaten angeben. Wegen der Beziehung $\cos z + i \sin z = e^{iz}$ (die direkt aus der Definition von sin und cos folgt) gilt nun:

$$z = |z| \cdot (\cos\varphi + i \sin\varphi) = |z| \cdot e^{i\varphi}$$

Asymptotische Beziehungen:

Sei $x_0 \in [\,-\infty, \infty\,]$. Dann sind die folgenden Abkürzungen (Landau-Notation) üblich:

$$\begin{array}{llll}
f(x) = O(g(x)) & (x \to x_0) & :\Longleftrightarrow & |f(x)| \le C \cdot |g(x)| \\
 & & & \text{(in einer Umgebung von } x_0\text{)} \\
f(x) = o(g(x)) & (x \to x_0) & :\Longleftrightarrow & \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \\
f(x) \sim g(x) & (x \to x_0) & :\Longleftrightarrow & \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \\
 & & \Longleftrightarrow & f(x) = g(x) + o(g(x)) \quad (x \to x_0)
\end{array}$$

1.5 Differenzierbare Funktionen

Eine Funktion ist differenzierbar in einem Punkt, wenn sie sich lokal um diesen Punkt durch eine Gerade im folgenden Sinn approximieren läßt:

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + \underbrace{k}_{=f'(x_0)} \cdot (x - x_0)}_{=\text{ Geradengleichung}} + o(|x - x_0|) \qquad (x \to x_0)$$

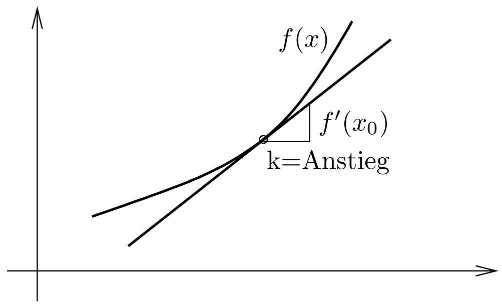

Abbildung 1.22: Approximation einer Funktion durch eine Gerade

Äquivalente Formulierungen sind:

$$\iff \quad \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = k + o(1) \qquad (x \to x_0)$$

$$\iff \quad \exists \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} := f'(x_0)$$

Die Steigung $k = f'(x_0)$ wird als **Ableitung** oder **Differentialquotient** von f an der Stelle x_0 bezeichnet. Man schreibt dafür auch $\frac{df}{dx}$.

Ableitungsfunktion:

Die Zuornung

$$x \to f'(x) = \frac{df}{dx}$$

wird als **Ableitungsfunktion** bezeichnet.

Beispiel 1.27 $f(x) = x^\alpha, \qquad f'(x) = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$

Satz 1.18 *f differenzierbar an der Stelle x_0 $\Longrightarrow$ f stetig an der Stelle x_0.*

Differenzieren von Funktionen in mehreren Veränderlichen:

Eine Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ heißt differenzierbar in einem Punkt (x_0, y_0), wenn sie sich lokal um diesen Punkt durch eine Ebene im folgenden Sinn approximieren läßt:

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + k_1 \cdot (x-x_0) + k_2 \cdot (y-y_0) + o\left(\| \begin{matrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{matrix} \|\right)$$

Die Steigungen (parallel zu den Achsen) sind durch die sogenannten **partiellen Ableitungen** gegeben:

$$k_1 = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0} := \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \qquad (y = y_0)$$

$$k_2 = \lim_{y\to y_0} \frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0} := \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \qquad (x = x_0)$$

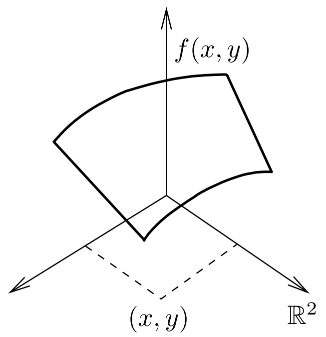

Abbildung 1.23: Darstellung einer Funktion mit 2 Variablen

Damit erhält man folgende Darstellung:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot(y,y_0) + o\left(\| \begin{matrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{matrix} \|\right) \\ &= f(x_0,y_0) + \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} + o\left(\| \begin{matrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{matrix} \|\right) \end{aligned}$$

Diese Formulierung läßt sich allgemein formulieren.

Definition 1.7
Eine Funktion $\mathbf{f}: \ \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ *heißt differenzierbar in* $\mathbf{x}_0$*, wenn*

$$\exists\, A \in \mathbb{R}^{n\times m}: \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x_0}) + A\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) + o(\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|)$$

Die Matrix A ist die ***Funktional- oder Jacobimatrix*** *von* $\mathbf{f}$*. Sie kann mit Hilfe partieller Ableitungen berechnet werden:*

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x_0}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(\mathbf{x_0}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\mathbf{x_0}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(\mathbf{x_0}) \end{pmatrix} := \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x_0})$$

Eine Funktion $\mathbf{f}: \ \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ *heißt stetig differenzierbar, wenn die Zuordung*

$$\mathbf{x} \mapsto \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x})$$

stetig ist, d.h. alle partiellen Ableitungen sind stetige Funktionen.

Satz 1.19
$\mathbf{f}$ *stetig differenzierbar* $\implies$ $\mathbf{f}$ *differenzierbar* $\implies$ *alle partiellen Ableitungen* $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ *existieren.*

Beispiel 1.28 $f(x) = x^3$

$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{x^3-x_0^3}{x-x_0} = \frac{(x-x_0)(x^2+xx_0+x_0^2)}{(x-x_0)} = x^2 + xx_0 + x_0^2$

$\implies \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 3x_0^2 \implies f'(x) = 3x^2.$

Allgemein gilt:

$$\boxed{(x^n)' = n\cdot x^{n-1}}$$

Beispiel 1.29 $f(x) = e^x \implies f'(x) = e^x$

Beweis:

$$\frac{e^t-1}{t} = \frac{t+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}+\dots}{t} = 1 + \frac{t}{2!} + \frac{t^2}{3!} + \dots$$
$$\left|\frac{e^t-1}{t} - 1\right| \le |t| + |t|^2 + |t|^3 + \dots = \frac{|t|}{1-|t|} \to 0 \qquad \text{für } t \to 0$$
$$\implies \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{e^x - e^{x_0}}{x-x_0} = e^{x_0}\underbrace{\frac{e^{x-x_0}-1}{x-x_0}}_{\to 1} \to e^{x_0}$$

Differenziert man die Potenzreihenentwicklung rein formal (also ohne Konvergenzbetrachtungen), so erhält man dasselbe *Ergebnis*:

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \tfrac{x^2}{2!} + \tfrac{x^3}{3!} + \dots \\ (e^x)' &= 0 + 1 + x + \tfrac{x^2}{2!} + \tfrac{x^3}{3!} + \dots \end{aligned}$$

Dieses Prinzip gilt übrigens für alle konvergenten Potenzreihen:

Satz 1.20 *Sei* $f(z) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n \cdot z^n$ *eine Potenzreihe mit Konvergenzradius* $R > 0$. *Dann gilt für alle* z_0 *mit* $|z_0| < R$

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \sum_{n\geq 1} a_n \cdot n \cdot z^{n-1}.$$

Man kann also (im Reellen) gesehen einfach gliedweise die Potenzen z^n differenzieren. Man beachte auch, daß dieser Satz mehr aussagt. Es wird gezeigt, daß der *komplexe Differentialquotient* $\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ für Funktionen $f(z)$, die durch Potenzreihen dargestellt werden, existiert.

Beweis-Idee:

$$\begin{aligned}
\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} &= \sum_{n\geq 1} a_n \cdot \underbrace{\frac{z^n - z_0^n}{z-z_0}}_{(z^{n-1}+z^{n-2}z_0+\ldots+z\cdot z_0^{n-2}+z_0^{n-1})} \\
&= \underbrace{\sum_{n\leq N} a_n(z^{n-1}+z^{n-2}z_0+\ldots+z\cdot z_0^{n-2}+z_0^{n-1})}_{\to \sum_{n\leq N} a_n\cdot n\cdot z^{n-1} \quad (z\to z_0)} \\
&+ \underbrace{\sum_{n>N(\epsilon)} a_n(z^{n-1}+z^{n-2}z_0+\ldots+z\cdot z_0^{n-2}+z_0^{n-1})}_{|\cdots|<\epsilon}
\end{aligned}$$

Beispiel 1.30

$$(\sin x)' = \cos x \qquad (\sinh x)' = \cosh x$$

$$(\cos x)' = -\sin x \qquad (\cosh x)' = \sinh x$$

Satz 1.21

1. $(\lambda \cdot f(x) + \mu \cdot g(x))' = \lambda \cdot f'(x) + \mu \cdot g'(x)$ *(Summenregel)*
2. $(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$ *(Produktregel)*
3. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$ *(Quotientenregel)*
4. $(f(g(x)))' = f'(g(x))\cdot g'(x)$ *(Kettenregel)*
5. $(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$ *(Umkehrfunktion)*

Beweis:

1. $\boxed{\textbf{UE}}$
2. $f(x) - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x-x_0) + o(|x-x_0|)$
   $g(x) - g(x_0) = g'(x_0)\cdot(x-x_0) + o(|x-x_0|)$
   $\Longrightarrow f(x)\cdot g(x) - f(x_0)\cdot g(x_0) = \qquad / \pm f(x)\cdot g(x_0)$
   $= f(x)\cdot(g(x)-g(x_0)) + (f(x)-f(x_0))\cdot g(x_0) =$
   $= \underbrace{f(x)}_{f(x_0)+o(1)} \cdot g'(x_0)\cdot(x-x_0) + f'(x_0)(x-x_0)\cdot g(x_0) + o(|x-x_0|) =$
   $= f(x_0)\cdot g'(x_0) + f'(x_0)\cdot g(x_0)\cdot(x-x_0) + o(|x-x_0|)$
3. $\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}$ + Ketten- und Produktregel
4. $f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0) + o(|x-x_0|)$
   $\Longrightarrow f(g(x)) - f(g(x_0)) =$
   $= f'(g(x_0))\cdot(g(x)-g(x_0) + o(g(x)-g(x_0)))$
   $= f'(g(x_0))\cdot(g'(x_0)\cdot(x-x_0) + o(|x-x_0|))$
   $= f'(g(x_0))\cdot g'(x_0)\cdot(x-x_0) + o(|x-x_0|)$

5. $f(f^{-1}(x)) = x$ (und man nimmt an, dass $f^{-1}(x)$ auch differenzierbar ist)
$\Longrightarrow f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1}(x))' = 1$

Beispiel 1.31
$f(x) = e^x,\ f'(x) = e^x,\ f^{-1}(x) = \ln x$

$$\Longrightarrow \quad (\ln x)' = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$$

Beispiel 1.32 $(a^x)' = (e^{x\cdot \ln a})' = e^{x\cdot\ln a}\cdot \ln a = \ln a \cdot a^x$

Beispiel 1.33 $(\log_a x)' = \frac{1}{\ln a \cdot x}$

Beispiel 1.34 $(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Beispiel 1.35 $(\arctan x)' = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1+x^2}$

Beispiel 1.36 $(\tan x)' = \frac{\cos x\cdot\cos x - \sin x\cdot(-\sin x)}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

Beispiel 1.37 $(x^\alpha)' = \left(e^{\alpha\cdot\ln x}\right)' = e^{\alpha\cdot \ln x}\cdot\frac{\alpha}{x} = \alpha\cdot x^{\alpha-1} \qquad (x>0)$

Für Funktionen in mehreren Veränderlichen gelten analog Differentiationsregeln. Anstelle der Ableitung $f'(x)$ tritt die Funktionalmatrix $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_0)$.

Satz 1.22

1. $\dfrac{\partial(\lambda\mathbf{f}+\mu\mathbf{g})}{\partial\mathbf{x}}(\mathbf{x}_0) = \lambda\cdot\dfrac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{x}}(\mathbf{x}_0) + \mu\cdot\dfrac{\partial\mathbf{g}}{\partial\mathbf{x}}(\mathbf{x}_0)$ *(Summenregel)*

2. $\dfrac{\partial(\mathbf{f}\circ\mathbf{g})}{\partial\mathbf{x}}(\mathbf{x}_0) = \dfrac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{u}}(\mathbf{g}(\mathbf{x}_0))\cdot\dfrac{\partial\mathbf{g}}{\partial\mathbf{x}}(\mathbf{x}_0)$ *(Kettenregel)*

3. $\dfrac{\partial\mathbf{f}^{-1}}{\partial\mathbf{x}}(\mathbf{x}_0) = \left(\dfrac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{x}}(\mathbf{f}(\mathbf{x}_0))\right)^{-1}$ *(Umkehrfunktion)*

Beispiel 1.38 Man betrachte $f(u,v): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \mathbf{g}(x,y) = \begin{pmatrix} g_1(x,y) \\ g_1(x,y)\end{pmatrix} : \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ und weiters die Zusammensetzung

$$h(x,y) = (f\circ\mathbf{g})(x,y) = f(g_1(x,y), g_2(x,y)):\ \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}.$$

Nach der Kettenregel erhält man für die Funktionalmatrix

$$\frac{dh}{d\mathbf{x}} = \frac{df}{d\mathbf{u}}(\mathbf{g}(\mathbf{x}))\cdot\frac{d\mathbf{g}}{d\mathbf{x}}(\mathbf{x})$$

bzw.

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial h}{\partial y}(x,y)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial u}(g_1(x,y),g_2(x,y)) & \dfrac{\partial f}{\partial v}(g_1(x,y),g_2(x,y))\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y)\end{pmatrix}$$

oder explizit angeschrieben (zur Erinnerung $h(x,y) = f(g_1(x,y), g_2(x,y))$):

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial g_1}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial g_2}{\partial x},\\ \frac{\partial h}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial g_1}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial g_2}{\partial y}.\end{aligned}$$

Implizite Kurven:

Ebene Kurven sind allgemein stetige Funktionen $c : t \mapsto (x(t), y(t)$. Man nennt dies auch *Parameterdarstellung* oder *explizite Darstellung* der Kurve c; t ist der Parameter. Z.B. wird durch $c : t \mapsto (\cos t, \sin t)$ der Einheitskreis beschrieben. Wegen $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ erfüllen $x = x(t) = \cos t$ und $y = y(t) = \sin t$ auch die Gleichung $x^2 + y^2 = 1$. Diese Gleichung beschreibt auch den Einheitskreis, die Parametrisierung ist aber nicht mehr enthalten. Man nennt so eine Gleichung auch *implizite Darstellung* der Kurve. Die Parametrisierung ist nicht eindeutig. Z.B. kann man beim Einheitskreis $x^2 + y^2 = 1$ stückweise auch die Parametrisierungen $x \mapsto (x, \pm\sqrt{1 - x^2})$ verwenden. Allgemein betrachtet man eine Gleichung der Form

$$F(x, y) = C$$

und untersucht, ob die Punktmenge

$$c = \{(x, y)|F(x, y) = C\}$$

ganz oder teilweise als (explizite) Kurve dargestellt werden kann. Insbesondere suchen wir Parametrisierungen der Form $x \mapsto (x, f(x))$, also Funktionen $f(x)$, die

$$F(x, f(x)) = C$$

erfüllen. Der Graph der Funktion f ist dann die (oder ein Teil der) Kurve c.

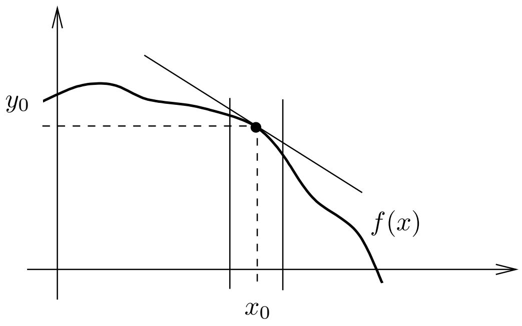

Abbildung 1.24: Mögliche Form einer impliziten Kurve

Ist $F(x, y)$ differenzierbar und nimmt man an, daß $F(x, f(x)) = C$ gilt, so folgt aus der Kettenregel

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x)) \cdot f'(x) = 0.$$

Kennt man nun einen Punkt (x_0, y_0), der $F(x_0, y_0) = C$ und $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ erfüllt, dann gewinnt man

$$f'(x_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}.$$

Tangentengleichung:

Die Tangentengleichung $y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$ der Kurve kann dann explizit angegeben werden (obwohl man $f(x)$ nicht kennt):

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial x_0}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) = 0$$

Die Existenz von $f(x)$ sichert der folgende Satz:

Hauptsatz über implizite Funktionen:

Sei $F(x,y)$ stetig differenzierbar, $F(x_0,y_0)=0$, $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0$

$\Longrightarrow$ *$\exists f(x)$ lokal um x_0 mit den folgenden Eigenschaften:*

- $f(x_0)=y_0$.
- *$f(x)$ stetig differenzierbar*
- $F(x,f(x))=0$
- $f'(x)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,f(x)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,f(x)}$.

Beispiel 1.39

Sei $F(x,y)=x^2+y^2-1$. Die Gleichung $F(x,y)=0$ beschreibt den Einheitskreis $c=\{(x,y)\in\mathbb{R}: x^2+y^2-1\}$. Hier ist $f(x)=\pm\sqrt{1-x^2}$.

Für einen Punkt (x_0,y_0) mit $x_0^2+y_0^2=1$ ist

$$2x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0)=0 \quad \text{oder} \quad x_0x+y_0y=1$$

die Tangentengleichung an den Kreis im Punkt (x_0,y_0).

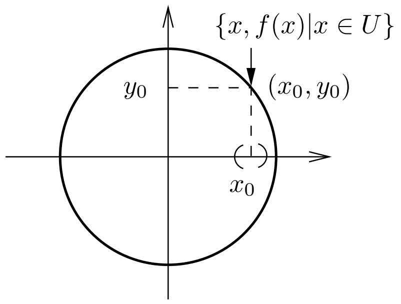

Abbildung 1.25: Darstellung eines Kreises als implizite Kurve

Flächen

In Analogie zu Kurven können $(n-1)$-dimensionale Flächen im $\mathbb{R}^n$ durch eine Gleichung der Form

$$F(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n)=0$$

beschrieben werden. Die Tangentialhyperebene im Punkt $\mathbf{x}_0=(x_{1,0},\ldots,x_{n,0})$ ist durch

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0)\cdot(x_1-x_{1,0})+\ldots+\frac{\partial F}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0)\cdot(x_n-x_{n,0})=0$$

gegeben, bzw. durch

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_0)\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)=0.$$

Mittelwertsätze der Differentialrechnung:

Satz 1.23 (1. Mittelwertsatz der Differentialrechnung)
Sei $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ differenzierbar und $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig.

$$\Longrightarrow \quad \exists\,\xi\in(a,b): \quad \frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi).$$

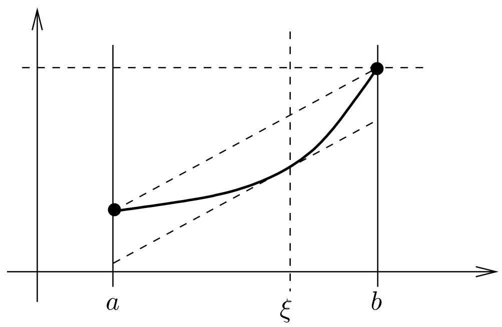

Abbildung 1.26: Graphische Darstellung des Mittelwertsatzes

Beweis:

1. Fall: $f(a) = f(b)$:

Sei oBdA:[1] $f(\xi) = \max_{a \le x \le b} f(x) > f(a)$ für ein ξ mit $a < \xi < b$. Dann gilt einerseits

$$f'(\xi) = \lim_{x \to \xi,\, x < \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \ge 0,$$

da für $x < \xi$ sicher $f(x) \le f(\xi)$ und daher $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \ge 0$ gilt. Entsprechend ist auch

$$f'(\xi) = \lim_{x \to \xi,\, x > \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \le 0,$$

womit $f'(\xi) = 0$ sein muss.
2. Fall: $f(a) \ne f(b)$:

Hier setzt man $g(x) := f(x) - (x - a) \cdot \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ Diese Funktion erfüllt $g(a) = g(b) = f(a)$. Folglich gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit $g'(\xi) = 0$. Wegen

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

folgt aber

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Satz 1.24 (2. Mittelwertsatz der Differentialrechnung)
Seien $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und weiters $g'(x) \ne 0$ in (a, b).

$$\Longrightarrow \quad \exists\, \xi \in (a, b) : \quad \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Beweis:

Man betrachte die Funktion $h(x) = f(x) - (g(x) - g(a)) \cdot \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

Regel von DesHospital:

Für differenzierbare Funktionen f und g gelte $f(x_0) = g(x_0) = 0$ und es existiere der Grenzwert $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$.

$$\Longrightarrow \exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

[1] Ohne Beschränkung der Allgemeinheit

Beweis:

Man wende den 2. Mittelwertsatz der Differentialrechnung auf das Intervall (x_0, x) bzw. (x, x_0) an und erhält für ein $\xi \in (x_0, x)$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Wegen $|x_0 - \xi| \leq |x_0 - x|$ impliziert $x \to x_0$ auch $\xi \to x_0$ und schließlich

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi \to x_0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = A.$$

Beispiel 1.40 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x}{1} = 1$

Aus dem 1. Mittelwertsatz der Differentialrechnung folgt auch die folgende wichtige Eigenschaft.

Satz 1.25 *Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$.*

$$\Longrightarrow \ f(x) \ \ \textit{konstant auf} \ (a, b).$$

Beweis:

Gäbe es $c < d$ mit $f(c) \neq f(d)$, dann müßte es auch ein $\xi \in (c, d)$ mit

$$f'(\xi) = \frac{f(d) - f(c)}{d - c} \neq 0$$

geben. Das ist aber nicht möglich.

Extremwertaufgaben

Satz 1.26 *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Ist $x_0 \in (a, b)$ ein lokales Extremum, dann gilt $f'(x_0) = 0$.*

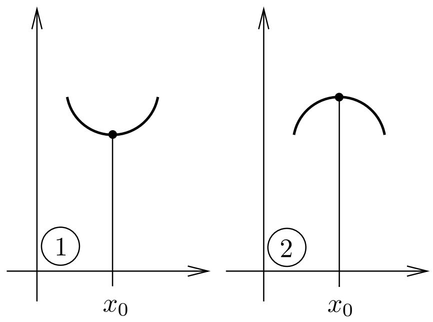

Abbildung 1.27: Abbildung eines lokalen Minimums (1) und Maximums (2)

Satz 1.27 *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Seien weiters $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k \in (a, b)$ alle Nullstellen von f':*

$$f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = \ldots = f'(\xi_k) = 0.$$

Dann gilt

$$\max_{a \leq x \leq b} f(x) = \max\{f(a), f(\xi_1), \ldots, f(\xi_k), f(b)\}$$

und das Maximum wird in einem dieser Punkte angenommen.

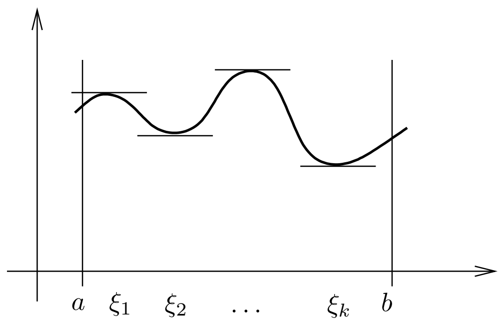

Abbildung 1.28: Bestimmen des Maximums von $f(x)$

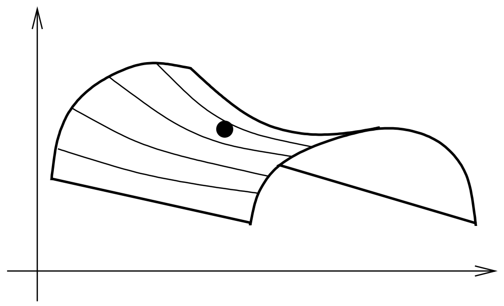

Abbildung 1.29: Graphische Darstellung eines Sattelpunktes

Satz 1.26 gilt auch für Funktionen in mehreren Veränderlichen.

Satz 1.28 *Sei* $\mathbf{f} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *differenzierbar und* $\mathbf{x}_0$ *ein lokales Extremum von* $\mathbf{f}$*.*

$$\Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0) = 0 \qquad\qquad (1 \le j \le m).$$

Beispiel 1.41 $f(x, y) = x^2 - 3xy + 2x - 5$

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{\partial f}{\partial x} &= 2x - 3y + 2 = 0 \\ \tfrac{\partial f}{\partial y} &= -3x = 0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow x_0 = 0, y_0 = \tfrac{2}{3}$$

Extrema mit Nebenbedingungen:

Bei Extemwertaufgaben mit Nebenbedingungen wird das Extremum einer Funktion (in mehreren Variablen) gesucht, wobei die Variablen zusätzlich Bedinungen (Nebenbedingungen) erfüllen sollen.

Beispiel 1.42 $f(x, y) = x^2 + y^2 + 3x$. Nebenbedingung: $x + y = 5$.

Lagrangesche Multiplikatoren:

Um Extremwerte von Funktionen unter Nebenbedingungen zu bestimmen, also z.B. unter der Nebenbedingung $x + y = 5$, schreibt man diese in die Form $g(x, y) = x + y - 5 = 0$ um und betrachtet die *Ersatzfunktion*

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \cdot g(x, y),$$

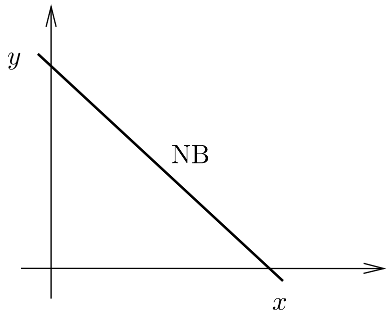

Abbildung 1.30: Extremwerte einer Funktion $f(x)$ unter Nebenbedingungen

wobei λ der sogenannte *Lagrangesche Multiplikator* ist. In diesem Beispiel erhält man

$$F(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + 3x + \lambda \cdot (x + y - 5).$$

Man bestimmt nun die relativen Extrema dieser Ersatzfunktion und erhält auch die extremwertverdächtigen Punkte des ursprünglichen Problems:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial x} = 2x + 3 + x = 0 \\[2ex] \frac{\partial F}{\partial y} = 2y + x = 0 \\[2ex] \frac{\partial F}{\partial \lambda} = x + y - 5 = 0 \end{array}\right] \quad \begin{array}{c} \left.\begin{array}{c} x_0 = \frac{7}{4} \\[2ex] y_0 = \frac{13}{4} \end{array}\right\} \text{extremwertverdächtiger Punkt} \\[2ex] \lambda = \frac{26}{4} \end{array}$$

Höhere Ableitungen:

Ist bei einer differenzierbaren Funktion $f(x)$ auch die Ableitung $f'(x)$ eine differenzierbare Funktion, dann kann man auch die Ableitung der Ableitung $f''(x)$ bilden usw:

$$f(x),\ f'(x),\ f''(x) = (f'(x))',\ f'''(x), \ldots,\ f^{(n)}(x) = n\text{-te Ableitung}.$$

Beispiel 1.43 $f(x) = \frac{1}{1-x} \implies f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$

Satz 1.29 *Sei $f(x)$ n-mal differenzierbar, d.h. $f^{(n)}(x)$ existiert. Sei nun*

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \ \textit{aber } f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Ist $n > 0$ gerade dann gilt

$$\begin{array}{ll} f^{(n)}(x_0) < 0 & \Longrightarrow x_0 \textit{ lokales Maximum} \\ f^{(n)}(x_0) > 0 & \Longrightarrow x_0 \textit{ lokales Minimum} \end{array}$$

Ist n ungerade, dann ist x_0 ein "Sattelpunkt", d.h. es gilt zwar $f'(x_0) = 0$, aber in jeder Umgebung von x_0 nimmt f Werte an die größer als $f(x_0)$ sind und auch Wert, die kleiner als $f(x_0)$ sind. (Siehe auch Abbildung 1.27 und 1.29).

Höhere Partielle Ableitungen:

Bei differenzierbaren Funktionen in mehreren Veränderlichen können auch höhere partielle Ableitungen, also partielle Ableitungen von partiellen Ableitungen gebildet werden (falls sie existieren). Man sagt auch, eine Funktion ist n-mal stetig differenzierbar, wenn alle n-ten partiellen Ableitungen stetig sind.

Beispiel 1.44 Für $f(x,y) = x \cdot e^y + x^2$ werden alle 1. und 2. partiellen Ableitungen gebildet (man beachte auch die *Kurzschreibweise* f_x für $\frac{\partial f}{\partial x}$ etc.):

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = e^y + 2x \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = f_y = xe^y$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} = 2 \qquad \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy} = xe^y$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial yx} = f_{yx} = e^y \qquad \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial xy} = f_{xy} = e^y$$

Satz 1.30 (Satz von Schwarz) *Es seien die Funktionen* $(x,y) \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ *und* $(x,y) \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ *stetig.*

$$\Longrightarrow \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Die 2. partiellen Ableitungen können auch dazu verwendet werden, den Charakter (max oder min) eines lokalen Extremums zu bestimmen.

Satz 1.31 *Sei* $f(x,y)$ *2-stetig differenzierbar und es gelte*

$$f_x(x_0,y_0) = f_y(x_0,y_0) = 0.$$

Dann gilt:

$$f_{xx}(x_0,y_0) > 0, \quad f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 > 0 \quad \Longrightarrow \quad (x_0,y_0) \text{ lokales Minimum}$$

$$f_{xx}(x_0,y_0) < 0, \quad f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 > 0 \quad \Longrightarrow \quad (x_0,y_0) \text{ lokales Maximum}$$

1.6 Integralrechnung:

Bei der Integralrechnung geht es zunächst, darum, die Fläche

$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

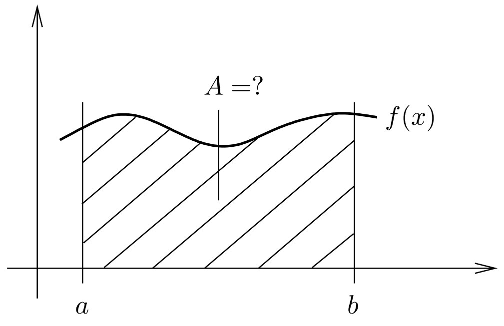

Abbildung 1.31: Bestimmung der Fläche über ein bestimmtes Integral

zwischen der x-Achse und dem Graphen einer Funktion (auf einem Intervall) zu berechnen. Formal geschieht dies durch Approximation der Fäche durch Ober- und Untersummen bezüglich einer Zerlegung (siehe Abbildung 1.32). Streben die Ober- und Untersummen bei immer feiner werdenden Zerlegungen[2] gegen einen gemeinsamen Grenzwert, so wird dieser als das *Integral* oder auch als *bestimmtes Integral* bezeichnet. Die Funktion f heißt dann *integrierbar*.

[2]Das bedeutet, dass die maximale Länge der Teilintervalle gegen 0 konvergiert.

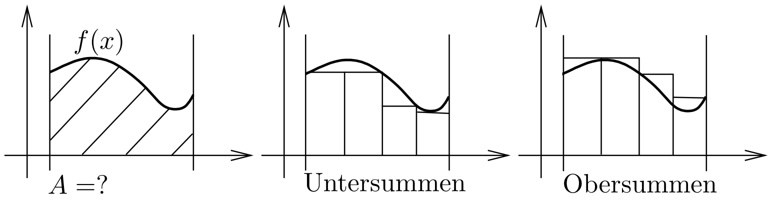

Abbildung 1.32: Ober- und Untersummen

Ist $T_n = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ eine Zerlegung des Intervalles $[a, b]$ in n Teilintervalle $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ und $Z_n = \{\xi_1 < \xi_2 < \cdots < \xi_n\}$ mit $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ eine Menge von Zwischenwerten, so bezeichnet man

$$Z(f, T_n, Z_n) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

auch als *(Riemannsche) Zwischensumme*. Konvergiert für $n \to \infty$ die maximale Länge der Teilintervalle $[x_{i-1}, x_i]$ gegen 0, so gilt bei integrierbaren Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} Z(f, T_n, Z_n) = \int_a^b f(x)\, dx,$$

da die Zwischensummen immer zwischen den entsprechenden Ober- und Untersummen liegen.

Stetige Funktionen sind immer integrierbar:

Satz 1.32 *Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, dann existiert das Integral $\int_a^b f(x)\, dx$.*

Rechenregeln:

1. $\int_a^b [\ \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)\ ]dx = \alpha \cdot \int_a^b f(x) \cdot dx + \beta \cdot \int_a^b g(x) \cdot dx$
2. $\int_a^b f(x) \cdot dx + \int_b^c f(x) \cdot dx = \int_a^c f(x) \cdot dx \qquad \forall\ a, b, c \in \mathbb{R}$

   wobei $\int_a^b f(x) \cdot dx = -\int_b^a f(x) \cdot dx \quad$ für $b < a$
3. $f \leq g \implies \int_a^b f(x) \cdot dx \leq \int_a^b g(x) \cdot dx \qquad (a < b)$

Satz 1.33 ***Mittelwertsatz der Integralrechnung.***
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es ein ξ mit $a < \xi < b$ und

$$\int_a^b f(x)\, dx = f(\xi)\,(b - a).$$

Beweis:

Sei $g = \min\limits_{a \leq x \leq b} f(x)$ und $G = \max\limits_{a \leq x \leq b} f(x)$. Dann gilt

$$g \cdot (b - a) \leq \int_a^b f(x) \cdot dx \leq G \cdot (b - a)$$

bzw.

$$g \leq \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) \cdot dx \leq G.$$

Wegen der Stetigkeit von f gibt es ein ξ mit $a < \xi < b$ und

$$f(\xi) = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)\, dx.$$

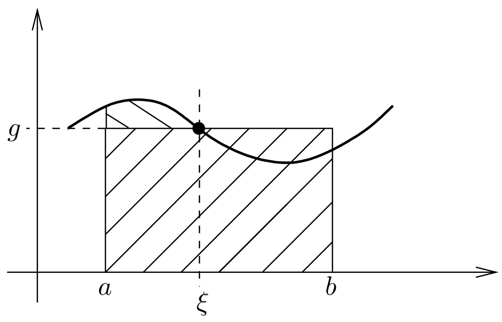

Abbildung 1.33: Graphische Darstellung des Mittelwertsatzes der Integralrechnung

Satz 1.34 ***Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.***
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und $F(x)$ durch

$$F(x) := \int_a^x f(t) \cdot dt$$

definiert. Dann ist $F(x)$ differenzierbar und es gilt

$$F'(x) = f(x).$$

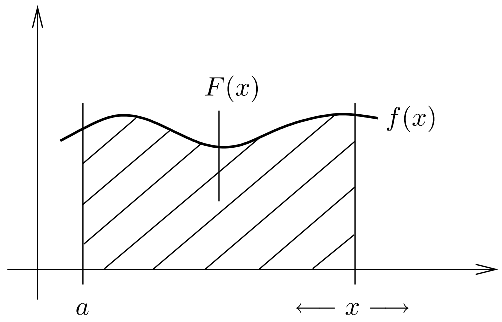

Abbildung 1.34: Darstellung des Hauptsatzes der Differential- Integralrechnung

Beweis:

Man muss zeigen, dass

$$f(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}$$

gilt.

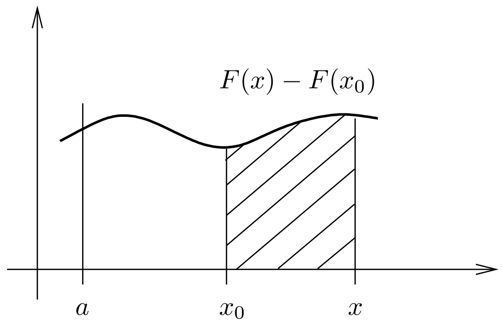

Abbildung 1.35: Beweis des Hauptsatzes der Differential- Integralrechnung

Dazu betrachte man die Differernz (siehe dazu auch Bild 1.35)

$$\begin{aligned} F(x) - F(x_0) &= \int_a^x f(t)\cdot dt - \int_a^x f(t)\cdot dt \\ &= \int_{x_0}^x f(t)\cdot dt \\ &= (x-x_0)f(\xi), \end{aligned}$$

wobei die Existenz von $x_0 < \xi < x$ durch den Mittelwertsatz der Integralrechnung gesichert ist. Also gilt

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = f(\xi).$$

Mit $x \to x_0$ gilt auch $\xi \to x_0$ (wegen $x_0 < \xi < x$). Also gilt

$$\lim_{x\to x_0} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = f(x_0)$$

und folglich $F'(x_0) = f(x_0)$

Unbestimmtes Integral:

Definition 1.8 *Eine Funktion $F(x)$ heißt* **Stammfunktion** *von $f(x)$, falls*

$$F'(x) = f(x).$$

Schreibweise: $F(x) = \int f(x)\cdot dx$.
Eine Stammfunktion heißt auch **unbestimmtes Integral**.

Gibt es mehrere Stammfunktionen zu einer Funktion $f(x)$?

Satz 1.35 *Sind $F_1(x), F_2(x)$ zwei Stammfunktionen von $f(x)$, dann gilt*

$$F_1(x) = F_2(x) + C$$

für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$

Beweis:
$D(x) = F_1(x) - F_2(x) \quad\Longrightarrow\quad D'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0 \quad\Longrightarrow\quad D(x) =$ konstant.

Beispiel 1.45

- $f(x) = x^2 \Longrightarrow F(x)\frac{x^3}{3} + C$ alle Stammfunktionen von $f(x) = x^2$.
- $f(x) = \cos x \Longrightarrow F(x) = \sin x + C$
- $f(x) = \frac{1}{1+x^2} \Longrightarrow F(x) = \arctan x + C$

Satz 1.36 ***2. Version des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung: Zusammenhang zwischen bestimmten und unbestimmten Integral***
Sei $f(x)$ stetig, $F(x)$ eine beliebige Stammfunktionen von $f(x)$. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)\cdot dx = F(b) - F(a).$$

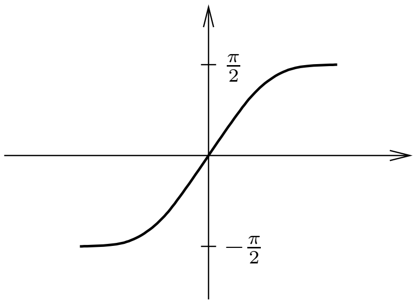

Abbildung 1.36: Graphische Dartstellung des Arcustangens

Mit der **Schreibweise** $F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$ liest sich der Zusammenhang zwischen bestimmten und unbestimmten Integral auch so:

$$\int f(x)\,dx = F(x) \quad \Longrightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b .$$

Beweis:

$F(x)$ und $F_1(x) = \int_a^x f(t)\cdot dt$ sind zwei Stammfunktionen von $f(x)$. Es gilt also $F_1(x) = F(x) + C$. Wegen $F_1(a) = 0$ ist $C = -F(a)$ und $F_1(b) = F(b) + C = F(b) - F(a)$. Also

$$F_1(b) = \int_a^b f(t)\cdot dt = F(b) - F(a).$$

Beispiel 1.46

$$\begin{aligned}
& \int \sin x \cdot dx = -\cos x + C \\
\Longrightarrow \quad & \int_0^\pi \sin x \cdot dx = (-\cos x + C)\Big|_0^\pi \\
& = (-\cos\pi + C) - (-\cos 0 + C) = 1 + 1 = 2.
\end{aligned}$$

Die Konstante C fällt immer weg.

Integrationsregeln:

1. Partielles Integrieren:

Satz 1.37

(i) $\displaystyle\int f(x)\cdot g'(x)\cdot dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)\cdot dx$

(ii) $\displaystyle\int_a^b f(x)\cdot g'(x)\cdot dx = f(x)\cdot g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)\cdot g(x)\cdot dx$

Beweis: (i):

$$\begin{aligned}
& [f(x)\cdot g(x)]' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x) \\
\Longrightarrow \quad & f(x)\cdot g'(x) = [f(x)\cdot g(x)]' - f'(x)\cdot g(x) \\
\Longrightarrow \quad & \int f(x)\cdot g'(x) = \underbrace{\int [f(x)\cdot g(x)]'}_{f(x)\cdot g(x)} - \int f'(x)\cdot g(x).
\end{aligned}$$

(ii) folgt aus (i).

Beispiel 1.47 $\int \ln x \cdot dx = \int \underbrace{1}_{g'} \cdot \underbrace{\ln x}_{f} \cdot dx = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \cdot dx = x \cdot \ln x - x + c$

2. Substitutionsregel:

Satz 1.38

(i) $\displaystyle\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \cdot dx = \int f(u) \cdot du \bigg|_{u=\varphi(x)}$

(ii) $\displaystyle\int_a^b f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \cdot dx = \int_{\varphi(b)}^{\varphi(a)} f(u) \cdot du$

Ist $\varphi(x)$ invertierbar, so gilt auch

$$\int_\alpha^\beta f(u) \cdot du = \int_{\varphi^{-1}(\alpha)}^{\varphi^{-1}(\beta)} f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \cdot dx.$$

Beweis: (i) folgt auch $F(\varphi(x))' = F'(\varphi(x))\varphi'(x)$ und (ii) direkt aus (i).

Beispiel 1.48 $\displaystyle\int x \cdot e^{x^2} \cdot dx = \frac{1}{2} \int \underbrace{2x \cdot e^{x^2}}_{(e^{x^2})'} = \frac{1}{2} \cdot e^{x^2} + C.$

In der *Praxis* setzt man $u = \varphi(x)$ und $\frac{du}{dx} = \varphi'(x)$ " $\Longleftrightarrow$ " $du = \varphi'(x) \cdot dx$.

Beispiel 1.49

- $\displaystyle\int x \cdot \sin(x^2+1) \cdot dx = \left| \begin{array}{c} u = ax+b \\ du = a \cdot dx \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int \sin u \cdot du = \frac{1}{2}(-\cos u) = -\frac{1}{2}\cos(x^2+1) + c$
- Sei $F(x)$ Stammfunktion von $f(x)$

  $\displaystyle\int f(\underbrace{ax+b}_{u}) \cdot dx = \left| \begin{array}{c} u = ax+b \\ du = a \cdot dx \end{array} \right| = \frac{1}{a} \int f(u) \cdot du = \frac{1}{a} F(u) = \frac{1}{a} F(ax+b)$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\underbrace{x^2+2x+2}_{(x+1^2)+1}} \cdot dx = \left| \begin{array}{c} u = x+1 \\ du = dx \end{array} \right| = \int \frac{1}{u^2+1} \cdot du = \arctan u = \arctan(x+1) + c$

3. Integration rationaler Funktionen:

Eine rationale Funktion $r(x)$ ist eine Funktion der Form

$$r(x) = \frac{f(x)}{g(x)},$$

mit Polynomen $f(x)$ und $g(x)$.

Beispiel 1.50 Bei der Funktion

$$r(x) = \frac{x^3+x+3}{x+1}$$

ist der Zählergrad $\geq$ Nennergrad. Hier führt man zunächst eine Polynomdivision durch:

$$
\begin{array}{l}
-\begin{cases} (x^3+x+3):(x+1) = \underline{x^2-x+2} \\ x^3+x^2 \end{cases} \\
\qquad -\begin{cases} -x^2+x+3 \\ -x^2-x \end{cases} \\
\qquad\qquad -\begin{cases} 2x+3 \\ 2x+2 \end{cases} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 1 \text{ Rest}
\end{array}
$$

Es gilt also

$$r(x) = x^2 - x + 2 + \frac{1}{x+1}$$

und daher

$$\Longrightarrow \int r(x) \cdot dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x + \ln|x+1| + C.$$

Im allgemeinen kann man (gegebenefalls nach einer Polynomdivision) voraussetzen, dass bei $r(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ Zählergrad < Nennergrad, also Grad $f(x) <$ Grad $g(x)$ gilt. Um so eine Funktion zu integrien führt man eine **Partialbruchzerlegung** durch.

Beispiel 1.51 Durch Nachrechnen erhält man

$$r(x) = \frac{2}{x^2-1} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}.$$

Und daher

$$\Longrightarrow \int r(x) = \ln|x-1| - \ln|x+1| + C = \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C.$$

Zur Durchführung der Partialbruchzerlegung benötigen wir den Fundamenalsatz der Algebra (siehe p.5), angewandt für relle Polynome.

Fundamentalsatz der Algebra für reelle Polynome:

Sei $g(x)$ ein Polynom n-ten Grades mit den Koeffizienten in $\mathbb{R}$. Ist $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ eine komplexe Nullstelle von $g(x)$, dann ist die konjugiert komplexe Zahl $\overline{z}$ auch eine Nullstelle von $g(x)$, d.h. die komplexen Nullstellen treten immer paarweise auf. Sind also

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_s \in \mathbb{R}$$

mit Vielfachheiten $K_1, K_2, \dots, K_s$ die rellen Nullstellen und

$$\beta_1 + \gamma_1 i,\ \beta_1 - \gamma_1 i,\ \dots\ ,\ \beta_t + \gamma_t i,\ \beta_t - \gamma_t i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$$

mit Vielfachheiten $L_1, \dots, L_t$ die komplexen Nullstellenpaare (mit $\gamma_j \neq 0$), dann gilt:

$$
\begin{aligned}
g(x) &= c \cdot (x-\alpha_1)^{K_1} \cdots (x-\alpha_s)^{K_s} [(x-\beta_1-\gamma_1 i)(x-\beta_1+\gamma_1 i)]^{L_1} \cdots [(x-\beta_t-\gamma_t i)(x-\beta_t+\gamma_t i)]^{L_t} \\
&= (x-\alpha_1)^{K_1} \cdots (x-\alpha_s)^{K_s} (x^2+\overline{\beta}_1 x+\overline{\gamma}_1)^{L_1} \cdots (x^2+\overline{\beta}_t x+\overline{\gamma}_t)^{L_t},
\end{aligned}
$$

d.h. $g(x)$ kann in Linearfaktoren $(x-\alpha_i)$ und in quadratische Faktoren $(x^2+\overline{\beta}_i x+\overline{\gamma}_i)$ zerlegt werden.
Hier ist $\overline{\beta}_j = -2\beta_j$ und $\overline{\gamma}_j = \beta_j^2 + \gamma_j^2$:

$$(x-\beta_j-\gamma_j i)(x-\beta_j+\gamma_j i) = x^2 - \underbrace{2\beta_j}_{\in\mathbb{R}} x + \underbrace{(\beta_j^2+\gamma_j^2)}_{\in\mathbb{R}} = x^2 + \overline{\beta}_j x + \overline{\gamma}_1.$$

Partialbruchzerlegung:

Seien $f(x)$ und $g(x)$ zwei reelle Polynome mit Grad $f(x) <$ Grad $g(x)$ und

$$g(x) = \underbrace{(x-\alpha_1)^{K_1} \cdot \ldots \cdot (x-\alpha_s)^{K_s}}_{\text{(reelle Nullstellen)}} \cdot \underbrace{(x^2+\overline{\beta}_1 x+\overline{\gamma}_1)^{L_1} \cdot \ldots \cdot (x^2+\overline{\beta}_t x+\overline{\gamma}_t)^{L_t}}_{\text{(konjugiert komplexe Nullstellen)}}$$

die Zerlegung von $g(x)$. Dann gibt es reelle Koeffizienten A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} mit

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{K_i} \frac{A_{ij}}{(x-\alpha_i)^j} + \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{L_i} \frac{B_{ij}x + C_{ij}}{(x^2 + \overline{\beta}_i x + \overline{\gamma}_i)^j}.$$

Die **Partialbrüche**

$$\frac{A_{ij}}{(x-\alpha_i)^j} \quad \text{und} \quad \frac{B_{ij}x + C_{ij}}{(x^2 + \overline{\beta}_i x + \overline{\gamma}_i)^j}$$

können dann mit den üblichen Verfahren integriert werden.

Beispiel 1.52

$r(x) = \frac{x^2+5}{x^3+x^2+x+1} = \frac{x^2+5}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad x^2+5 &= A(x^2+1) + (Bx+C)(x+1) \\ &= (A+B)x^2 + (B+C)x + (A+C) \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \left.\begin{array}{ll} x^2: & 1 = A+B \\ x^2: & 0 = B+C \\ x^0: & 5 = A+C \end{array}\right\} \Longrightarrow A = 3, B = -2, C = 2$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad \int r(x)\cdot dx &= \int \tfrac{3}{x+1}\cdot dx + \int \tfrac{-2x+2}{x^2+1}\cdot dx &= \\ &= 3\ln|x+1| - \int \tfrac{2x}{x^2+1}\cdot dx + 2\int \tfrac{1}{x^2+1}\cdot dx &= \\ &= 3\ln|x+1| - 2\ln|x^2+1| + 2\arctan x + C \end{aligned}$$

Beispiel 1.53

$r(x) = \frac{x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+2x+5)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+5}$

(Reelle Nullstelle $\alpha = 1$ hat die Vielfachheit 2, Lösung: $A_1 = \frac{3}{8}, A_2 = 0, B = -\frac{3}{8}, C = -\frac{1}{8}$)

$$\Longrightarrow \int r(x)\cdot dx = A_1 \ln|x-1| - \frac{A_2}{x-1} + \frac{B}{2}\ln\left(\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 + 1\right) + \frac{C-B}{2}\arctan\frac{x+1}{2}.$$

Uneigentliche Integrale:

1. Art: Stelle der Unbeschränktheit:

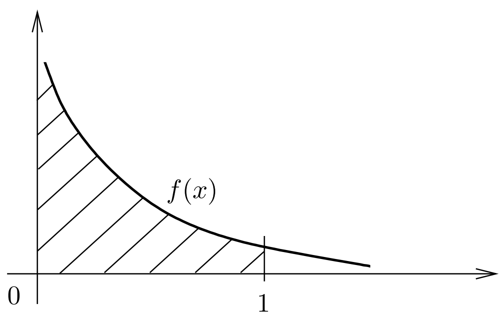

Abbildung 1.37: $x = 0$ als Stelle der Unbeschränktheit

Ist etwas $x = 0$ eine Stelle der Unbeschränktheit, also $f(x) \to \infty$ für $x \to 0$, dann definiert man ein uneigentliches Integral 1. Art durch folgenden Grenzwert, falls er existiert:

$$\int_0^1 f(x)\cdot dx := \lim_{\epsilon\to 0}\int_\epsilon^1 f(x)\cdot dx.$$

Beispiel 1.54 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot dx = \lim_{\epsilon\to 0} \int_\epsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot dx = \lim_{\epsilon\to 0+} 2\sqrt{x}\Big|_\epsilon^1 = \lim_{\epsilon\to 0+} (2 - 2\sqrt{\epsilon}) = 2$

Beispiel 1.55 $\int_0^1 \frac{1}{x} = \lim_{\epsilon\to 0+} \ln x \Big|_\epsilon^1 = \lim_{\epsilon\to 0+} (-\ln \epsilon) = \infty \Longrightarrow$ existiert nicht

2. Art: Unendliches Integrationsintervall:

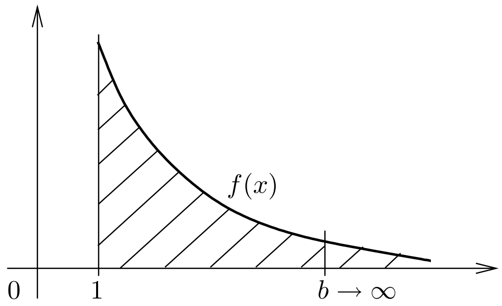

Abbildung 1.38: Unendliches Integrationsintervall als mögliche Unbeschränktheit

Ähnlich geht man bei *unendlichen Integrationsintervallen* vor:

$$\int_a^\infty f(x) \cdot dx := \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x) \cdot dx.$$

Beispiel 1.56 $\int_0^\infty e^{-x} \cdot dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-x} \cdot dx = \lim_{b\to\infty} (-e^{-x}) \Big|_0^b = \lim_{b\to\infty} (1 - \underbrace{e^{-b}}_{\to 0}) = 1$

Wie bei unendlichen Reihen, gilt hier ein *Majorantenkriterium*:

Satz 1.39 *Es gelte* $|f(x)| \le g(x)$ *und das uneigentliche Integral* $\int\limits_0^\infty g(x) \cdot dx$ *existiere. Dann existiert auch das uneigentliche Integral*

$$\int_0^\infty f(x)\, dx.$$

Satz 1.40 *(Integralkriterium)*
Sei $f(x) \ge 0$ *für* $x \ge 1$ *und monoton fallend. Dann gilt:*

$$\int_1^\infty f(x) \cdot dx \quad \textit{existiert} \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{n=1}^\infty f(n) \quad \textit{konvergent.}$$

Dieser Satz wird anhand des folgenden Beispiels erklärt:

Beispiel 1.57 *Man betrachte die unendliche Reihe* $\sum\limits_{n\ge 1} \frac{1}{n^2}$*, die ja bekanntlich konvergiert, und zwar zum Wert* $\frac{\pi^2}{6}(\approx 1,64)$.
Die Reihe kann zunächst von oben abgeschätzt werden:

$$\sum_{n\ge 1} \frac{1}{n^2} \le \underbrace{1 + \underbrace{\int_1^\infty \frac{1}{x^2} \cdot dx}_{-\frac{1}{x}\big|_1^\infty}}_{=2}$$

In ähnlicher Weise bekommt man eine untere Abschätzung:

$$\sum_{n\ge 1} \frac{1}{n^2} \ge \int_1^\infty \frac{1}{x^2} = 1.$$

Also erhält man $1 \le \sum\limits_{n\ge 1} \frac{1}{n^2} \le 2$.

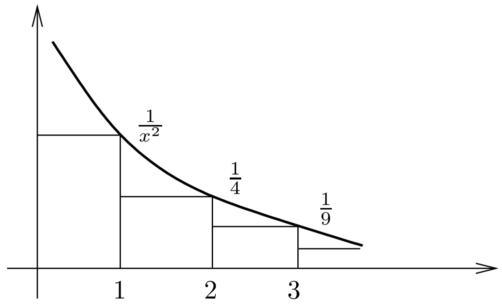

Abbildung 1.39: Darstellung der Reihe $\sum \frac{1}{x^2}$

Mehrdimensionale Integrale, Bereichsintegrale:

Ähnlich wie bei *eindimensionalen* Integralen, gibt es auch bei mehrdimensionalen Integralen bzw. bei Bereichsintegralen eine geometrische Interpretation. Das Integral

$$\iint\limits_B f(x,y)\,dx\,dy$$

über einen Bereich $B \subseteq \mathbb{R}^2$ ist das Volumen zwischen der x-y-Ebene und dem Graphen von f:

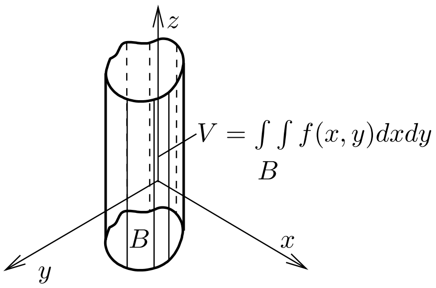

Abbildung 1.40: Integral über einen Bereich

Ist der Bereich B ein Rechteck, so kann dieses Volumen *scheibchenweise* berechnet werden.[3]

Beispiel 1.58 $B = [\,1,2\,] \times [\,0,3\,]$, $f(x,y) = x^2y + x$:

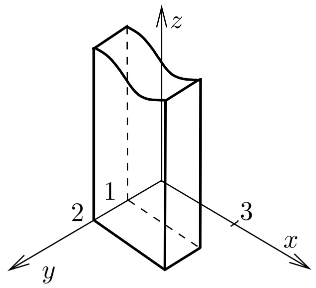

Abbildung 1.41: Integral über einen Bereich (zu Beispiel 1.58)

$$\iint\limits_B (x^2y+x)\cdot dx \cdot dy \quad = \quad \int_0^3 \underbrace{\left(\int_1^2 (x^2y+x)dx\right)}_{\text{Scheibchen}} dy = \int_0^3 \left(\frac{x^3}{3}y + \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^2 dy$$

[3]Dies entspricht der Anschauung, erfordert aber eine genaue mathematische Grundlegung, die hier nicht ausgeführt wird.

$$= \int_0^3 \left(\frac{7y}{3} + \frac{3}{2}\right) dy = \left(\frac{7y^2}{6} + \frac{3y}{2}\right)\Bigg|_0^3 = \frac{63}{6} + \frac{9}{2} = \frac{90}{6} = 15$$

Das *scheibchenweise* Berechnen einens Bereichsintegrals, das zu einer Nacheinanderausführung von zwei eindimensionalen Integralen fürht, ist der Satz von Fubini:

Satz 1.41 ***Satz von Fubini:*** *Sei B von der Form*

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y), \quad c \le y \le d\}$$

mit zwei stetigen Funktioen $\psi_1(y) \le \psi_2(y)$. Dann gilt

$$\iint\limits_B f(x, y) \cdot dx \cdot dy = \int\limits_c^d \left(\int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) \cdot dx \right) dy$$

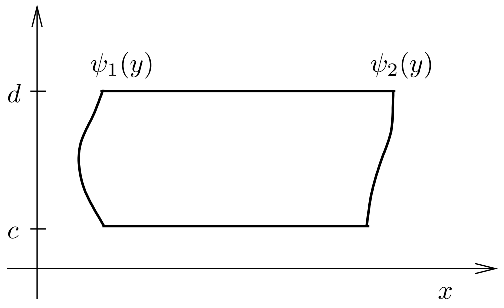

Abbildung 1.42: Bereich B im Satz von Fubini

Substitution:

Die Substitutionsregel des eindimensionalen Integrals kann auch so geschrieben werden:

$$\int\limits_{\varphi([a,b])} f(u) \cdot du = \int\limits_{[a,b]} f(\varphi(x)) \big|\varphi'(x)\big| \cdot dx,$$

wobei der Betrag $\big|\varphi'(x)\big|$ verwendet wird, um monoton fallende und monoton wachsende Funktionen $\varphi(x)$ gleichzeitig betrachten zu können.
Für Bereichsintegrale besteht eine ähnliche Formel:

Satz 1.42 *Sei $B \subseteq \mathbb{R}$ ein Bereich und*

$$B' = \{\ (\varphi(x, y), \psi(x, y)) \ \ | \ \ (x, y) \in B\ \}$$

für zwei (stetig differenzierbare) Funktionen $\varphi(x, y)$ und $\psi(x, y)$. Dann gilt:

$$\iint\limits_{B'} f(u, v) \cdot du \cdot dv = \iint\limits_B f(\varphi(x, y), \psi(x, y)) \cdot \left\| \begin{array}{cc} \varphi_x(x, y) & \varphi_y(x, y) \\ \psi_x(x, y) & \psi_y(x, y) \end{array} \right\| \cdot dx \cdot dy.$$

Man beachte,

$$\left\| \begin{array}{cc} \varphi_x(x, y) & \varphi_y(x, y) \\ \psi_x(x, y) & \psi_y(x, y) \end{array} \right\|$$

ist der Betrag der der Funktionaldeterminante[4] der Abbildung $(x, y) \mapsto (\varphi(x, y), \psi(x, y))$.

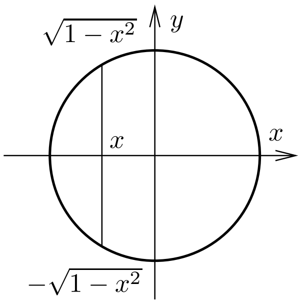

Abbildung 1.43: Integration über eine Kreisfläche

Beispiel 1.59 Die Fläche der Kreises $\{(x,y) : x^2+y^2 \le 1\}$ kann direkt durch

$$\underbrace{\int\int}_{x^2+y^2\le 1} 1 \cdot dx \cdot dy = \int\limits_{-1}^{1} 2\sqrt{1-x^2} \cdot dx = \pi$$

berechnet werden.
Verwendet man die Substitution

$$\begin{array}{ll} x = r \cdot \cos\varphi & 0 \le r \le 1 \\ y = r \cdot \sin\varphi & 0 \le \varphi \le 2\pi \end{array},$$

so transformiert sich die Kreisscheibe in ein Rechteck und man kann noch einfacher integrieren:

$$\begin{aligned} \underbrace{\int\int}_{x^2+y^2\le 1} 1 \cdot dx \cdot dy &= \int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} \Bigg| \underbrace{\begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix}}_{r\cdot(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)=r} \Bigg| \cdot dx \cdot dy \\ &= \int_0^1 r \cdot dr \cdot \int_0^{2\pi} dy \\ &= \frac{r^2}{2}\bigg|_0^1 \cdot 2\pi = \frac{1}{2} \cdot 2\pi = \pi. \end{aligned}$$

Beispiel 1.60 Das Integral

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot dx = \sqrt{2\pi}$$

kann nicht direkt berechnet werden, da die Funktion $e^{-x^2/x}$ keine elementare Stammfunktion hat.
Mit Hilfe der Substitutionsregel für Bereichsintegrale gelingt aber eine Berechung:

$$\begin{aligned} I \cdot I &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot dx \\ &= \underbrace{\int\int}_{\mathbb{R}^2} e^{\frac{-x^2+y^2}{2}} \cdot dx \cdot dy = \int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{2\pi} e^{\frac{-y^2}{2}} \cdot r \cdot dr \cdot d\varphi \\ &= \underbrace{\int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} \cdot r \cdot dr}_{\int_0^{\infty} e^{-t}\, dt=1} \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{=2\pi} = 2\pi. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich $I = \sqrt{2\pi}$.

[4]Die Funktionaldeterminante ist die Determinante der Funktionalmatrix (= Jacobimatrix).

Hier wurde wieder die Substitution

$$x = r \cdot \cos\varphi \qquad\qquad \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r, \quad x^2 + y^2 = r$$
$$y = r \cdot \sin\varphi$$

verwendet.
Die normierte Funktion

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

ist übrigens die *Dichte* der Normalverteilung (Gauss'sche Glockenkurve) und deren Stammfuntion

$$\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot dx$$

die *Verteilungsfunktion der Normalverteilung.*

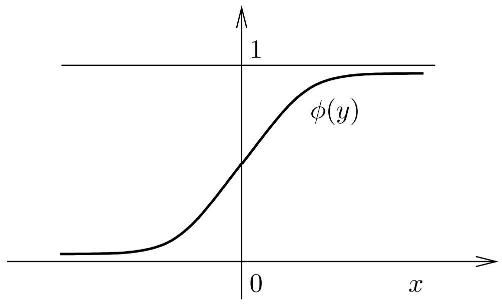

Abbildung 1.44: Verteilungsfunktion der Normalverteilung

Kurvenintegrale:

Definition 1.9 *Eine* **Kurve** *ist eine stetige Abbildung* $\mathbf{c}: \ [\,0,1\,] \longrightarrow \mathbb{R}^n$. *Die Variable t bezeichnet man als Parameter.*

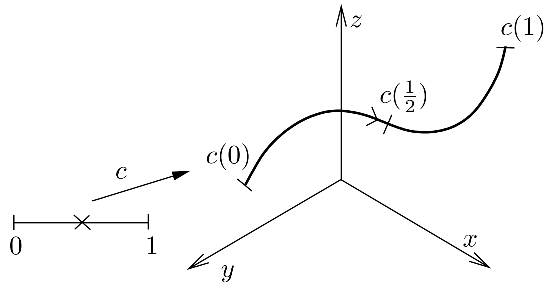

Abbildung 1.45: Kurve im $\mathbb{R}^3$

Länge einer Kurve:

Um die Länge (oder Bogenlänge) einer Kurve $\mathbf{c} : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ zu bestimmen, untereilt man das Intervall $[0,1]$ in Teilintervalle $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = 1$ und bildet die Summe der Längen $|\mathbf{c}(t_i) - \mathbf{c}(t_{i-1})|$.
Existiert der Grenzwert dieser Summen

$$\sum_{i=1}^{n} |\mathbf{c}(t_i) - \mathbf{c}(t_{i-1})|$$

bei immer feiner werdernder Teilung, dann ist der Grenzwert (definitionsgemäß) die Länge der Kurve:

$$l := \lim \sum_{i=1}^{n} |\mathbf{c}(t_i) - \mathbf{c}(t_{i-1})|.$$

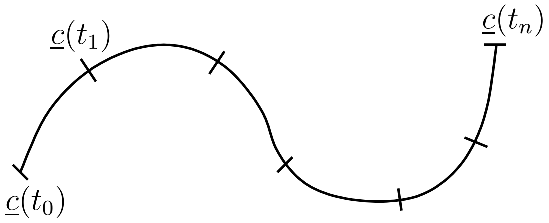

Abbildung 1.46: Unterteilung einer Kurve in Teilstücke

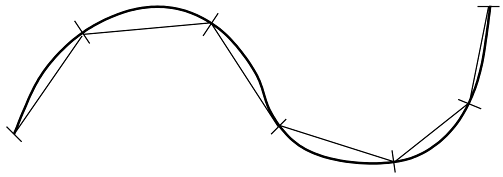

Abbildung 1.47: Approximation einer Kurve durch Geradenstücke.

Nimmt man an, daß die Kurve stetig differenzierbar ist, so folgt aus dem Zwischenwertsatz der Differentialrechnung

$$|\mathbf{c}(t_i) - \mathbf{c}(t_{i-1})| = \left| \begin{pmatrix} c_1(t_i) - c_1(t_{i-1}) \\ c_2(t_i) - c_2(t_{i-1}) \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} c_1'(\xi_i) \cdot (t_i - t_{i-1}) \\ c_2'(\eta_i) \cdot (t_i - t_{i-1}) \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} c_1'(\xi_i) \\ c_2'(\eta_i) \end{pmatrix} \right| \cdot (t_i - t_{i-1})$$

für geeignete Zwischenwerte ξ_i, η_i. Die Summe

$$\sum_{i=1}^{n} \left| \begin{pmatrix} c_1'(\xi_i) \\ c_2'(\eta_i) \end{pmatrix} \right| \cdot (t_i - t_{i-1})$$

ist dann eine Riemannsche Zwischensumme des Integrals $\int_0^1 |\mathbf{c}'(t)| \cdot dt$. Dadurch kann die Länge l der Kurve $\mathbf{c} : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ durch das Integral

$$l = \int_0^1 |\mathbf{c}'(t)| \cdot dt$$

berechnet werden.

Beispiel 1.61 Man betrachte einen Teil der Kreislinie

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \qquad 0 \le t \le \varphi.$$

Die Länge diese Bogen berechnet sich zu

$$l_\varphi = \int_0^1 \underbrace{\left| \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \right|}_{=1} \cdot dt = \varphi.$$

Dies ist die eigentliche Begründung der Winkelmessung.

Vektorfeld:

Ein Vektorfeld ist eine Abbildung $\mathbf{u} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$:

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} u_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ u_n(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix}.$$

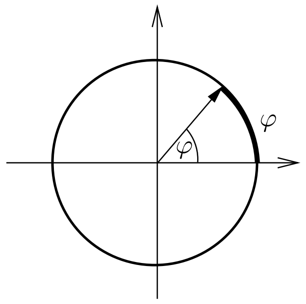

Abbildung 1.48: Die Bogenlänge eines Kreissegments ist gleich ihrem Winkel

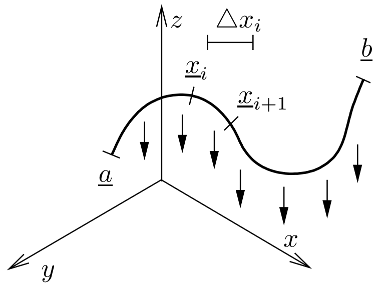

Abbildung 1.49: Darstellung eines Vektorfeldes

Definition 1.10 *Sei* $\mathbf{c} : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ *eine (stetig differenzierbare) Kurve und* $\mathbf{u} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *ein (stetig differenzierbares) Vektorfeld. Dann ist das* **Kurvenintegral** *folgendermaßen definiert:*

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{c}} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} &:= \int_0^1 \mathbf{u}(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t)\, dt \\ &= \int_0^1 (u_1(\mathbf{c}(t)) \cdot c_1'(t)) + \ldots + u_n(\mathbf{c}(t)) \cdot c_n'(t)))\, dt \end{aligned}$$

Man beachte, daß das Kurvenintegral nur von der Kurve $\mathbf{c}([0,1])$ und nicht von der Parametrisierung abhängt. Dies folgt aus der Substitutionsregel.
Interpretiert man $\mathbf{u}$ als Kraftfeld, und $\mathbf{u}(x) \cdot \Delta\mathbf{x}$ als jene Arbeit, die auf einem kleinen Wegstück $\Delta\mathbf{x}$ im Kraftfeld $\mathbf{u}$ geleistet wird ($\cdot$ ist dabei das gewöhnliche Skalarprodukt), so ist das Kurvenintegral $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}$ nichts anderes als die Arbeit die entlang der Kurve $\mathbf{c}(t)$ zwischen den Punkten $\mathbf{c}(0)$ und $\mathbf{c}(1)$ geleistet wird.

Beispiel 1.62 Für ein zweidimensionales Feld $\mathbf{u} = \binom{P}{Q}$ schreibt man für $\int \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}$ auch einfach $\int P(x,y) \cdot dx + Q(x,y) \cdot dy$.

Beispiel 1.63 Sei

$$\mathbf{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ y^2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le 1.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{c}} u(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} &= \int_0^1 (u_1(\mathbf{c}(t)) \cdot c_1'(t) + u_2(\mathbf{c}(t)) \cdot c_2'(t))\, dt \\ &= \int_0^1 ((t^2 - t) \cdot 2t + t^2 \cdot 1) \cdot dt = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Definition 1.11 *Das Kurvenintegral* $\int \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}$ *über ein Vektorfeld* $\mathbf{u} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *heißt* **wegunabhängig**, *wenn für alle Kurven* $\mathbf{c} : [0,1] \to \mathbb{R}^n$, $\mathbf{d} : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ *mit gleichem Anfangs- und*

Endpunkten $\mathbf{c}(0) = \mathbf{d}(0)$, $\mathbf{c}(1) = \mathbf{d}(1)$ *immer*

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \int_{\mathbf{d}} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}$$

gilt, d.h. das Kurvenintegral hängt nur vom Anfangs- und Endpunkt der Kurve, aber nicht vom Verlauf ab.

Satz 1.43 *(Wegunabhängigkeit) Sei* $\mathbf{u} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *ein Vektorfeld. Dann gilt:*

$$\int \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} \text{ ist wegunabhängig} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad \textit{mit} \quad \mathbf{u} = \ \mathrm{grad}\, F = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_n} \end{pmatrix}$$

In diesem Fall ist

$$\int_{\mathbf{a} \to \mathbf{b}} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = F(\mathbf{b}) - F(\mathbf{a}).$$

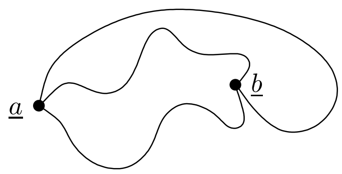

Abbildung 1.50: Wegunabhängigkeit bedeutet gleiche Arbeit trotz unterschiedlichem Weg

Eine Funktion $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $\mathrm{grad}\, F = \mathbf{u}$ wird als **Potential** von $\mathbf{u}$ bezeichnet. Ein Potential kann auch als mehrdimensionales Analogon zur Stammfunktion (bzw. zum unbestimmten Integral) einer Funktion f angesehen werden.

Beweis: Gibt es eine Funktion $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $\mathrm{grad}\, F = \mathbf{u}$, so gilt für jeden Weg $\mathbf{c}$:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{c}} \mathbf{u}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= \int_0^1 u(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t)\, dt \\
&= \int_0^1 \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(\mathbf{c}(t))(c_1'(t)) + \ldots + \frac{\partial F}{\partial x_n}(\mathbf{c}(t))(c_n'(t)) \right) dt \\
&= \int_0^1 F(\mathbf{c}(t))' \\
&= F(\mathbf{c}(1)) - F(\mathbf{c}(0)).
\end{aligned}$$

Ist andererseits das Kurvenintegral wegunabhängig, so kann man eine Funktion

$$F(\mathbf{x}) := \int_{\mathbf{a} \to \mathbf{x}} \mathbf{u}(\mathbf{y}) \cdot d\mathbf{y}$$

definieren und erhält (z.B. durch Betrachtung des Weges $t \mapsto \mathbf{x} + t(1, 0, \ldots, 0)$ parallel zur x_1-Achse)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x_1}(\mathbf{x}) &= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(F\left(\mathbf{x} + t \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right) - F(x) \right) \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \int_0^t u_1(\mathbf{x} + y) \cdot dy = u_1(\mathbf{x}).
\end{aligned}$$

Entsprechendes gilt für die anderen partiellen Ableitungen.

Im folgenden Satz wird die Wegunabhängigkeit (im wesentlichen) auf die sogenannten Integrabilitätsbedingungen $\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$ zurückgeführt. Dabei heißt ein Gebiet *einfach zusammenhängend*, wenn sich jede geschlossene Kurve stetig auf einen Punkt zusammenziehen läßt. Anschaulich bedeutet das, dass das Gebiet keine *Löcher* hat.

Satz 1.44 *(Integrabilitätsbedingungen)*

1. *Its* $\mathbf{u} = \text{ grad } F$*, so folgt* $\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$, $\quad (1 \leq i, j \leq n)$

2. *Gilt* $\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$ $\;(1 \leq i, j \leq n)$ *in in einem einfach zusammenhängenden Gebiet, so gibt es dort ein* F *mit* $\mathbf{u} = \text{ grad } F$.

Beispiel 1.64 Das Vektorfeld $\mathbf{u}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ des Kurvenintegrals

$$\int \left[(2xy^2 + 3) \cdot dx + (2x^2 y - 1) \cdot dy\right]$$

ist durch $P(x, y) = 2xy^2 + 3$ und $Q(x, y) = 2x^2 y - 1$ gegeben.
Die Integrabilitätsbedingungen sind wegen

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 4xy = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

auf ganz $\mathbb{R}^2$ erfüllt. Daher gibt es eine Funktion $F(x, y)$ (ein Potential) mit $\frac{\partial F}{\partial x} = P$ und $\frac{\partial F}{\partial y} = Q$.
Diese kann durch folgende einfache Vorgangsweise ermittelt werden:

$$\begin{array}{lllll}
\frac{\partial F}{\partial x} & = P & = & 2xy^2 + 3 \Longrightarrow & F = 2x^2 y^2 + 3x + c(y) \\
\frac{\partial F}{\partial y} & = Q & & \Longrightarrow & 2x^2 y + c'(y) = 2x^2 y - 1 \\
& & & \Longrightarrow & \mathbf{c}(y) = D \\
& & & \Longrightarrow & F = x^2 y^2 + 3y - y + D.
\end{array}$$

Damit gilt z.B.

$$\int_{(0,0) \to (1,1)} (P \cdot dx + Q \cdot dy) = F(1, 1) - F(0, 0) = 3 - 0 = 3.$$

Beweis:

Aus $u_i = \frac{\partial F}{\partial x_i}$ folgt

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i}.$$

Sind umgekehrt die Integrabilitätsbedingungen erfüllte, so kann entweder mit Hilfe des Verfahrens des obigen Beispiels ein Potential $F(\mathbf{x})$ ermittelt werden oder man verwendet den folgenden Satz von Green.

Satz 1.45 ***Satz von Green***
Ist $B \subseteq \mathbb{R}^2$ *ein einfach zusammenhängendes Gebiet und der Rand* ∂B *ist eine geschlossene Kurve (im mathematisch positiven Sinn orientiert), dann gilt*

$$\int_{\partial B} (P \cdot dy + Q \cdot dy) = \int_B \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) \cdot dx \cdot dy.$$

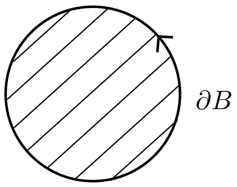

Abbildung 1.51: ∂B ...Randkurve im mathematisch positiven Sinn

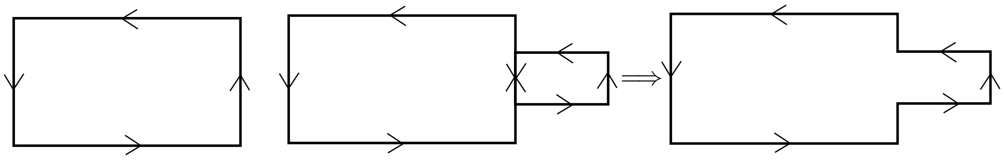

Abbildung 1.52: Integrale über Vektorfelder

Der Satz von Green kann für achsenparallele Rechtecke direkt nachgerechnet werden. Damit gilt der Satz auch für endliche Vereinigungen von achsenparallelen Rechtecken (siehe Abbildung 1.52). Allgemeine Bereiche B können dann durch Approximation behandelt werden.
Eine Folgerung des Satzes von Green ist die Eigenschaft, dass aus die Integratibilitätsbedingen die Wegunaghängigkeit des Kurvenintegrals und damit die Existenz eines Potentials folgt. Ist nämlich $\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$, so folgt für die geschlossene Kurve ∂B

$$\int (P \cdot dx + Q \cdot dy) = 0,$$

was gleichbedeutend mit der Wegunabhängigkeit ist.

Komplexe Kurvenintegrale:

Definition 1.12 *Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion und $\mathbf{c} : [0,1] \to \mathbb{C}$ eine (stetig differenzierbare) Kurve in $\mathbb{C}$. Dann ist das* **komplexe Kurvenintegral** *durch*

$$\int_{\mathbf{c}} f(z)\, dz := \int_0^1 f(\mathbf{c}(t))\mathbf{c}'(t)\, dt$$

definiiert.

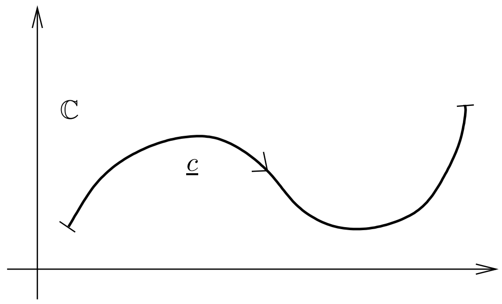

Abbildung 1.53: Darstellung einer Kurve in der komplexen Ebene $\mathbb{C}$

Schreibt man $z = x + iy$ und $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + i \cdot v(x,y)$ so läßt sich das komplexe Kurvenintegral auch durch 2 reelle Kurvenintegrale darstellen:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{c}} f(z) \cdot dz &= \int_{\mathbf{c}} (u + i \cdot v)(dx + i \cdot dy) \\ &= \int_{\mathbf{c}} (u \cdot dx - v \cdot dy) + i \cdot \int_{\mathbf{c}} (v \cdot dx + u \cdot dy). \end{aligned}$$

Beispiel 1.65 Berechnet man das komplexe Kurvenintegral für $f(z) = z^2 = (x + i \cdot y)^2 = \underbrace{x^2 - y^2}_{u} + i \cdot \underbrace{2xy}_{v}$. so erhält man

$$\int f(z) \cdot dz = \int \left[(x^2 - y^2) \cdot dx - 2xy \cdot dy\right] + i \cdot \int \left[2xy \cdot dx + (x^2 - y^2) \cdot dy\right].$$

Wegen $-2y = -2y$ und $2x = 2x$ sind für beide reellen Kurvenintegrale die Integrabilitätsbedingungen erfüllt. Die entsprechenden Potentiale sind

$$U = \frac{x^3}{3} - xy^2 \quad \text{und} \quad V = x^2 y - \frac{y^3}{3}.$$

Damit ist auch das komplexe Kurvenintegral wegunabhängig, und man kann eine komplexe Stammfunktion

$$F(x,y) = U + iV = \frac{x^3}{3} - x^2 y + i \cdot (x^2 y - \frac{y^3}{3}) = \frac{(x+iy)^3}{3} = \frac{z^3}{3}$$

definieren, für die dann

$$\int\limits_{\mathbf{a}\to\mathbf{b}} z^2 \cdot dz = F(b) - F(a) = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}.$$

gilt.

Dieses Beispiel gibt einen ersten Hinweis, dass das komplexe Kurvenintegral als *Fortsetzung* des reellen eindimensionalen Integrals gesehen werden kann. Diese Beobachtung wird im nächsten Kapitel über Komplexe Analysis präzisiert.

Kapitel 2

Komplexe Analysis und Funktionaltransformation

2.1 Potenzreihen:

Taylor'scher Lehrsatz:

Differenzieren bedeutet, dass eine Funktion $f(x)$ lokal um die Stelle x_0 durch die Tangente an ihren Graphen approximiert werden kann:

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{\text{Tangente}} + o(|x - x_0|) \qquad (x \to x_0).$$

Andererseits besagt der Mittelwertsatz der Differentialrechnung:

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0) \qquad (\xi \in (x, x_0)).$$

Das heißt, die 1. Ableitung gibt Information, in welchen Maß die Funktion größer bzw. kleiner wird, wenn man mit x lokal um x_0 variiert. Möchte man aber wissen, ob die Funktion steiler oder weniger steil wird bzw. ob der Funktionsgraph *ober* oder *unter* der Tangente liegt, so benötigt man mehr Information.

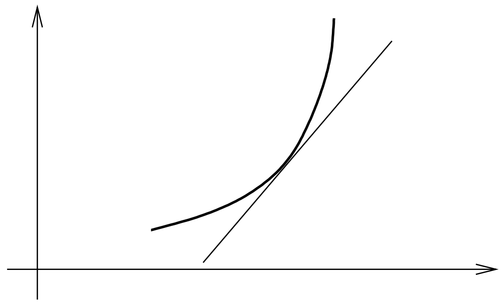

Abbildung 2.1: Taylerreihe nähert eine Funktion mittels Tangenten beliebig genau an

Der Taylorsche Lehrsatz gibt hier eine vollständige Antwort. Mit Hilfe höherer Ableitungen kann einen viel genauere Approximation der Funktion angegeben werden.
Aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und nach partieller Integration folgt:

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= \int_{x_0}^{x} f'(t) \cdot dt \\ &= \int_0^{x-x_0} 1 \cdot f'(x-t) \cdot dt \\ &= t \cdot f'(x-t)\Big|_0^{x-x_0} - \int_0^{x-x_0} t \cdot f''(x-t) \cdot dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (x-x_0)\cdot f'(x_0) + \int_0^{x-x_0} t\cdot f''(x-t)\cdot dt \\ &= f'(x)\cdot(x-x_0) + f''(\xi)\underbrace{\int_0^{x-x_0} t\cdot dt}_{=\frac{x-x_0}{2}}. \end{aligned}$$

Also zusammengefasst gilt für zweimal stetig differenzierbare Funktionen:

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \underbrace{\frac{f''(\xi)}{2}\cdot(x-x_0)^2}_{\int_0^{x-x_0} t\cdot f''(x-t)\cdot dt}}$$

Wendet man partielle Integration immer wieder an, erhält man (unter der Voraussetzung, dass $f(x)$ $(n+1)$-mal stetig differenzierbar ist:

$$\begin{aligned} \int_0^{x-x_0} t\cdot f''(x-t)\cdot dt &= \frac{t^2}{2} f''(x-x_0)\Big|_0^{x-x_0} - \int_0^{x-x_0} \frac{t^2}{2}\cdot f''(x-t)\cdot dt \\ &= \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(f) \end{aligned}$$

mit

$$R_n = \frac{1}{n!}\int_0^{x-x_0} t^n\cdot f^{(n+1)}(x-t)\cdot dt = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\cdot(x-x_0)^{n+1} \qquad (\xi\in(x,x_0)).$$

Also

$$\boxed{f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}_{\text{Taylorsches Näherungspolynom } n\text{-ten Grades}} + \underbrace{R_n(f)}_{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\cdot(x-x_0)^{n+1}}.}$$

Beispiel 2.1 $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$. Hier ist $f^{(k)}(e^x) = e^x$ und daher $f^{(k)}(x_0) = e^0 = 1$.

$$\Longrightarrow e^x = 1 + 1\cdot x + \frac{1}{2!}\cdot x^2 + \ldots + \frac{1}{n!}\cdot x^n + \frac{e^\xi}{(n+1)!}\cdot x^{n+1}.$$

Wegen $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^\xi\cdot x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ folgt auch (die bereits bekannte Exponentialreihe)

$$\boxed{e^x = \sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!}\cdot x^k}$$

Mit Hilfe des Taylorschen Lehrsatzes kann man auch entscheiden, wann eine Funktion lokal durch eine Potenzreihe, ihre Taylorreihe, dargestellt werden kann:

Satz 2.1 *Sei $f(x)$ unendlich oft differenzierbar. Dann gilt*

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\cdot(x-x_0)^k}_{\text{Taylorreihe von } f} \quad\Longleftrightarrow\quad \lim_{n\to\infty} R_n(f) = 0.$$

Ganz analog zu Funktionen in einer Variablen kann man auch Funktionen in mehreren Veränderlichen *lokal entwickeln*:

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= \underbrace{f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)}_{\text{Tangentialebene an den Graphen von } f} \\
&+ \frac{1}{2!}\cdot\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)^2 + 2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)\cdot(y-y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)^2\right] \\
&+ \frac{1}{3!}\left[\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)^3 + 3\cdot\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)^2\cdot(y-y_0)\right. \\
&+ \left. 3\cdot\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)\cdot(y-y_0)^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)^3\right] \\
&+ \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\partial^{(n)} f}{\partial x^{n-k}\partial y^k}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)^{n-k}\cdot(y-y_0)^k + R_n(f)
\end{aligned}
$$

mit

$$R_n(f) = \frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\frac{\partial^{(n+1)} f}{\partial x^{n+1-k}\partial y^k}(\xi,\eta)\cdot(x-x_0)^{n+1-k}\cdot(y-y_0)^k,$$

wobei $\xi \in (x_0, x)$ und $\eta \in (y_0, y)$ gewisse Zwischenwerte sind.
Wieder erhält man ein *Taylorsches Näherungspolynom* n-ten Grades + ein Fehler $R_n(f)$.
Der Nachweis dieser Formel erfolgt mit Hilfe der *Ersatzfunktion:* $g(t) = f(x_0 + t\cdot(x-x_0), y_0 + t\cdot(y-y_0))$. Man wendet für $g(t)$ die eindimensionale Taylorsche Näherungsformel für $g(1)$ an.

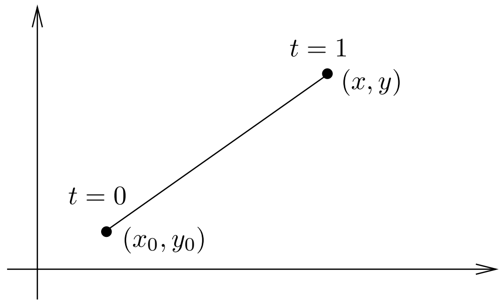

Abbildung 2.2: Vereinfachung mittels Ersatzfunktion g(t)

Man beachte: $g(0) = f(x_0, y_0)$ und $g(1) = f(x, y)$, also:

$$\underbrace{g(1)}_{f(x,y)} = \underbrace{g(0)}_{f(x_0,y_0)} + \underbrace{g'(0)\cdot 1}_{=?} + \underbrace{\frac{g''(0)}{2!}\cdot 1^2}_{=?} + \ldots + \underbrace{\frac{g^{(n)}(0)}{n!}\cdot 1^n}_{=?} + \frac{g^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\cdot 1^{n+1}.$$

Wegen

$$
\begin{aligned}
g'(t) &= f_x(\cdot)\cdot(x-x_0) + f_y(\cdot)\cdot(y-y_0) \\
g''(t) &= f_{xx}(\cdot)\cdot(x-x_0)^2 + f_{xy}(\cdot)\cdot(x-x_0)\cdot(y-y_0) + f_{yx}(\cdot)\cdot(y-y_0)\cdot(x-x_0) + f_{yy}(\cdot)\cdot(y-y_0)^2 \\
&\vdots \\
g^{(n)}(t) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot\frac{\partial^{(n)} f(x_0+t\cdot(x-x_0), y_0+t\cdot(y-y_0))}{\partial x^{n-k}\partial y^k}\cdot(x-x_0)^{n-k}\cdot(y-y_0)^k \\
g^{(n)}(0) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f_{x^k y^{n-k}}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)^k\cdot(y-y_0)^{n-k}
\end{aligned}
$$

erhält man direkt die obige Formel.

Bemerkenswert ist auch das Taylorsche Näherungspolynom 2. Grades:

$$f(x_0,y_0) + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}}_{\text{Funktionalmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2!} \cdot (x - x_0 \;\; y - y_0) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}}_{\text{Hessematrix}} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

Dies Darstellung hilft zur Bestimmung des Charakters eines lokalen Extremums. Ist nämlich

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0,$$

so entscheidet der durch die Hessematrix bestimmt quadratische Term das lokale Verhalten der Funktion.

Es gilt:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{positiv} \\ \text{(negativ)} \end{matrix} \text{ definit} \Longrightarrow (x_0,y_0) \text{ lokales} \begin{matrix} \text{Minimum} \\ \text{(Maximum).} \end{matrix}$$

Zur Erinnerung: Einer quadratische, symmetrische Matrix H heißt *positiv definit*, wenn für alle Vektoren $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$

$$\mathbf{x}^T H \mathbf{x} > 0$$

gilt. Nach dem *Hauptminorenkriterium* ist eine Matrix $H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}$ genau dann positiv definit, wenn

$$h_{11} > 0 \quad \text{und} \quad |H| = h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21} > 0.$$

Eine Matrix H ist *negativ definit*, wenn $-H$ positiv definit ist, also genau dann, wenn

$$h_{11} < 0 \quad \text{und} \quad |H| = h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21} > 0.$$

Potenzreihen:

Reelle Potenzreihen sind Reihen der Form

$$\sum_{n \geq 0} a_n \cdot (x - x_0)^n \quad \text{mit} \quad a_n \in \mathbb{R} \quad x, x_0 \in \mathbb{R}.$$

Entsprechend sind komplexe Potenzreihen

$$\sum_{n \geq 0} a_n \cdot (z - z_0)^n \quad \text{mit} \quad a_n \in \mathbb{C} \quad z, z_0 \in \mathbb{C}.$$

Reelle Potenzreihen sind also Spezialfälle von komplexen. Im folgenden werden daher meist komplexe Potenzreihen betrachtet.

Satz 2.2 *Sei $a_n \in \mathbb{C}$ und*

$$R := \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}} \in [\,0, \infty\,]$$

Dann gilt:

1. $|z - z_0| < R \quad \Longrightarrow \quad f(z) = \sum a_n (z - z_0)^n$ *absolut konvergent.*
2. $|z - z_0| > R \quad \Longrightarrow \quad f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$ *divergent.*
3. $0 < r < R \quad \Longrightarrow f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n \; \underbrace{\textit{gleichmäßig konvergent für}}_{\textit{(Reihenrest gleichmäßig klein)}} \; |z - z_0| \leq r$

R wird auch **Konvergenzradius** genannt.

Beweis:

Wegen
$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n \cdot (z-z_0)|} = |z-z_0| \cdot \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|z-z_0|}{R}.$$
folgen die ersten beiden Punkte aus dem Wurzelkriterium.
Ist nun $0 < r < R$, so gilt ist $\sum_{n\geq 0} |a_n| r^n$ konvergent und es gilt für alle z mit $|z-z_0| \leq r$:

$$\begin{aligned} \left| f(z) - \sum_{n\leq N} a_n \cdot (z-z_0)^n \right| &= \left| \sum_{n>N} a_n \cdot (z-z_0)^n \right| \\ &\leq \sum_{n>N} |a_n| r^n. \end{aligned}$$

Also ist die Potenzreihe gleichmäßig konvergent.

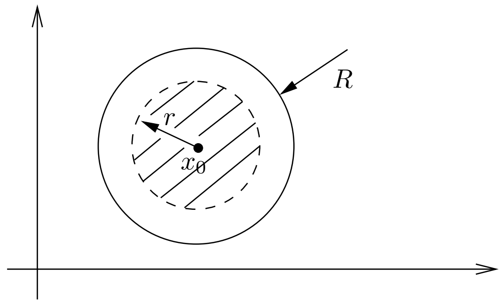

Abbildung 2.3: Konvergenzradius einer Reihe

Beispiel 2.2 $f(z) = \sum\limits_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$ $\quad z_0 = 0; \quad a_n = \frac{1}{n!}, \quad R = \infty$
$= e^z, \quad (z \in \mathbb{C})$

Beispiel 2.3 $f(z) = \sum\limits_{n\geq 0} z^n, \quad z_0 = 0, \quad a_n = 1, \quad R = 1$
$= \frac{1}{1-z}, \quad (|z| < 1)$

Beispiel 2.4 $f(z) = \sum\limits_{n\geq 1} \frac{z^n}{n}, \quad z_0 = 0, \quad a_n = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ \frac{1}{n} & n > 0 \end{cases}$
$= \log \frac{1}{1-z}, \quad (|z| < 1) \quad R = 1$

Wir haben im Satz 1.20 bereits nachgewiesen, dass komplexe Potenzreihen $f(z) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n (z-z_0)^n$ innerhalb des Konvergenzkreises $|z-z_0| < R$ komplex differenzierbar sind, also der komplexe Differentialkoeffizient existiert und es gilt:
$$f'(z) := \lim_{w\to z} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} = \sum_{n\geq 1} a_n \cdot n \cdot (z-z_0)^{n-1}.$$

Die differenzierte Potenzreihe $f'(z)$ entsteht also durch *gliedweises Differenzieren* der Potenzen $[(z-z_0)^n]' = n(z-z_0)^{n-1}$.
Wegen $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ haben $f(z)$ und $f'(z)$ denselben Konvergenzradius, es entstehen also keine Konvergenzprobleme.

Insbesonder sind reelle Potenzreihen auch im üblichen Sinn differenzierbar und die Ableitungsfunktion ist wieder eine Potenzreihe.

Betrachtet man z.B. die Potenzreihe $f(x) = \sum\limits_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}$, so folgt durch Differnzieren

$$'f(x) = \sum_{n\geq 1} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}.$$

Daraus ergibt sich nun umgekehrt wieder

$$\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n} = \log \frac{1}{1-x}.$$

Dies begründet übrigens das obige Beispiel, in dem allerdings der Logarithmus auch für komplexe Zahlen gebildet wird.

Satz 2.3 ***Identitätssatz für Potenzreihen:***
Ist $f(z) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n \cdot (z-z_0)^n$ eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius $R > 0$. Dann sind die Koeffizienten a_n durch $f(z)$ eindeutig bestimmt. Es gilt

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

Beweis:

Die k-te Ableitung von $f(z) = \sum\limits_{n\geq 0} a_0 \cdot (z-z_0)^n$ ist durch

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n\geq k} a_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \cdot (z-z_0)^{n-k}$$

gegeben, also

$$\begin{array}{llllllll}
f(z) = & a_0 & + & a_1(z-z_0) & + & a_2(z-z_0)^2 & + & \ldots \\
f'(z) = & & & a_1 & + & 2a_2(z-z_0) & + & 3a_3(z-z_0)^2 + \ldots \\
f''(z) = & & & & & 2a_2 & + & 6a_3(z-z_0) + \ldots
\end{array}$$

Insbesondere erhält man

$$f^{(k)}(z_0) = a_k \cdot k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = a_k \cdot k!.$$

Eine Potenzreihe ist daher die Taylorreihe der Funktion, die sie darstellt.

Operationen für Potenzreihen:

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n \cdot (z-z_0)^n, \qquad g(z) = \sum_{n\geq 0} b_n \cdot (z-z_0)^n$$

1. $f(z) \pm g(z) = \sum\limits_{n\geq 0} (a_n \pm b_n) \cdot (z-z_n)^n$
2. $f(z) \cdot g(z) = \sum\limits_{n\geq 0} \left(\sum\limits_{k=0}^{n} a_n \cdot b_{n-k} \right) \cdot (z-z_0)^n$
3. $c(w) = \sum_{k\geq 0} c_k \cdot w^k$ konvergente Potenzreihe für $|w| < R_c$.
   $c(f(z)) = c_0 + c_1 \cdot f(z) + c_2 \cdot f(z)^2 + \ldots \qquad |f(z)| < R_c$

4. $a_0 \neq 0$ und $|1 - \frac{f(z)}{a_0}| < 1$:

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{a_0 + (f(z) - a_0)} = \frac{1}{a_0 \cdot \left(1 - \left(1 - \frac{f(z)}{a_0}\right)\right)} = a_0 \cdot \sum_{n \geq 0} \left(1 - \frac{f(z)}{a_0}\right)^n.$$

5. $\displaystyle\int f(z) \cdot dz = \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n+1} \cdot (z - z_0)^{n+1} + C$

Beispiel 2.5 Binomsche Reihe:

Sei $\alpha \in \mathbb{C}$. Dann ist wegen der obigen Eigenschaften die Funktion $f(z) = (1+z)^\alpha = e^{\alpha \cdot \log(1+z)}$ für $|z| < 1$ als Potenzreihe darstellbar.
Wegen $f^{(n)}(z) = \alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot (\alpha - 2) \cdot \ldots \cdot (\alpha - n + 1) \cdot (1+z)^{\alpha - n}$ ist der n-te Koeffzient durch

$$a_n = \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha - n + 1)}{n!} = \binom{\alpha}{n}$$

der allgemeine Binomialkoeffizient und man erhält für $|z| < 1$ die *binomischer Reihe*

$$(1+z)^\alpha = \sum_{n \geq 0} \binom{\alpha}{n} z^n.$$

Beispiel 2.6

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 \pm \ldots \quad \Longrightarrow \quad \ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} \pm \ldots \qquad |z| < 1$$

Beispiel 2.7

$$\frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - z^6 \pm \ldots \quad \Longrightarrow \quad \arctan(z) = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} \pm \ldots \qquad |z| < 1$$

Satz 2.4 ***Abelscher Grenzwertsatz:***
Sei $a_n \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n \cdot x^n$ für $|x| < R$ und es konvergiert die Reihe $\sum_{n \geq 0} a_n \cdot R^n$. Dann gilt

$$\lim_{x \to R-} f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n \cdot R^n.$$

Beispiel 2.8

$\arctan(1) = \dfrac{\pi}{4} \Longrightarrow 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + \ldots = \dfrac{\pi}{4} = \displaystyle\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$

$\ln(1+1) = \ln 2 \Longrightarrow 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5} \pm \ldots = \ln 2$

2.2 Komplexe Analysis:

Definition 2.1

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet (also offen und zusammenhängend). Dann heißt eine Funktion $f: G \longrightarrow \mathbb{C}$ **komplex differenzierbar***, wenn*

$$\forall\, z \in G: \quad \exists \lim_{w \to z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} =: f'(z).$$

Synonym spricht man auch von einer **analytischen** *bzw.* **holomorphen** *Funktion.*

Beispiel 2.9 Jede Potenzreihe $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$ ist für $|z - z_0| < R$ komplex differenzierbar.

Bemerkung: Alle Differentiationsregeln (Produkt-, Quotienten-, Kettenregel etc.) gelten auch für komplex differenzierbare Funktionen.

Satz 2.5 *Sei $f: G \longrightarrow \mathbb{C}$ komplex differzierbar (und G einfach zusammenhängend). Dann ist das komplexe Kurvenintegral*

$$\int_\gamma f(z) \cdot dz$$

wegunabhängig.

Beweis:

Setzt man $z := x + i \cdot y$ und

$$f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y),$$

so ist

$$\int_\gamma f(z) \cdot dz = \int_\gamma (u \cdot dx - v \cdot dy) + i \cdot \int_\gamma (v \cdot dx + u \cdot dy).$$

Die beiden Kurvenintegrale sind genau dann wegunabhängig, wenn die die (sogenannten) Cauchy-Riemannsche-Gleichungen

$$\begin{aligned} u_y &= -v_x, \\ v_y &= u_x, \end{aligned}$$

gelten. Wir müssen also nur nachweisen, dass für komplex differenzierbare Funktionen die Cauchy-Riemannsche-Gleichungen erfüllt sind.
Wir berechnen nun $f'(z)$ auf 2 Arten. Zuerst lassen wir y konstant und betrachten den Grenzübergang $\overline{x} \to x$:

$$f'(z) = \lim_{\overline{x} \to x} \frac{u(x + i \cdot y) + i \cdot v(x + i \cdot y) - u(\overline{x} + i \cdot y) - i \cdot v(\overline{x} + i \cdot y)}{\overline{x} - x} = u_x + i \cdot v_x.$$

Danach lassen wir x konstant und betrachten den Grenzübergang $\overline{y} \to y$:

$$f'(z) = \lim_{\overline{y} \to y} \frac{u(x + i \cdot y) + i \cdot v(x + i \cdot y) - u(x + i \cdot \overline{y}) - i \cdot v(x + i \cdot \overline{y})}{i(\overline{y} - y)} = \frac{1}{i} u_y + v_y.$$

Also muss $u_x = v_y$ und $v_x = -u_y$ gelten. Damit ist alles gezeigt.

Der nächste Satz ist eine komplexe Entsprechung des Haupsatzes der Differential- und Integralrechnung.

Satz 2.6 *Sei $f: G \to$ komplex differenzierbar und G einfach zusammenhängend. Dann ist die Funktion*

$$F(z) := \int_{z_0}^{z} f(w) \cdot dw$$

komplex differenzierbar und es gilt

$$F'(z) = f(z).$$

Beweis:

Es gilt $F(w) - F(z) = \int_z^w f(t) \cdot dt$. Wegen $f(t) = f(z) + o(1)$ (für $t \to z$) erhält man (für $w \to z$)

$$\begin{aligned} \frac{F(x) - F(z)}{w - z} &= \frac{1}{w - z} \int_z^w (f(z) + o(1)) \cdot dt \\ &= \frac{1}{w - z} \cdot f(z) \cdot \underbrace{\int_z^w 1 \cdot dt}_{(w-z)} + o\,(1) \\ &= f(z) + o(1) \end{aligned}$$

und somit $F'(z) = f(z)$.

Definition 2.2 *Zwei Kurven γ_1, γ_2 heißen* **homotop**, *wenn es eine stetige Funktion $H : [0,1] \times [0,1] \to G$ mit*

$$H(0,t) = \gamma_1(t) \quad \textit{und} \quad H(1,t) = \gamma_2(t)$$

gibt.

Anschaulich bedeutet das, dass man die Kurve γ_1 stetig in die Kurve γ_2 überführen kann, ohne das Gebiet G zu verlassen.

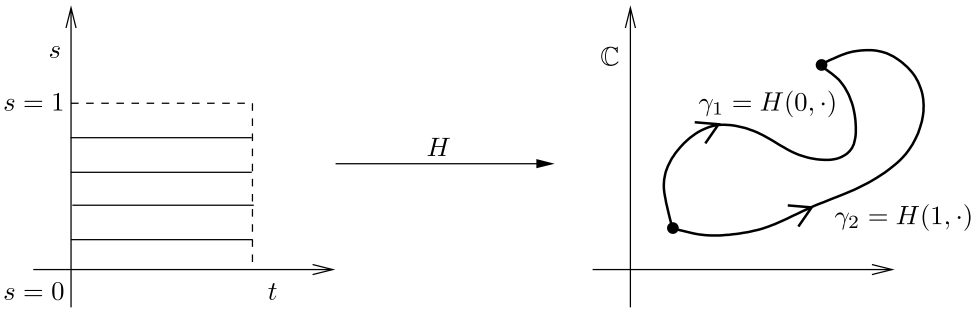

Abbildung 2.4: Homotope Kurven

Mit dieser Begriffsbildung folgt aus der Wegunhabhängigkeit direkt der folgende Satz.

Satz 2.7 *Sei $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ komplex differnzierbar und seinen γ_1, γ_2 homotop mit denselben Anfangspunkten und denselben Endpunkten (d.h. $H(s,0) = a$ und $H(s,1) = b$ für $0 \leq s \leq 1$). Dann gilt*

$$\int_{\gamma_1} f(z) \cdot dz = \int_{\gamma_2} f(z) \cdot dz$$

Ein entsprechender Satz gilt für zwei geschlossene Kurven.

Satz 2.8 *Sei $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ komplex differnzierbar und seinen γ_1, γ_2 geschlossene Kurven, die in G homotop sind, dann gilt*

$$\int_{\gamma_1} f(z) \cdot dz = \int_{\gamma_2} f(z) \cdot dz$$

Dieser Satz kann wieder auf die Wegunabhängigkeit zurückgeführt werden bzw. auf einen geschlossenen Integrationsweg in G.
Ist z.B. $G = \mathbb{C} \backslash \{0\}$, so führt man zwei Hilfverbindungen zwischen γ_1 und γ_2 ein, die sich gegenseitig im Integral aufheben (siehe Abbildung 2.5).

Der nächste Satz gibt zwei wichtige äquivalente Bedingungen zur komplexen Differenzierbarkeit an.

Satz 2.9 *Sei G ein Gebiet und $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$. Dann sind die folgenden drei Bedingungen äquivalent:*

(1) f ist komplex (stetig) differenzierbar in G.

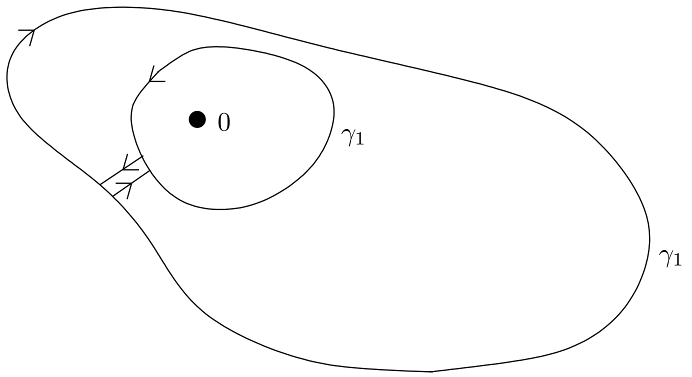

Abbildung 2.5: Hilfverbindungen zwischen zwei homotopen, geschlossenen Kurven

(2) *Für jede (in G) geschlossene Kurve γ, die den Punkt $z_0 \in G$ genau einmal gegen den Uhrzeigersinn umläuft (siehe Abbildung 2.6) gilt:*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} \cdot dz$$

(3) *f lässt sich um jeden Punkt $z_0 \in G$ in eine Potenzreihe entwicken:*

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n \cdot (z - z_0)^n \qquad (|z - z_0| < R),$$

wobei $R > 0$ so gewählt werden kann, dass der Kreis $|z - z_0| < R$ ganz in G liegt. Weiters gilt

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}.$$

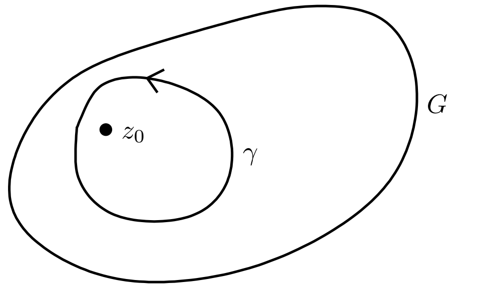

Abbildung 2.6: Geschlossene Kurve um z_0

Bemerkung: Die Implikation (3) $\Longrightarrow$ (1) wurde bereits gezeigt. Jede Potenzreihe ist komplex differenzierbar. Daher muss nur noch (1) $\Longrightarrow$ (2) und (2) $\Longrightarrow$ (3) bewiesen werden.

Beweis:

(1) $\Longrightarrow$ (2): Zunächst beobachtet man, dass

$$I := \int_\gamma \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \cdot dz = 0$$

gilt. Dazu beachte, dass die Zuordnung $z \mapsto \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ für alle $z \neq z_0$ komplex differenzierbar ist. Weiters ist die Funktion $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ in jeder Umgebung von z_0 beschränkt, da der Grenzwert

$(= f'(z_0))$ existiert. Nun folgt aus dem obigen Satz für jedes $\varepsilon > 0$

$$I = \int\limits_{|z-z_0|=\varepsilon} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \cdot dz.$$

Da (wie gesagt) der Integrand beschränkt ist und der Integrationsweg (der Länge $2\pi\varepsilon$) gegen 0 geht, folgt

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{|z-z_0|=\varepsilon} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \cdot dz = 0$$

und damit $I = 0$.
Daraus erhält man

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} \cdot dz = f(z_0) \cdot \underbrace{\int_\gamma \frac{dz}{z - z_0}}_{2\pi i}$$

und schließlich

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} \cdot dz.$$

(2) $\Longrightarrow$ (3): Sei o.B.d.A. $z_0 = 0$ und γ eine kreisförmige Kurve mit Mittelpunkt $z_0 = 0$, der z_1 enthält (siehe Abbildung 2.7).

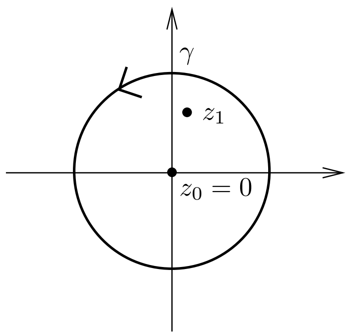

Abbildung 2.7:

Für $z \in \gamma$ ist dann $|z_1| < |z|$ und wegen $\frac{1}{z-z_1} = \frac{1}{z(1-z_1/z)} = \sum_{n\geq 0} \frac{z_1^n}{z^{n+1}}$ ergibt sich

$$\begin{aligned} f(z_1) &= \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_1} \cdot dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_\gamma f(z) \cdot \sum_{n\geq 0} \frac{z_1^n}{z^{n+1}} \cdot dz \\ &= \underbrace{\sum_{n\geq 0} \left(\frac{1}{2\pi i} \cdot \int_\gamma \frac{f(z)}{z^{n+1}} \cdot dz \right)}_{\sum_{n\geq 0} a_n \cdot z_1^n} \cdot z_1^n. \end{aligned}$$

Für $z_0 \neq 0$ ist die Überlegung ganz analog durchzuführen.

Beispiel 2.10 *Die Funktion $f(z) = \frac{1}{1-z}$ ist auf dem Gebiet $G = \mathbb{C} \backslash \{1\}$ komplex differenzierbar. Die Potenzreihenentwicklung um die Stelle $z_0 = 0$ lautet*

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} z^n \qquad \text{für } |z| < R = 1.$$

Der Radius R kann nicht größer gemacht werden, da $f(z)$ an der Stelle $z = 1$ eine Stelle der Unbeschränktheit hat. $R = 1$ ist dann auch der Konvergenzradius der Potenzreihenentwicklung.

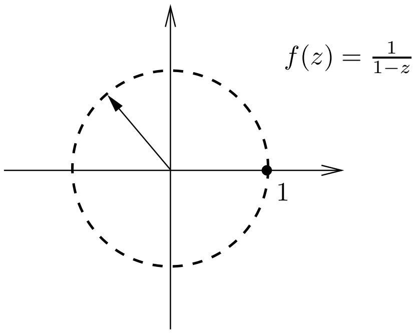

Abbildung 2.8: Die Stelle der Unbeschränktheit bedingt den Konvergenzradius $R = 1$ (Beispiel: 2.10)

Bemerkung: Jede (einmal) komplex differenzierbare Funktion f ist unendlich oft differenzierbar (da eine Potenzreihe unendlich oft differenzierbar ist). Weiters gilt

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \cdot \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} \cdot dz.$$

Das heißt, dass die höheren Ableitungen einer komplex differenzierbaren Funktion durch ein (Kurven-)Integral über f, also duch Mittelbildung berechnet werden können.

Die folgenden Ungleichungen werden auch als *Cauchysche Ungleichungen* bezeichnet.

Satz 2.10 *Sei* $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n \cdot (z-z_0)^n$ *für* $|z-z_0| < R$ *und bezeichne*

$$M_R = \max_{|z-z_0|\leq R} |f(z)|.$$

Dann gilt für die Koeffizienten

$$|a_n| \leq \frac{M_R}{R^n}.$$

Beweis:

Man verwende $\gamma = \{\, z \mid |z-z_0| < R \,\}$ mit der Parametrisierung $z = z_0 + Re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Dann ist (wegen $\frac{1}{z-z_0} = \frac{1}{R} \cdot e^{-i\cdot t}$ und $dz = i \cdot R \cdot e^{i\cdot t} \cdot dt$)

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^n} \cdot dz = \frac{1}{R^n} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi f(z_0 + R \cdot e^{i\cdot t}) \cdot e^{i\cdot n\cdot t} \cdot dt$$

und daher (mit $|f(z_0 + R \cdot e^{i\cdot t})| \leq M_R$)

$$|a_n| \leq \frac{1}{R^n} \cdot M_R.$$

Satz 2.11 *Ist* $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *überall komplex differenzierbar und beschränkt, dann ist* f *konstant.*

Beweis:

Sei $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n \cdot z^n$ die Potenzreihenentwicklung um $z_0 = 0$ und $M = \sup_{z\in\mathbb{C}} |f(z)|$. Dann folgt aus dem vorigen Satz (für $n \geq 1$)

$$|a_n| \leq \frac{M}{R^n}$$

für alle $R > 0$ und damit $a_n = 0$. Folglich ist $f(z) = a_0$ konstant.

Satz 2.12 Fundamentalsatz der Algebra
Sei $f(z) = \sum_{k=0}^n a_k \cdot z^k$ *ein Polynom vom Grad* $n \geq 1$ *(d.h.* $a_n \neq 0$*). Dann besitzt* $f(z)$ *eine Nullstelle:*

$$\exists\, z_0 \in \mathbb{C} : \quad f(z_0) = 0$$

Beweis:

Nimmt man umgekehrt an, dass $f(z)$ keine Nullstellt hat, dann ist die Funktion

$$g(z) = \frac{1}{f(z)} = \frac{1}{a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^z}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ kompex differenzierbar.
Weiters gilt $g(z) \to 0$ für $|z| \to \infty$. Daher ist $g(z)$ auch beschränkt. Folglich muss $g(z)$ konstant sein, also auch $f(z) = 1/g(z)$. Das kann aber bei einem Polynom vom Grad $n \geq 1$ nicht der Fall sein. Also muss $f(z)$ eine Nullstelle haben.

Satz 2.13 *Sei $f_n : G \longrightarrow \mathbb{C}$ eine Folge von komplex differenzierbaren Funktionen, die für alle abgeschlossenen beschränkten Teilmengen von G gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion $f : G \to \mathbb{C}$ konvergieren.*
Dann ist $f : G \to \mathbb{C}$ auch komplex differenzierbar.

Beweis:

$f_n(z)$ ist komplex differenzierbar. Es kann daher durch

$$f_n(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f_n(z)}{z - z_0} \cdot dz$$

dargestellt werden. γ ist abgeschlossen und beschränkt. f_n konvergiert daher auf γ gleichmäßig. Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein N, so dass für alle $n > N$ und für alle $z \in \gamma$

$$|f_n(z) - f(z)| < \epsilon$$

Also gilt auch

$$\Big| \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} \cdot dz - \int_\gamma \frac{f_n(z)}{z - z_0} \cdot dz \Big| < \epsilon \cdot \underbrace{\int_\gamma \frac{dz}{|z - z_0|}}_{C}$$

für ein $C > 0$. Daher gilt für die Grenzfunktion f auch

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} \cdot dz$$

und ist daher komplex differenzierbar.

Folgerung:

Sei $f(z, t)$ für $z \in G$ und $t \in [\,0, 1\,]$ stetig und die Abbildung $z \longrightarrow f(z, t)$ für jedes t komplex differenzierbar. Dann ist auch die Funktion

$$F(z) := \int_0^1 f(z, t) \cdot dt$$

komplex differenzierbar.

Beweis:

Das Intgral kann als Grenzfunktion geschrieben werden:

$$\underbrace{\int_0^1 f(z, t) \cdot dt}_{F(z)} = \lim_{n \to \infty} \underbrace{\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} f\left(z, \frac{k}{n}\right)}_{F_n(z)} .$$

Die Funktionen F_n sind offensichtlich komplex differenzierbar. Weiters ist $F(z, t)$ für z in einem beschränkten, abgeschlossenen Bereich und $t \in [0, 1]$ auch gleichmäßig stetig. Daraus folgt, dass F_n

gleichmäßig in abgeschlossenen, beschränkten Teilmengen gegen F konvergiert. Also ist F komplex differenzierbar.

Die **Gammafunktion** $\Gamma(s)$ ist füs $s \in \mathbb{C}$ mit $\Re(s) > 0$ durch

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty x^{s-1} \cdot e^{-x} \cdot dx$$

definiert und ist dort komplex differenzierbar.
Zum Nachweis unterteilt man das Integral in zwei Teile:

$$\int_0^1 x^{s-1} \cdot e^{-x} \cdot dx + \int_1^\infty x^{s-1} \cdot e^{-x} \cdot dx.$$

Wegen $|x^s| = |e^{\ln x \cdot (\sigma + i \cdot \tau)}| = e^{\sigma \cdot \ln x} \cdot \underbrace{|e^{i \cdot \tau \cdot \ln x}|}_{=1} = x^\sigma = x^{Re(s)}$ erhält man für $\sigma = \Re(s) > 0$

$$\int_0^1 x^{\sigma-1} \cdot e^{-x} \cdot dx \leq \int_0^1 x^{\sigma-1} \cdot dx = \frac{1}{\sigma} < \infty$$

und

$$\int_1^T x^{\sigma-1} \cdot e^{-x} \cdot dx = \int_1^T \frac{1}{x} \cdot e^{-x+\sigma \cdot \ln x} \cdot dx \leq c + \int_{x_0}^T e^{-\frac{x}{2}} \cdot dx < \infty,$$

wenn x_0 so gewählt wird, dass $-x + \sigma \ln x \leq -\frac{x}{2}$ für $x \geq x_0$ gilt.
Das definierende Integral für $\Gamma(s)$ existiers also für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\Re(s) > 0$. Weiters ist für alle $\epsilon > 0$ und $0 < T < \infty$ die Funktion

$$s \mapsto \int_\epsilon^T x^{s-1} \cdot e^{-x} \cdot dx$$

komplex differenzierbar, da die Funktion $x^s = e^{s \cdot \ln x}$ komplex differenzierbar ist.
Die Grenzfunktion

$$\Gamma(s) = \lim_{n \to \infty} \int_{1/n}^n x^{s-1} \cdot e^{-x} \cdot dx$$

ist daher auch analytisch, da die Konvergenz in jedem Streifen $\sigma_1 \leq \Re(s) = \sigma \leq \sigma_2$ (mit $0 < \sigma_1 < \sigma_2$) gleichmäßig ist.
Die Gammafunktion $\Gamma(s)$ erfüllt die Funktionalgleichung

$$s \cdot \Gamma(s) = \Gamma(s+1) \qquad \Re(s) > 0,$$

wie man durch partielle Integration leicht nachweisen kann. Wegen $\Gamma(1) = 1$ folgt daher auch

$$\Gamma(n+1) = n!.$$

Die Gammafunktion ist daher eine stetige (und auch komplex differenzierbare) Fortsetzung der Faktoriellen $n!$.

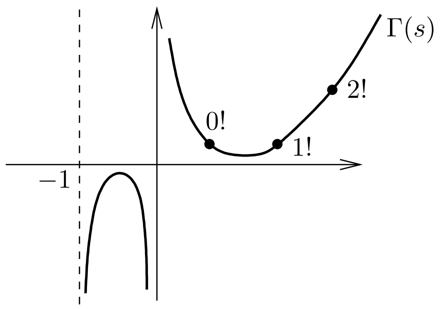

Abbildung 2.9: Die Γ-Funktion als stetige Fortsetzung der Faktoriellen $n!$

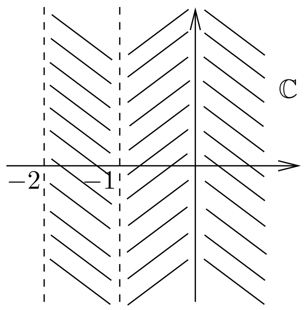

Abbildung 2.10: Analytische Fortsetzung der Γ-Funktion

Mit Hilfe dieser Funktionalgleichung ist es auch möglich, die Gammafunktion auf ein größeres Gebiet fortzusetzen. Man definiert

$$\Gamma(s) := \frac{\Gamma(s+1)}{s} \qquad \text{für } -1 < \Re(s) \leq 0, \qquad s \neq 0 \qquad \text{(Abbildung 2.9)}$$

Entsprechend definiert man

$$\Gamma(s) := \frac{\Gamma(s+2)}{s(s+1)} \qquad \text{für } -2 < \Re(s) \leq -1, \qquad s \neq -1 \qquad \text{(Abbildung 2.10)}$$

usw.
Damit wird die Gammafunktion zu einer komplex differenzierbaren Funktion

$$\Gamma: \quad \mathbb{C}\backslash\{0,-1,-2,\ldots\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

und überall gilt $s \cdot \Gamma(s) = \Gamma(s+1)$. Dieses Prinzip, eine komplex differenzierbare Funktion auf ein größeres Gebiet fortzusetzen, sodass die Fortsetzung wieder komplex differenzierbar ist, nennt man auch **analytische Fortsetzung**.

Beispiel 2.11 Der allemeine Binomialkoeffiziert $\binom{\alpha}{\beta}$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{C}\backslash\{0,-1,-2,\ldots\}$ wird durch

$$\binom{\alpha}{\beta} := \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\beta+1)\cdot\Gamma(\alpha-\beta+1)}$$

definiert.

Der nächste Satz zeigt, dass eine **analytische Fortsetzung** (falls sie existiert) immer nur **eindeutig** möglich ist.

Satz 2.14 *(Eindeutigkeitssatz)*
Es seien $f: \quad G \longrightarrow \mathbb{C}$ und $g: \quad G \longrightarrow \mathbb{C}$ komplex differenzierbar und es gelte

$$g(z) = f(z), \qquad z \in Z,$$

wobei $Z \subseteq G$ eine Häufungspunkt in G besitzt.
Dann gilt $g(z) = f(z)$ für alle $z \in G$.

Beweis:

Seo $z_0 \in G$ Häufungspunkt von Z. Dann folgt aus der Definition von $f'(z_0)$ bzw. von $g'(z_0)$, dass $f'(z_0) = g'(z_0)$ gelten muss. Entsprechendes gilt für die höheren Ableitungen: $f^{(n)}(z_0) = g^{(n)}(z_0)$. Damit stimmen die Potenzreihenentwicklungen von f und g an der Stelle z_0 überein und es gilt $f(z) = g(z)$ für $|z - z_0| < R$ mit einem $R > 0$.
Sei nun $z \in G$ mit $|z-z_0| > R$ und γ eine Kurve in G, die z_0 mit z verbindet (siehe Abbildung 2.11). Ist $f(z) \neq g(z)$, dann muss es auf γ einen *maximalen* Punkt w_0 geben, sodass auf der Verbindung zwischen z_0 und w_0 die Funktionen f und g übereinstimmen, aber auf dem Rest von γ nicht mehr. (*Maximal* in dem Sinn, dass w_0 mit dieser Eigenschaft am weitesten von z_0 entfernt ist.)
Man wendet nun für w_0 dieselbe Überlegung wie für z_0 an und erhält einen Kreis $|w - w_0| < r$ auf dem f und g wieder übereinstimmen müssen. Dies steht aber im Widerspruch zur Maximalität von w_0. Daher muss auch $f(z) = g(z)$ gelten.

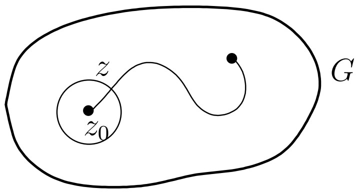

Abbildung 2.11: Analytische Fortsetzung entlang einer Kurve.

Beispiel 2.12

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad (x \in \mathbb{R}) \qquad \Longrightarrow \sin^2 z + \cos^2 z = 1 \qquad (z \in \mathbb{C})$

$f(z) = \sin^2 z + \cos^2 z,\ g(z) = 1,\ Z = \mathbb{R}.$

Nullstellen und Polstellen:

Satz 2.15 *Sei $f:\ G \longrightarrow \mathbb{C}$ komplex differenzierbar und $z_0 \in G$ mit*

$$f(z_0) = 0.$$

Ist $f \neq 0$ und setzt man

$$N = \min\{j \geq 0 \mid f^{(j)}(z_0) \neq 0\} \geq 1,$$

dann gibt es eine komplex differenzierbare Funktion $h:\ G \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $h(z_0) \neq 0$ und

$$f(z) = (z - z_0)^N \cdot h(z).$$

N heisst auch die **Nullstellenordnung** von f an der Stelle z_0.

Beweis:

$f(z)$ hat eine Potenzreihenentwicklung um z_0 (mit Konvergenzradius $R > 0$):

$$f(z) = a_0 + a_1 \cdot (z - z_0) + a_2 \cdot (z - z_0)^2 + \ldots + a_N \cdot (z - z_0)^N + a_{N+1} \cdot (z - z_0)^{N+1} + \cdots.$$

Wegen $a_n = f^{(n)}(z_0)/n!$ folgt aus der Voraussetzung $a_0 = a_1 = \cdots = a_{N-1} = 0$, aber $a_N \neq 0$.
Setzt man nun

$$h(z) = a_N + a_{N+1}(z - z_0) + a_{N+2}(z - z_0)^2 + \cdots$$

erhält man direkt

$$f(z) = (z - z_0)^N \cdot h(z),$$

und außerdem gilt $h(z_0) = a_N \neq 0$.

Definition 2.3 *Sei G ein Gebiet. $z_0 \in G$ ist eine isolierte Singularität von f, wenn $f : G \setminus \{z_0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ komplex differenzierbar ist.*

Definition 2.4 *Sei G ein Gebiet. $z_0 \in G$ ist eine* **Polstelle** *von $f : G\setminus\{z_0\} \longrightarrow \mathbb{C}$, wenn z_0 isolierte Singularität von f ist und es eine natürliche Zahl $N \geq 1$ mit der Eigenschaft gibt, dass die Funktion*

$$h(z) = f(z) \cdot (z - z_0)^N$$

auf das Gebiet G analytisch fortsetzbar ist.
Das minimale N mit dieser Eigenschaft nennt man auch **Polstellenordnung** *von f an der Stelle z_0.*

Man beachte, dass, wenn f an der Stelle z_0 die Polstellenordnung N hat, f die Darstellung

$$f(z) = \frac{h(z)}{(z-z_0)^N}$$

mit $h(z_0) \neq 0$ hat. Berücksichtigt man die Potenzreihenentwicklung von $h(z)$:

$$h(z) = b_0 + b_1 \cdot (z-z_0) + b_2 \cdot (z-z_0)^2 + \ldots + b_N \cdot (z-z_0)^N + b_{N+1} \cdot (z-z_0)^{N+1} + \cdots,$$

so erhält man auch die Darstellung ($b_0 = a_{-N} \neq 0$)

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{b_0}{(z-z_0)^N} + \frac{b_1}{(z-z_0)^{N-1}} + \ldots + \frac{b_{N-1}}{z-z_0} + b_N + b_{N+1} \cdot (z-z_0) + \cdots \\ &= \frac{a_{-N}}{(z-z_0)^N} + \frac{a_{-N+1}}{(z-z_0)^{N-1}} + \ldots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1 \cdot (z-z_0) + \cdots \\ &= a_{-N} \cdot (z-z_0)^{-N} + a_{-N+1} \cdot (z-z_0)^{-N+1} + \ldots + a_{-1} \cdot (z-z_0)^{-1} + a_0 + a_1 \cdot (z-z_0) + \cdots, \end{aligned}$$

wenn man $a_j = b_{j+N}$ (für $j \geq -N$) setzt. Diese Darstellung ist eine Verallgemeinerung der Potenzreihenentwicklung, da auch negative Potenzen von $(z-z_0)$ erlaubt sind, und wird als **Laurentreihenentwicklung** bezeichnet.

Beispiel 2.13 $f(z) = \frac{1}{1-z}$ hat an der Stelle $z_0 = 1$ eine Polstelle 1. Ordnung.
$g(z) = \frac{1}{z^3}$ hat an der Stelle $z_0 = 0$ eine Polstelle 3. Ordnung.

Beispiel 2.14 Eine rationale Funktione $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ hat bei allen Nullstellen des Nenners ($g(z_0) = 0$) eine Polstelle.

Beispiel 2.15 $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ hat an der Stelle $z_0 = 0$ eine isolierte Singularität, die aber keine Polstelle ist. ($e^{1/z} z^N$ ist für kein $N \geq 1$ an der Stelle $z_0 = 0$ komplex differenzierbar.) Es gibt aber eine Laurentreihenentwicklung:

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2 \cdot z^2} + \frac{1}{6 \cdot z^3} + \ldots$$

Laurentreihe:

Eine Reihe der Form

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cdot (z-z_0)^n \\ &= \ldots + \frac{a_{-3}}{(z-z_0)^3} + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + a_0 + a_1 \cdot (z-z_0) + a_2 \cdot (z-z_0)^2 + \ldots \end{aligned}$$

heisst **Laurentreihe**.

Satz 2.16 *Sei $f : G \setminus \{z_0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ komplex differenzierbar, d.h. z_0 ist eine isolierte Singularität von f.*
Dann gibt es ein $R > 0$, sodass sich $f(z)$ für $|z - z_0| < R$ eindeutig durch eine Laurentreihe darstellen lässt:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cdot (z-z_0)^N.$$

Die Koeffizienten berechnen sich durch

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} \cdot dz.$$

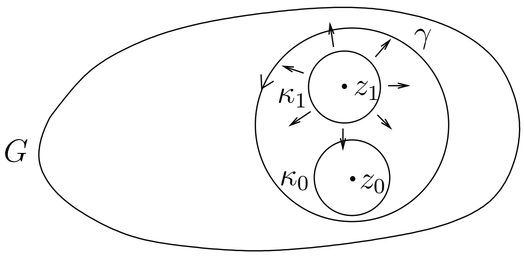

Abbildung 2.12: Zum Beweis der Laurentreihenentwicklung

Beweis:

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit $z_0 = 0$.
Dann gilt zunächst (vergleiche mit Abbildung 2.12):

$$\begin{aligned}
f(z_1) &= \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\kappa_1} \frac{f(z)}{(z-z_1)} \cdot dz \\
&= \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_1)} \cdot dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa_0} \frac{f(z)}{(z-z_1)} \cdot dz \\
&= \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z(1-z_1/z)} \cdot dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa_0} \frac{f(z)}{z_1(1-z_1/z)} \cdot dz \\
&= \underbrace{\sum_{n\geq 0} \left(\frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z^{n+1}} \cdot dz \right) \cdot z_1^n}_{\text{Potenzreihenanteil}} + \underbrace{\sum_{n\geq 0} \left(\frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\kappa_0} f(z) \cdot z^n \cdot dz \right) \cdot \frac{1}{z_1^{n+1}}}_{\text{Laurentreihenanteil}}
\end{aligned}$$

Man beachte, dass die dabei verwendeten geometrischen Reihen konvergierten:

$$z \in \gamma \quad \Longrightarrow \quad |z_1| < |z_0| \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{z-z_1} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{z_1}{z}} = \sum_{n\geq 0} \frac{z_1^n}{z^{n+1}},$$

$$z \in \kappa_0 \quad \Longrightarrow \quad |z| < |z_1| \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{z-z_1} = \frac{1}{z_1} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{z_1}} = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{z_1^{n+1}}.$$

Schließlich beachte man auch, dass für $n \geq 0$ auch

$$\frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\kappa_0} f(z) \cdot z^n \cdot dz = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\gamma} f(z) \cdot z^n \cdot dz$$

gilt, da κ_0 und γ homoptop sind.
Das beweist den Satz für $z_0 = 0$. Der allgemeine Fall wird ganz analog gezeigt.

Mit Hilfe der Laurentreihenentwicklung lassen sich isolierte Singulartitäten klassifizieren:

Satz 2.17 *Sei z_0 eine isolierte Singularität einer Funktion $f : G\setminus\{z_0\} \to \mathbb{C}$ und $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cdot (z-z_0)^n$ die Laurentreihenentwicklung. Dann tritt genau einer der drei folgenden Fälle auf:*

1. *z_0 ist eine hebbare Singularität, d.h. f lässt sich einer Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ fortsetzen. (Hier gilt $a_{-1} = a_{-2} = \cdots = 0$.*

2. *z_0 ist eine Polstelle, d.h. es gibt ein $N \geq 1$ mit $a_{-N} \neq 0$ und $a_{-N-1} = a_{-N-2} = \cdots = 0$.*

3. *z_0 ist eine wesentliche Singularität, d.h. es gibt unendlich viele $n \geq 1$ mit $a_{-n} \neq 0$.*

Beispiel 2.16 $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$*: $z_0 = 0$ ist eine wesentliche Singularität.*

Bemerkung:

In der Laurentreihenentwicklung gilt

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z) \cdot dz.$$

Definition 2.5 *Sei z_0 eine isolierte Singularität von $f : G \setminus \{z_0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ und $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cdot (z - z_0)^n$ die Laurentreihenentwicklung von f um z_0.*
Dann heisst der Koeffizient a_{-1} **Residuum** *der Funktion an der Stelle z_0:*

$$a_{-1} := \operatorname{Res}(f(z), z = z_0).$$

Bemerkung:

Ist z_0 Polstelle N-ter Ordnung und

$$f(z) = \frac{a_{-N}}{(z - z_0)^N} + \ldots + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + a_0 + a_1 \cdot (z - z_0) + \ldots$$

die Laurentreihenentwicklung, so folgt

$$f(z) \cdot (z - z_0)^N = a_{-N} + \ldots + a_{-N+1} \cdot (z - z_0) + \ldots + a_{-1} \cdot (z - z_0)^{N-1} + a_0 \cdot (z - z_0)^N + \ldots$$

und nach $(N - 1)$-facher Differentiation

$$\operatorname{Res}(f(z), z = z_0) = a_{-1} = \frac{1}{(N-1)!} \cdot \frac{d^{N-1}}{dz^{N-1}} (f(z) \cdot (z - z_0)^N) \Big|_{z=z_0}.$$

Ist im speziellen z_0 einfache Polstelle (d.h. $N = 1$), gilt

$$\operatorname{Res}(f(z), z = z_0) = a_{-1} = \lim_{z \to z_0} \left(f(z) \cdot (z - z_0)\right).$$

Beispiel 2.17 $\operatorname{Res}(\Gamma(s), s = -n) = \frac{(-1)^n}{n!}$ $\boxed{\textbf{\textit{UE}}}$

Mit Hilfe dieser Begriffsbildungen lässt sich der Residuensatz sofort ableiten (vergleiche mit Abbildung 2.13).

Satz 2.18 Residuensatz
Sei γ eine geschlossene Kurve (ohne Überschneidungen) und G das von γ umschlossene Gebiet (d.h. γ ist die Randkurve des beschränkten Gebiets G). Weiters seinen $z_1, z_2, \ldots, z_r \in G$ isolierte Singularitäten von einer Funktion $f : G \setminus \{z_1, z_2, \ldots, z_r\} \to \mathbb{C}$. Dann gilt

$$\int_\gamma f(z) \cdot dz = 2\pi i \cdot \sum_{\ell=0}^{r} \operatorname{Res}(f(z), z = z_\ell).$$

Lemma:

1. $z_0 \ldots N$-fache Nullstelle von $f \implies \frac{f'(z)}{f(z)}$ einfache Polstelle an $z = z_0$, $\operatorname{Res}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}, z = z_0\right) = N$
2. $z_0 \ldots P$-fache Polstelle $f \implies \frac{f'(z)}{f(z)}$ einfache Polstelle an $z = z_0$, $\operatorname{Res}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}, z = z_0\right) = P$

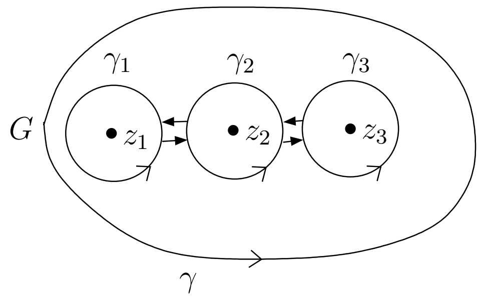

Abbildung 2.13: Die “Summe” der inneren Kurven sind homotop zur Randkurve

Satz 2.19 *Sei f auf G mit Ausnahme von endliche vielen Polstellen komplex differenzierbar und bezeichne γ die Randkurve von G. Dann gilt*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} \cdot dz = \widetilde{N} - \widetilde{P},$$

wobei $\widetilde{N}$ die Summe der Nullstellenordnungen der Nullstellen von f in G und $\widetilde{P}$ die Summe der Polstellenordnungen von f in G bezeichnet.

Partialbruchzerlegung:

Mit Hilfe der Laurentreihenentwicklung kann die Partialbruchzerlegung einer rationalen Funktioen $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ (wobei der Zählergrad kleiner als der Nennergrad ist) leicht begründet werden. Wir betrachten dazu ein Beispiel. Sei

$$f(z) = \frac{z^2+2}{z^2 \cdot (z-3)}$$

Dann ist $z_0 = 0$ eine 2-fache Polstelle und $z_1 = 3$ einfache Polstelle. Die Laurentreihenentwicklung um $z_0 = 0$ kann in der Form

$$f(z) = \frac{A}{z^2} + \frac{B}{z} + f_1(z)$$

beschrieben werden, wobei f_1 eine rationale Funktion ist, die an der Stelle $z_0 = 0$ keine Polstelle hat. $f_1(z)$ hat aber (wie $f(z)$) eine einfache Polstelle bei $z_1 = 3$:

$$f_1(z) = \frac{C}{z-3} + f_2(z).$$

Die verbleibende (rationale) Funktion $f_3(z)$ hat keine Polstelle mehr. Sie muss ein Polynom sein. Wegen der ursprünglichen Voraussetzung (Zählergrad kleiner als der Nennergrad) gilt $f_2(z) \to 0$ für $|z| \to \infty$. Also kann $f_2(z)$ nur mehr 0 sein. Insgesamt gilt daher

$$f(z) = \frac{A}{z} + \frac{B}{z^2} + \frac{C}{z-3}.$$

Nichtisolierte Singularitäten:

Beispiel 2.18 $f(z) = \prod\limits_{n \geq 1} \frac{1}{1-z^n}$. Dieses unendliche Produkt konvergiert für $|z| < 1$ und stellt eine komplex differenzierbare Funktion dar. (Beweis durch Logarithmieren und Konvergenzbetrachtung der entstehenden unendlichen Reihe.)
Wegen der Faktoren $\frac{1}{1-z^n}$ sind alle n-ten Einheitswurzeln Singularitäten von $f(z)$. Alle komplexen Zahlen der Form $z_0 = e^{2\pi i r}$ mit rationalem r sind also Singularitäten. Diese sind nicht isoliert (siehe auch Abbildung 2.14)).

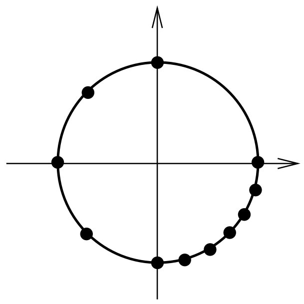

Abbildung 2.14: Bei jeder n-ten Einheitswurzel liegt eine Singularität

Algebraische Singularitäten:

Beispiel 2.19 $f(z) = \sqrt{z}$ läss t sich nur in ganz $\mathbb{C}$ nicht stetig definieren. Man muss eine *Halbgerade* herausschneiden, z.B. die negative relle Achse und 0: $\mathbb{C} \setminus (\mathbb{R}_- \cup \{0\})$. Die Stelle $z_0 = 0$ ist bei $f(z) = \sqrt{z}$ in jedem Fall eine singuläre Stelle. (Sie wird **algebraische Singularität** genannt, da $u = f(z)$ die algebraische Gleichung $u^2 - z = 0$ erfüllt.

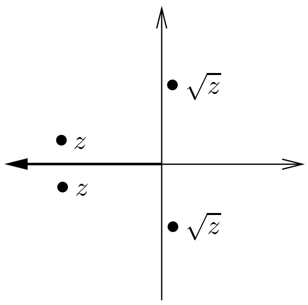

Abbildung 2.15: Bei $f(z) = \sqrt{z}$ muß die ganze linke Halbgerade weggenommen werden

Für $-\pi < \arg(z) < \pi$ ist die Wurzel z.B. durch $\sqrt{z} = [\sqrt{|z|}, \frac{1}{2}\arg(z)]$ eindeutig bestimmt (*1. Blatt*). Eine andere Möglichkeit ist $\sqrt{z} = [\sqrt{|z|}, \frac{1}{2}\arg(z) + \frac{\pi}{2}]$ (*2. Blatt*). Versucht man die Wurzelfunktion $\sqrt{z}$ für negative z (also $\arg(z) = -\pi$) stetig fortzusetzen, so zeigt sich, dass man dort das Blatt wechseln muss.
Diese beiden Blätter können nun bei der negativen reellen Achse *verklebt werden* und man erhält eine sogeannte **Riemannsche Fläche** (siehe Abbildung 2.16). Auf dieser Fläche (2 "Kopien von $\mathbb{C}$, entlang der negativen reellen Achse aufgeschnitten und kreuzweise zusammengeklebt) kann dann die Wurzelfunktion $\sqrt{z}$ uneingeschränkt (und komplex differenzierbar) definiert werden. Nur die Stelle $z_0 = 0$ bleibt ausgeklammert. Diese (algebraische) Singularität ist auch ein sogenannter **Verzweigungspunkt**, da sich dort die beiden Blätter verzweigen.

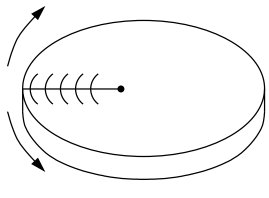

Abbildung 2.16: Graphische Darstellung einer Rieman'schen Fläche

Logarithmische Singularität:

Die (komplexe) Logarithmusfunktion ist durch

$$\log z = \ln|z| + i \cdot \varphi \qquad \text{für } z = |z| \cdot e^{\varphi}$$

definiert, wobei man wieder eine *Halbgerade* (gemeinsam mit 0) ausklammern muss, also z.B.

$$\varphi = \arg(z), \qquad -\pi \arg(z) < \pi.$$

Eine andere Möglichkeit ist $-3\pi < \arg(z) < -\pi$ oder allgemein $(2k-1)\pi < \arg(z) < (2k+1)\pi$ mit einer ganzen Zahl k. In allen Fällen gilt

$$e^{\log z} = z.$$

Im Gegensatz zur Wurzelfunktion (mit 2 Blättern) hat der Logarithmus unendlich viele Blätter. Wieder kann man eine Riemannsche Fläche (wie eine unendliche Spirale) konstruieren, auf der der Logarithmus uneingeschränkt definiert ist. Allerdings bleibt auch hier der Punkt $z_0 = 0$ ausgespart, dieser ist wieder ein Verzweigungspunkt, allerdings verzweigt dort der Logarithmus in unendlich viele Blätter. So ein Punkt wird auch als **logarithmische Singularität** bezeichnet.

Beispiel 2.20 $g(z) = \log \frac{1}{1-z} = \sum\limits_{n \geq 1} \frac{z^n}{n}, \qquad |z| < 1$

$\sqrt{z} = z^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2} \cdot \log z} \qquad z \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{R}_- \cup \{0\})$

2.3 Laplace - Transformation:

Definition 2.6 *Sei $f(t),\ t \geq 0$ eine integrierbare Funktion.*
Die **Laplace-Transformierte** *$\mathscr{L}(f(t))$ von $f(t)$ ist durch*

$$\mathscr{L}(f(t)) = F(s) := \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-s \cdot t} \cdot dt$$

gegeben, und zwar für alle $s \in \mathbb{C}$, für die das Integral konvergiert.

Die Laplace-Transformation ist eine sogenannte *Funktionaltransformation.* Einer Funktion $f(t)$ wird eine (neue) Funktion $F(s)$ zugeordnet.

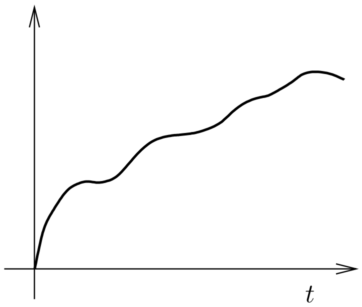

Abbildung 2.17: Abbildung eines Signals $f(t)$

Lemma *Wenn das Integral $\int_0^\infty f(t) \cdot e^{s_0 \cdot t}\, dt$ für ein $s_0 \in \mathbb{C}$ existiert, dann existiert das Integral $\int_0^\infty f(t) \cdot e^{-s \cdot t}\, dt$ für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\Re(s) > \Re(s_0)$ und stellt dort eine komplex differenzierbare Funktion dar.*

Beweis:

Mit Hilfe partieller Integration erhält man für $s \in \mathbb{C}$ mit $\Re(s) > \Re(s_0)$:

$$\int_0^T f(t) \cdot e^{-s \cdot t} \cdot dt = \int_0^T \underbrace{f(t) \cdot e^{-s_0 \cdot t}}_{f'} \cdot \underbrace{e^{-(s-s_0) \cdot t}}_{g} \cdot dt$$

$$= \underbrace{\underbrace{\int_0^T f(t) \cdot e^{-s_0 \cdot t} \cdot dt}_{=O(1)} \cdot \underbrace{e^{-(s-s_0) \cdot t}}_{\to 0} + (s - s_0) \cdot \int_0^T \underbrace{\int_0^t f(u) \cdot e^{-s_0 \cdot u} \cdot du}_{=O(1)} \cdot \underbrace{e^{-(s-s_0) \cdot t}}_{\text{exponentiell } \to 0} \cdot dt}_{\exists \ \lim T \to \infty}$$

Daher konvergiert das Integral $\int_0^\infty f(t) \cdot e^{-s \cdot t}\, dt$.

Man beachte, dass für $\Re(s) - \Re(s_0) \geq \delta$

$$\left|e^{-(s-s_0)\cdot t}\right| = e^{-\Re(s-s_0)t} \leq e^{-\delta \cdot t}$$

folgt. Daher ist die Konvergenz in diesem Bereich gleichmäßig, und $F(s)$ ist damit als gleichmäßiger Grenzwert komplex differenzierbarer Funktionen wieder komplex differenzierbar.

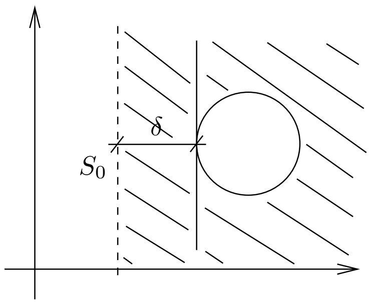

Abbildung 2.18: Das Laplace-Integral konvergiert immer in einer Halbebene.

Definition 2.7 *Die* **Konvergenzabszisse** σ_c *der Laplace-Transformierten* $F(s)$ *(einer Funktion* $f(t)$*) ist durch*

$$\sigma_c := \inf \left\{ \Re(s) \mid \exists \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-s \cdot t} \cdot dt \right\}$$

definiert.

- $\Re(s) > \sigma_c$: $\exists\ F(s) = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-s \cdot t} \cdot dt$
- $\Re(s) < \sigma_c$: $\nexists\ F(s) = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-s \cdot t} \cdot dt$
- $\Re(s) = \sigma_c$: keine allgemeine Aussage

Beispiel 2.21 $f(t) = e^{a \cdot t},\ t \geq 0,\ a \in \mathbb{C}$ oder $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow F(s) &= \mathscr{L}(e^{a \cdot t}) = \int_0^\infty e^{a \cdot t} \cdot e^{-s \cdot t} \cdot dt \\
&= \int_0^\infty e^{-(s-a)\cdot t} \cdot dt = -\frac{1}{s-a} \cdot e^{-(s-a)\cdot t}\bigg|_0^\infty = 0 + \frac{1}{s-a} e^0 \\
&= \frac{1}{s-a}.
\end{aligned}$$

$\sigma_c = \Re(a)$ (Konvergenzabszisse).

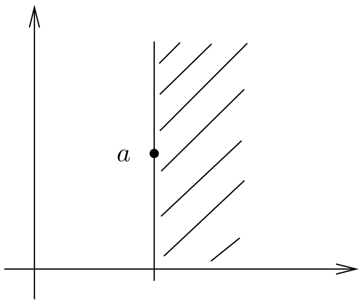

Abbildung 2.19: Konvergenzabszisse $\sigma_c = \Re(a)$ für $f(t) = e^{at}$.

Beispiel 2.22 $f(t) = e^{t^2},\ t \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \sigma_c = \infty$ (Die Laplace-Transformierte existiert für kein s.)

Lemma: *Für $\Re(s) > \sigma_c$ gilt:*

$$F(s) = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-s \cdot t} \cdot dt, \qquad \Longrightarrow F'(s) = -\int_0^\infty t \cdot f(t) \cdot e^{-s \cdot t} \cdot dt.$$

$$\boxed{\tfrac{d}{ds}\mathscr{L}(f(t)) = \mathscr{L}(-t \cdot f(t))}$$

Beispiel 2.23 Nach mehrmaliger Anwendung dieser Regel erhält man auch

$$\boxed{\mathscr{L}(t^k \cdot e^{a \cdot t}) = (-1)^K \cdot \frac{d^K}{ds^K}\left(\frac{1}{s-a}\right) = \frac{K!}{(s-a)^{K+1}}}$$

Satz 2.20 *Seien $a_i \in \mathbb{C}$ und $p_i(t)$ Polynome, $i = 1, \ldots, r$. Dann ist die Laplacetransformierte*

$$\mathscr{L}\left(\sum_{i=1}^{r} p_i(t) \cdot e^{a_i \cdot t}\right)$$

eine rationale Funktion in s mit Zählergrad < Nennergrad.
Umgekehrt ist jede rationale Funktion mit Zählergrad < Nennergrad Laplace-Transformierte einer Funktion der Gestalt $f(t) = \sum_{i=1}^{r} p_i(t) \cdot e^{a_i \cdot t}$. Dabei sind die a_i die Polstellen der rationalen Funktion und die entsprechende Polstellenordnung ist ist gleich dem Grad von $p_i(t) + 1$.

Bemerkung:

Funktionen der Form $f(t) = \sum p_i(t) \cdot e^{a_i \cdot t}$ sind genau die möglichen Lösungen von homogenen linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten.

Satz 2.21

1. $\mathscr{L}(\lambda \cdot f(t) + \mu \cdot g(t)) = \lambda \cdot \mathscr{L}(f(t)) + \mu \cdot \mathscr{L}(g(t))$
2. $\mathscr{L}(f'(t)) = s \cdot \mathscr{L}(f(t)) - f(0+), \qquad f(0+) = \lim_{t \to 0+} f(t)$

   $\mathscr{L}(f^{(k)}(t)) = s^k \cdot \mathscr{L}(f(t)) - s^{k-1} \cdot f(0+) - s^{k-2} \cdot f'(0+) - \ldots - f^{(k)}(0+)$
3. $\mathscr{L}\left(\int_0^t f(u) \cdot du\right) = \frac{1}{s} \cdot \mathscr{L}(f(t))$

Beweis:

1. Offensichtlich.
2. $\mathscr{L}(f'(t)) = \displaystyle\int_0^\infty f'(t) \cdot e^{-s \cdot t} \cdot dt = f(t) \cdot e^{-s \cdot t}\Big|_0^\infty + s \cdot \int_0^\infty f(t) e^{-s \cdot t} \cdot dt = -f(0+) + s \cdot \mathscr{L}(f(t))$
3. folgt aus 2.

Beispiel 2.24 Gesucht sind die Lösungen der Differentialgleichung

$$f'(t) = f(t),\ t \geq 0,\ f(0) = 1.$$

Setzt man $F(s) = \mathscr{L}(f(t))$. Dann folgt aus den obigen Eigenschaften

$$f' = f \quad \Longrightarrow \quad \underbrace{\mathscr{L}(f')}_{s\cdot\mathscr{L}(f)-f(0)} = \mathscr{L}(f)$$

oder $s \cdot F(s) - 1 = F(s)$ und damit

$$F(s) = \frac{1}{s-1}.$$

Die ursprüngliche Funktion muss daher gleich

$$f(t) = e^t$$

sein. Die Differentialgleichung wurde also mit Hilfe der Laplace-Transformation gelöst.

In ganz analoger Weise kann man homogene lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten behanden:

$$f^{(k)} + c_1 \cdot f^{(k-1)} + \ldots + c_k \cdot f = 0.$$

Nach Anwendung der Laplace-Transformation erhält man

$$s^k \cdot F(s) - \text{Polynom}_{k-1}(s) + c_1 \cdot \left(s^{k-1} \cdot F(s) - \text{Polynom}_{k-2}(s)\right) + \ldots + c_k \cdot F(s) = 0,$$

wobei $\text{Polynom}_j(s)$ eine Polynom vom Grad $\leq j$ bezeichnet. Fasst man diese Polynome zu einem Polynom $q(s)$ (vom Grad $\leq k-1$) zusammen, erhält man

$$(s^k + c_1 \cdot s^{k-1} + \ldots + c_k) \cdot F(s) = q(s)$$

oder

$$F(s) = \frac{q(s)}{\underbrace{s^k + c_1 \cdot s^{k-1} + \ldots + c_k}_{\text{charakteristisches Polynom}}}$$

Der Nenner ist nichts anderes als das charakteristische Polynom der ursprünglichen Differentialgleichung. Mit Hilfe einer Partialbruchzerlegung kann man dann die Lösung $f(t)$ der Gestalt

$$f(t) = \sum_{i=1}^{r} p_i(t) \cdot e^{a_i \cdot t}$$

gewinnen, wobei a_i die Nullstellen des Nenners sind (vergleiche mit Satz 2.21).

Für stetige Funktionen $f(t)$ kann man aus der Laplace-Transformierten $F(s)$ die ursprüngliche Funktion rückgewinnen.

Satz 2.22 *Sei $f(t)$ ... stetig und $F(s) = \mathscr{L}(f(t))$ die Laplace-Transformierte mit Konvergenzabszisse $\sigma_c < \infty$. Dann gilt*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{T\to\infty} \int_{c-i\cdot T}^{c+i\cdot T} F(s) \cdot e^{s\cdot t} \cdot ds \qquad (c > \delta_c).$$

Beispiel 2.25 Diese Formel soll an Hand des Beispiels $f(t) = e^{at}$ illustriert werden. Hier ist $F(s) = \frac{1}{s-a}$. Integriert man $F(s)e^{st}$ entlang der geschlossenen Kurve $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$ (siehe Abbildung 2.20), so folgt aus dem Residuensatz

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{s-a} \cdot e^{s\cdot t} \cdot ds = \text{Res}\left(\frac{1}{s-a} \cdot e^{s\cdot t},\ s = a\right) = e^{a\cdot t}.$$

Verschiebt man aber γ_3 immer mehr nach links und γ_2 bzw. γ_4 nach oben bzw. nach unten, so folgt

$$\int_{\gamma_i} \frac{1}{s-a} \cdot e^{s \cdot t} \cdot ds \to 0 \qquad (i \in \{2,3,4\}).$$

Es bleibt also der Grenzwert

$$\frac{1}{2\pi i} \lim_{T\to\infty} \int_{c-i\cdot T}^{c+i\cdot T} \frac{1}{s-a} \cdot e^{s\cdot t} \cdot ds = e^{at} \qquad (c > \Re(a))$$

übrig.

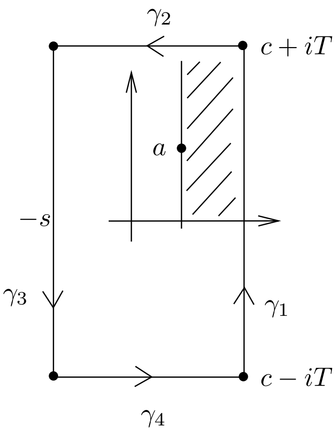

Abbildung 2.20: Rücktransformation der Laplace-Transformation

$f(t)$	$F(s) = \mathscr{L}(f(t))$	
$-t \cdot f(t)$	$F'(s)$	
$f'(t)$	$s \cdot F(s) - f(o+)$	
$\int_0^t f(t) \cdot dt$	$\frac{F(s)}{s}$	
$f(t) \cdot e^{a \cdot t}$	$F(s-a)$	(Verschiebung)
$f(t-a)$ $(a > 0, \quad t \geq a)$	$e^{-a\cdot s} \cdot F(s)$	
$f(a \cdot t)$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$	(Skalierung)
$h(t) = \int_0^t f(\tau) \cdot g(t-\tau) \cdot d\tau$	$H(s) = F(s) \cdot G(s)$	(Faltung)

Beispiel 2.26 Berechung der Übertragunsfunktion einer elektrischen Schaltung:
($u = u(t)$, $i = i(t)$ etc. bezeichnen den zeitlichen Spannungs- bzw. Stromverlauf und $U = U(s)$, $I = I(s)$ etc. die entsprechenden Laplace-Transformierten.
Es soll das Verhalten des Netzwerkes aus Abbildung 2.24 untersucht werden, wenn nach dem ruhenden Zustand (d.h. für $t \leq 0$ sind alle Spannungen und Ströme $= 0$) ab dem Zeipunkt $t = 0$ beim Eingang eine Spannung $u_e(t)$, $t \geq 0$, angelegt wird. Gefragt ist, wie sich die Ausgangsspannung $u_a(t)$, $t \geq 0$, verhält.

Widerstand: $u_R = R \cdot i_R \quad \xrightarrow{\mathscr{L}} \quad U_R = R \cdot I_R$ (Siehe dazu auch Abbildung 2.21)

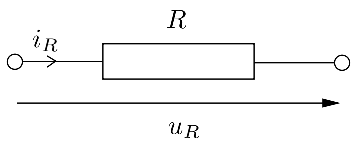

Abbildung 2.21: Schaltbild eines Widerstandes

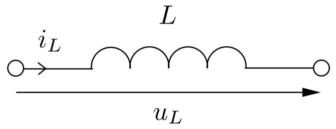

Abbildung 2.22: Schaltbild einer Spule

Spule: $u_L = L \cdot \frac{d}{dt} i_L \quad \overset{\mathscr{L}}{\longrightarrow} \quad U_L = s \cdot L \cdot I_L, \quad i_L(0+) = 0$ (Siehe dazu auch Abbildung 2.22)

Kondensator: $u_C = C \cdot \frac{d}{dt} u_C \quad \overset{\mathscr{L}}{\longrightarrow} \quad U_C = s \cdot C \cdot U_C$ (Siehe dazu auch Abbildung 2.23)

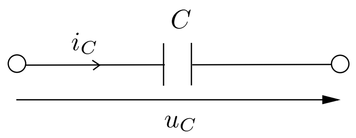

Abbildung 2.23: Schaltbild eines Kondensators

Anwendung der Kirchhoff'schen Maschenregel:

$$
\begin{aligned}
u_e &= u_R + u_L + u_a \quad \Longrightarrow \quad U_e = U_R + U_L + U_a, \\
u_a &= u_c \quad \Longrightarrow \quad i = C \cdot \frac{d}{dt} u_a \quad \Longrightarrow \quad I = s \cdot C \cdot U_a, \\
i &= i_L \quad \Longrightarrow \quad u_L = L \cdot \frac{d}{dt} i \quad \Longrightarrow \quad U_L = s \cdot L \cdot I. \\
\Longrightarrow \quad u_e &= R \cdot i + L \cdot \frac{d}{dt} i + \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i \cdot dt \\
\overset{\mathscr{L}}{\longrightarrow} \quad U_e &= R \cdot I + s \cdot L \cdot I + \frac{1}{s \cdot C} \cdot I = \left(R + s \cdot L + \frac{1}{s \cdot C} \right) \cdot I \\
&= s \cdot C \cdot \left(R + s \cdot L + \frac{1}{s \cdot C} \right) \cdot U_a = \left(1 + s \cdot R \cdot C + s^2 \cdot L \cdot C \cdot \right) U_a
\end{aligned}
$$

oder

$$
\boxed{U_a = \tfrac{1}{1 + s \cdot R \cdot C + s^2 \cdot L \cdot C} \cdot U_e}
$$

Die Funktion $G(s) = \dfrac{1}{1 + s \cdot R \cdot C + s^2 \cdot L \cdot C}$ wird auch **Übertragungsfunktion** genannt.

Sei jetzt im speziellen $u_e(t) = 1$ $(t \geq 0)$, also $U_e = \frac{1}{s}$. Dann ist

$$
U_a = \frac{1}{s \cdot (1 + s \cdot R \cdot C + s^2 \cdot L \cdot C)} = \frac{1}{s} + \frac{A}{s - s_1} + \frac{B}{s - s_2}
$$

für gewisse Konstanten A, B, C und den Nullstellen

$$
s_{1,2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{R}{L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4 \cdot L^2} - \frac{1}{L \cdot C}}.
$$

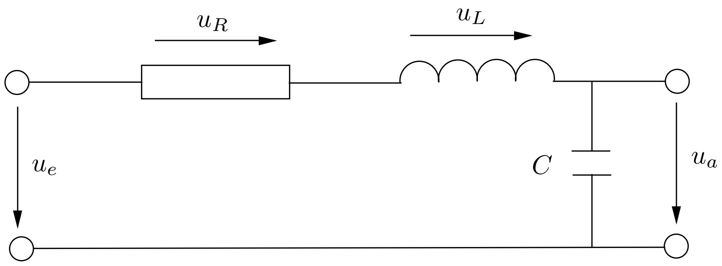

Abbildung 2.24: Einfaches Beispiel eines Netzwerkes

Dies beiden Nullstellen sind entweder beide reell, dann sind beide negativ: $s_1, s_2 < 0$; oder sie sind konjugiert komplex, dann sind die Realteile negativ: $\Re(s_1) = \Re(s_2) = -R/(2L) < 0$.
$u_a(t)$ ist dann durch

$$u_a(t) = 1 + A \cdot e^{s_1 \cdot t} + B \cdot e^{s_2 \cdot t}$$

gegeben. Sind s_1 und s_2 reell, so liegt der sogeannte *Kriechfall* vor, sind sie konjugiert komplex, so kommt es zum *Überschwingen* (siehe Abbildung 2.25). In beiden Fällen gilt aber

$$\lim_{t \to \infty} u_a(t) = 1.$$

Die Ausgangsspannung folgt der Eingangsspannung.

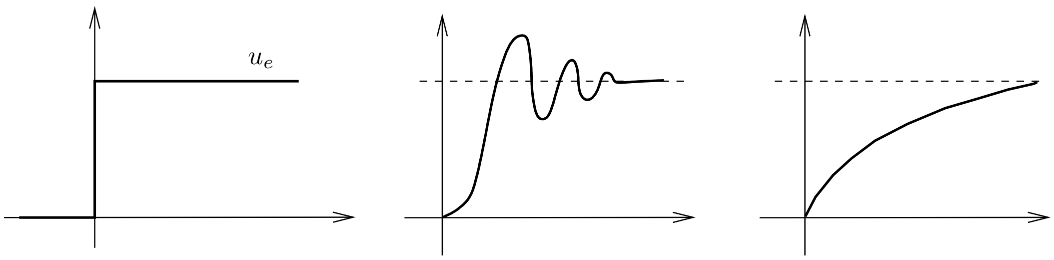

Abbildung 2.25: Überschwingen und Kriechfall als Einschwingvorgang

Ganz allgemein gilt, dass ein Netzwerk **stabil** ist, wenn die Nullstellen des Nenners der Übertragungsfunktion alle negativen Realteil haben. Genau dann klingen alle exponentiellen Anteile gegen 0 ab. (Bei komplexen Nullstellen beschreibt der $\Im(s)$ das Schwingungsverhalten.)

Spannungsteiler:

Die Übertragungsfunktion des Spannungsteilers (Abbildung 2.26) ist durch

$$G(s) = \frac{U_a}{U_e} = \frac{\frac{1}{s \cdot C}}{R + s \cdot L + \frac{1}{s \cdot C}} = \frac{1}{s \cdot R \cdot C + s^2 \cdot L \cdot C + 1}$$

gegeben. Setzt man übrigens für $s = i \cdot \omega$, so ist $G(i \cdot \omega)$ nichts anderes als das Verhältnis der *komplexen Widerstände* $\frac{1}{i \cdot \omega C}$ und $R + i \cdot \omega L + \frac{1}{i \cdot \omega C}$.

Stoßantwort:

Die Übertragungsfunktion kann als *Stoßantwort* eines Systems interpretiert werden. Es gilt nämlich $U_a(s) = G(s)$, wenn $U_e(s) = 1$ ist. Allerdings gibt es keine *klassische Funktion* $f(t)$ mit Laplace-Transformation $\mathscr{L}(f(t)) = L(s) = 1$. Dazu muss man den klassischen Funktionsbegriff zu sogenannten *Distributionen* verallgemeinern.
So hat etwa die **Diracfunktion** $\delta(t)$ (eine Distribution) die definierende Eigenschaft

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot \delta(t) \cdot dt = g(0).$$

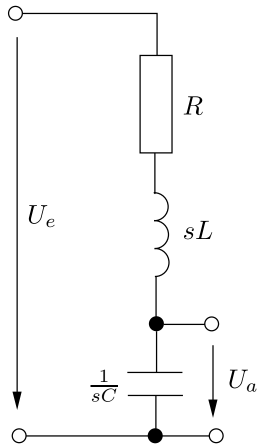

Abbildung 2.26: Schaltbild eines Spannungsteilers

Sie tastet die Funktion $g(t)$ an der Stelle $t = 0$ ab. Die Diracfunktion ist keine klassische Funktion. Sie müsste außerhalb des Punktes $t = 0$ identisch 0 sein, aber trotzdem Integral $= 1$ haben. (Bei klassischen Funktionen wäre das Integral dann $= 0$). $\delta(t)$ kann aber als *Stoß* beim Zeitpunkt 0 interpretiert werden, und aus der obigen Definition folgt

$$\mathscr{L}(\delta(t)) = \int_0^\infty \delta(t) e^{-st}\, dt = 1.$$

Daher verwendet man $\delta(t)$ (formal) als Eingangsfunktion $u_e(t)$. Regt man also ein System mit einem (unendlich) kurzem Stoß (also mit $\delta(t)$) an, so ist $G(s)$ die Laplace-Transformierte der *Stoßantwort*:

$$U_e = \delta(t) \quad \Longrightarrow \quad U_a = G(s) \qquad\qquad\qquad U_a = A' \cdot e^{s_1 \cdot t} + B' \cdot e^{s_2 \cdot t} \longrightarrow 0.$$

Wieder hängt es von den Nullstellen s_1, s_2 ab, ob es zu Schwingungen kommt oder nicht (siehe Abbildung 2.27).

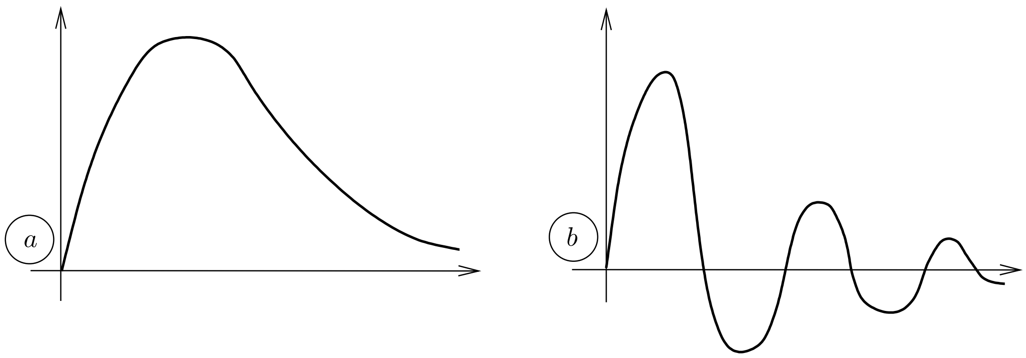

Abbildung 2.27: Abbildungen von Stoßantworten

2.4 z-Transformation

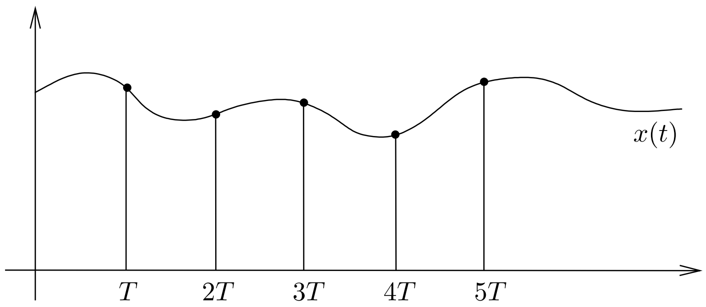

Abbildung 2.28: Abtastwerte

Das *Abtasten* einer Funktion $x(t)$ wird durch die Summe der *Stöße* bei den Zeitpunkten $0, T, 2T, 3T, \ldots$ beschrieben (Summe von Diracfunktionen):

$$x^*(t) := \sum_{k=0}^{\infty} x(k \cdot T) \cdot \delta(t - k \cdot T)$$

Dies ist zwar keine klassische Funktion, aber man kann wegen

$$\mathscr{L}(\delta(t - k \cdot T)) = e^{-s \cdot k \cdot T}$$

die Laplace-Transformierte von $x^*(t)$ betrachten:

$$\mathscr{L}(x^*(t)) = \sum_{k \geq 0} x(k \cdot T) \cdot e^{-s \cdot k \cdot T}.$$

Setzt man

$$\boxed{e^{s \cdot T} = z,}$$

erhält man die (sogenannte) z-Transformierte.

Definition 2.8 *Sie $x(t), t \geq 0$ eine Funktion und $T > 0$ die Taktzeit. Dann bezeichnet*

$$Z(x(t)) = x(z) := \sum_{k=0}^{\infty} x(k \cdot T) \cdot z^{-k}$$

die **z-Transformierte** *von $x(t)$.*

Die z-Transformierte bezeichnet man auch als Diskretes Analogon zur $\mathscr{L}$-Transformation. Sie kann auch als Potenzreihe in z^{-1} mit den Koeffizienten $x(kT)$ gesehen werden. Aus dieser Sichtweise ergibt sich (mit Hilfe der Cauchyschen Formel) direkt die

Inverse z-transformation:

$$x(k \cdot T) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\gamma} x(z) \cdot z^{k-1} \cdot dz.$$

2.5 Fouriertransformation

Definition 2.9 *Sei $f(t)$, $t \in \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion, für die das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \cdot dt$ existiert.*
Die **Fouriertransformierte** *von $f(t)$ ist dann durch*

$$\mathscr{F}(f(t)) = \widehat{f}(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \qquad (\omega \in \mathbb{R})$$

gegeben.

Bemerkung:

Ist $f(t) = 0$ für $t < 0$, dann gilt

$$\widehat{f}(\omega) \quad = \quad F(i\omega).$$

Es besteht also ein formaler Zusammenhang zur Laplace-Transformation $F(s)$..

Eigenschaften:

1. $\mathscr{F}(f'(t)) = \widehat{f}'(\omega) = i \cdot \omega \cdot \widehat{f}(\omega)$
2. $(f * g)(t) \ := \ \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot g(t-\tau) \cdot dt \quad \Longrightarrow \quad \widehat{f * g} = \widehat{f} \cdot \widehat{g}$ [Faltung]

Beispiel 2.27 $f(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$:

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \ \widehat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2} - i \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \\
&= e^{-\frac{\omega^2}{2}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \cdot (t^2 + 2 \cdot i \cdot \omega \cdot t + (i \cdot \omega)^2)} \cdot dt \\
&= e^{-\frac{\omega^2}{2}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \cdot (t + i \cdot \omega)^2} \cdot dt \\
&= e^{-\frac{\omega^2}{2}} \cdot \int_{-\infty + i \cdot \omega}^{\infty + i \cdot \omega} e^{-\frac{u^2}{2}} \cdot du \\
&= e^{-\frac{\omega^2}{2}} \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} \cdot du}_{\sqrt{2 \cdot \pi}} \\
&= \sqrt{2 \cdot \pi} \cdot e^{-\frac{\omega^2}{2}},
\end{aligned}$$

wobei die Substitution $u = t + i \cdot \omega$ verwendet wurde.
Übrigens ist $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$ die Dichte der (Standard-)Normalverteilung. Diese ist also eine Eigenfunktion der Fouriertransformation.

Inverse Fouriertransformation:

Satz 2.23 *Sei $f(t)$ stetig, und es existieren die Integrale $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \cdot dt$ und $\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\omega)| \cdot d\omega$. Dann gilt*

$$f(t) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega) \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} \cdot d\omega.$$

Die inverse Fouriertransformation hat daher (fast) dieselbe Form wie die Fouriertransformation selbst.

Begründung (kein Beweis):

Wegen $\widehat{f}(\omega) = F(i \cdot \omega)$ kann man die Rücktransformationsformel der Laplacetransformation anwenden, also

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c - i \cdot \infty}^{c + i \cdot \infty} F(s) \cdot e^{s \cdot t} \cdot ds$$

für ein $c > 0$. Ist es möglich, aus Konvergenzgründen $c = 0$ zu setzen, so bekommt man nach Anwendung der Substitution $s = i \cdot \omega$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{F(i \cdot \omega)}_{f(\omega)} \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} \cdot d\omega.$$

Bemerkung:

Ist $f(t)$ reellwertig und setzt man

$$a(\omega) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot dt, \qquad b(\omega) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot dt,$$

so ergibt sich wegen $e^{i \cdot \omega \cdot t} = \cos(\omega \cdot t) + i \cdot \sin(\omega \cdot t)$ auch

$$f(t) = \int_{\infty}^{\infty} a(\omega) \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot d\omega + \int_{\infty}^{\infty} b(\omega) \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot d\omega.$$

$f(t)$ kann also als Überlagerung von cos- und sin-Schwingungen dargestellt werden.

2.6 Fourierreihen

Die Fouriertransformation kann nur bei Funktionen angewandt werden, für die das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt$ existiert. Dies ist aber bei periodischen Funktionen nicht der Fall. Es stellt sich heraus, daß man in diesem Fall $f(t)$ auch als Überlagerung von cos- und sin-Schwingungen darstellen kann, aber nicht durch ein Integral, sondern durch eine Reihe, die *Fourierreihe*.

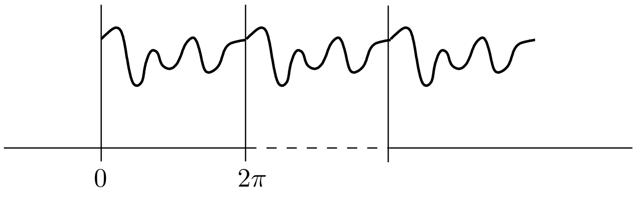

Abbildung 2.29: Abbildung einer 2π-periodischen Reihe

Um das Konzept von Fourierreihen besser verstehen zu können, beschäftigen wir uns kurz mit Skalarprodukten und Orthogonalprojektionen.

Skalarprodukte und Orthogonalprojektionen:

Definition 2.10 *Sei V ein Vektorraum über den reelen Zahlen. Eine Abbildung $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$, die zwei Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$ eine reelle Zahl zuordnet, heißt* **Skalarprodukt**, *wenn sie die folgenden Eigenschaften hat:*

1. $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \; = \; \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle$ [Symmetrie]
2. $\langle \lambda \cdot \mathbf{a}_1 + \mu \cdot \mathbf{a}_2, b \rangle \; = \; \lambda \cdot \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{b} \rangle \; + \; \mu \cdot \langle \mathbf{a}_2, \mathbf{b} \rangle$ [Linearität]
3. $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle > 0$ *für* $\mathbf{a} \neq 0$ [Positivität].

Die Länge eines Vektors $\mathbf{a}$ *ist durch*

$$\|\mathbf{a}\| \; = \; \sqrt{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle}$$

definiert.
Der Abstand zweier Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$ *ist durch*

$$\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| = \sqrt{\langle \mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{a} - \mathbf{b} \rangle}$$

gegeben.
Zwei Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$ *heißen* **orthogonal** *($\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$), wenn das Skalarprodukt* 0 *ist:*

$$\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \;\; :\Longleftrightarrow \;\; \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 0.$$

Satz 2.24 (Satz von Pythagoras)

$$\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \quad \Longrightarrow \quad \|a + b\|^2 \; = \; \|a\|^2 \; + \; \|b\|^2.$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\|a+b\|^2 &= \langle \mathbf{a}+\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{a}+\mathbf{b}\rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{a}+\mathbf{b}\rangle = \\
&= \langle \mathbf{a}, \mathbf{a}\rangle + \underbrace{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle}_{0} + \underbrace{\langle \mathbf{b}, \mathbf{a}\rangle}_{0} + \langle \mathbf{b}, \mathbf{b}\rangle = \\
&= \|a\|^2 + \|b\|^2
\end{aligned}$$

Definition 2.11 *Sei U ein Unterraum von V. Die Abbildung $p : V \to U$ heißt* **Orthogonalprojektion** *auf U, wenn sie die folgenden Eigenschaften hat:*

1. *$p : V \to U$ ist linear, d.h. $p(\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}) = \lambda p(\mathbf{a}) + \mu p(\mathbf{b})$.*
2. *$p(p(\mathbf{a})) = p(\mathbf{a})$.*
3. *$\mathbf{a} - p(\mathbf{a}) \perp U$.*

Satz 2.25 (Bestapproximation) *Sei U ein Unterraum von V und $p : V \to U$ die Orthogonalprojektion von V auf U. Dann ist $p(\mathbf{a}) \in U$ Bestapproximation eines Vektors $\mathbf{a}$ durch einen Vektor in U:*

$$\|\mathbf{a} - p(\mathbf{a})\| = \min_{\mathbf{c}\in U} \|\mathbf{a} - \mathbf{c}\|.$$

Beweis:

Für alle $\mathbf{c} \in U$ gilt (wegen des Satzes von Pythagoras):

$$\|\mathbf{c} - \mathbf{a}\|^2 = \underbrace{\|\mathbf{c} - p(\mathbf{a})\|^2}_{\geq 0} + \|\mathbf{a} - p(\mathbf{a})\|^2 \quad \Longrightarrow \quad \|\mathbf{a} - p(\mathbf{a})\| = \min_{\mathbf{c}\in U} \|\mathbf{a} - \mathbf{c}\|,$$

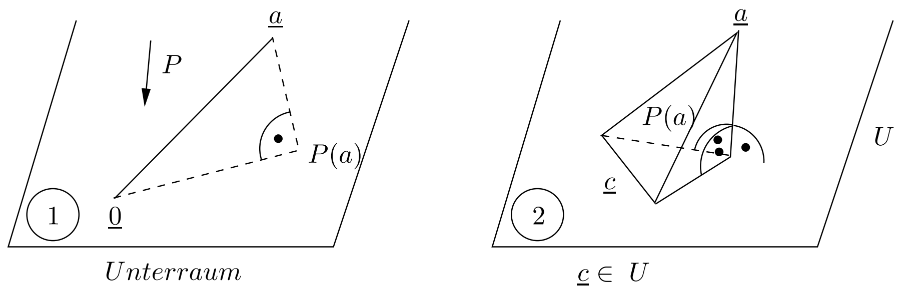

Abbildung 2.30: Orthogonalprojektion (Bestapproximation)

Satz 2.26 *Sei $\{\mathbf{b}_1, \ldots \mathbf{b}_n\}$ eine Orthogonalbasis von U, d.h. die Vektoren $\mathbf{b}_j$ stehen paarweise aufeinander orthogonal: $\langle \mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j\rangle = 0$ für $i \neq j$.*
Dann berechnet sich die Orthogonalprojektion $p : V \to U$ durch

$$p(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}_i\rangle}{\langle \mathbf{b}_i, \mathbf{b}_i\rangle} \cdot \mathbf{b}_i.$$

Beweis:

Die Abbildung ist linear und erfüllt (wie man leicht nachrechnet) $p(p(\mathbf{a})) = p(\mathbf{a})$.
Man muss nur noch zeigen: $\langle \mathbf{a} - p(\mathbf{a}), \mathbf{b}_i\rangle = 0$, $(i = 1, \ldots n)$. Dann dann gilt für alle $\mathbf{c} = \sum_{i\geq 1} y_i \cdot \mathbf{b}_i \in U$:

$$\langle \mathbf{a} - p(\mathbf{a}), \mathbf{c}\rangle = \langle \mathbf{a} - p(\mathbf{a}), \sum_{i\geq 1} y_i \cdot \mathbf{b}_i\rangle = \sum_{i\geq 1} y_i \langle \mathbf{a} - p(\mathbf{a}), \mathbf{b}_i\rangle = 0.$$

Aus der Definition folgt:

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{a} - p(\mathbf{a}), \mathbf{b}_i \rangle &= \langle \mathbf{a}, \mathbf{b}_j \rangle - \langle p(\mathbf{a}), \mathbf{b}_j \rangle \\
&= \langle \mathbf{a}, \mathbf{b}_j \rangle - \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}_i \rangle}{\langle \mathbf{b}_i, \mathbf{b}_i \rangle} \cdot \underbrace{\langle \mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j \rangle}_{=0 \text{ für } i \neq j} \\
&= \langle \mathbf{a}, \mathbf{b}_j \rangle - \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}_j \rangle}{\langle \mathbf{b}_j, \mathbf{b}_j \rangle} \cdot \langle \mathbf{b}_j, \mathbf{b}_j \rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Damit ist alles bewiesen.

Wir betrachten nun einen speziellen Vektorraum V, bestehend aus allen stetigen Funktionen $f : [0, 2 \cdot \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ (d.h. diese Funktionen sind jetzt die Vektoren).
Als Skalarprodukt verwendet man

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2 \cdot \pi} f(x) \cdot g(x) \cdot dx.$$

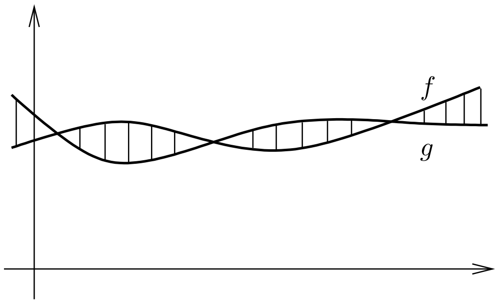

Abbildung 2.31: Abstand zwischen 2 Funktionen

Der Abstand zweier Funktionen $f, g \in V$ ist dann

$$\|f - g\| = \sqrt{\int_0^{2 \cdot \pi} (f(x) - g(x))^2 \, dx},$$

das auch als quadratisches Fehlermittel bezeichnet wird.
Als Unterraum U betrachten wir **trionometrische Polynome** der Form

$$\begin{aligned}
f(x) &= c_0 + c_1 \cdot \cos(x) + c_2 \cdot \cos(x) + \ldots + c_k \cdot \cos(k \cdot x) + \\
&\quad + c_{-1} \cdot \sin(x) + \ldots + c_{-k} \cdot \sin(k \cdot x)
\end{aligned}$$

mit Koeffizienten $c_i \in \mathbb{R}$, also z.B.

$$f(x) = 5 - 2 \cdot \cos(x) + 7 \cdot \cos(3 \cdot x) - 2 \sin(2 \cdot x).$$

Man beachte, daß all diese Funktionen periodisch mit Periode 2π sind:

$$f(x + 2\pi) = f(x).$$

Die Funktionen

$$1, \cos(x), \ldots, \cos(k \cdot x), \sin(x), \ldots, \sin(k \cdot x),$$

bilden eine **Orthogonalbasis** von U:

$$\begin{aligned}
\langle 1, \cos(j \cdot x) \rangle &= \int_0^{2 \cdot \pi} 1 \cdot \cos(j \cdot x) \cdot dx = 0 \quad (j > 0), \\
\langle 1, \sin(j \cdot x) \rangle &= \int_0^{2 \cdot \pi} 1 \cdot \sin(j \cdot x) \cdot dx = 0 \quad (j > 0),
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\langle \sin(j\cdot x), \sin(l\cdot x)\rangle &= \int_0^{2\pi} \sin(j\cdot x)\cdot\sin(l\cdot x)\cdot dx = 0 \quad (j\neq l),\\
\langle \cos(j\cdot x), \cos(l\cdot x)\rangle &= \int_0^{2\pi} \cos(j\cdot x)\cdot\cos(l\cdot x)\cdot dx = 0 \quad (j\neq l),\\
\langle \cos(j\cdot x), \sin(l\cdot x)\rangle &= \int_0^{2\pi} \cos(j\cdot x)\cdot\sin(l\cdot x)\cdot dx = 0.
\end{aligned}
$$

Die letzten drei Beziehungen sind leicht mit Hilfe partieller Integration nachzurechnen. Demnach bilden sie auch eine Basis (von $2k+1$ Funktionen) des Raums U.

Mit Hilfe dieser Funktionen kann das folgende Problem gelöst werden:

Problem:

Gegegeben sei eine stetige Funkteion $f(x)$, $\ 0 \leq x \leq 2\cdot\pi$ und $k \geq 1$.

Gesucht ist ein trigonometrische Polynom der Form

$$g_k(x) = c_0 + c_1\cdot\cos(x) + \ldots + c_k\cdot\cos(k\cdot x) + c_{-1}\cdot\sin(x) + \ldots + c_{-k}\sin(k\cdot x)$$

sodass das Integral $\int_0^{2\cdot\pi}(f(x)-g(x))^2\cdot dx$ minimal ist (vergleiche mit Abbildung 2.31)

Lösung mittels Orthogonalprojektion:

$$
\begin{aligned}
c_0 &= \frac{\langle f,1\rangle}{\langle 1,1\rangle} = \frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\int_0^{2\cdot\pi} f(x)\cdot dx\\
c_j &= \frac{\langle f,\cos(j\cdot x)\rangle}{\langle\cos(j\cdot x),\cos(j\cdot x)\rangle} = \frac{1}{\pi}\cdot\int_0^{2\cdot\pi} f(x)\cdot\cos(j\cdot x)\cdot dx \qquad j=1,\ldots,k\\
c_{-j} &= \frac{\langle f,\sin(j\cdot x)\rangle}{\langle\sin(j\cdot x),\sin(j\cdot x)\rangle} = \frac{1}{\pi}\cdot\int_0^{2\cdot\pi} f(x)\cdot\sin(j\cdot x)\cdot dx \qquad j=1,\cdots,k.
\end{aligned}
$$

Übrigens gilt

$$
\begin{aligned}
\int_0^{2\cdot\pi}(f(x)-g(x))^2\cdot dx &= \langle f-g, f-g\rangle\\
&= \langle f,f\rangle - \langle g,g\rangle\\
&= \langle f,f\rangle - \left(2\cdot\pi c_0^2 + \pi\cdot\sum_{j=1}^{k}\left(c_j^2+c_{-j}^2\right)\right) \geq 0.
\end{aligned}
$$

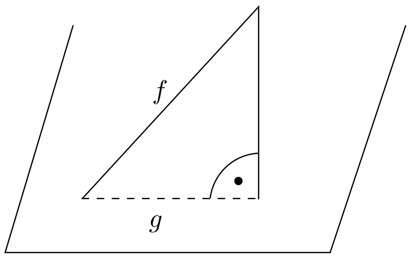

Abbildung 2.32: Orthogonalprojektion

Diese Vorgangsweise kann für jedes $k \geq 1$ durchgeführt werden. Schließlich erhält man für $k\to\infty$ die sogeannte *Fourierreihe*.

Definition 2.12 *Sei $f(x)$, $0 \le x \le 2\pi$ stetig (oder integrierbar). Setzt man*

$$\begin{aligned} a_k &:= \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\cdot\pi} f(x) \cdot \cos(k \cdot x) \cdot dx, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \\ b_k &:= \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\cdot\pi} f(x) \cdot \sin(k \cdot x) \cdot dx, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots, \end{aligned}$$

so ist

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cdot \cos(k \cdot x) + b_k \cdot \sin(k \cdot x))$$

die zu $f(x)$ gehörige **Fourierreihe**.
Die Koeffizienten a_k und b_k heißen **Fourierkoeffizienten**.

Bemerkung:

Alle Funktionen $\cos(kx), \sin(kx)$ sind periodisch mit der Periode 2π. Daher kann die Fourierreihe auch als 2π-periodisch angesehen werden. Entsprechend kann man eine Funktion $f(x)$, die für $0 \le x \le 2\pi$ vorgegeben ist, **periodisch fortsetzen**. Daher eignen sich Fourierreihen auch zur Analyse von periodischen Funktionen.
Anstelle des Intervalles $[0, 2\pi]$ wird oft auch das Intervall $[-\pi, \pi]$ betrachtet (oder noch allgemeiner ein beliebiges Intervall der Länge 2π). Man startet dann mit einer Funktion $f(x)$ für $-\pi \le x \le \pi$ und definiert

$$\begin{aligned} a_k &:= \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(k \cdot x) \cdot dx, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \\ b_k &:= \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin(k \cdot x) \cdot dx, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots, \end{aligned}$$

Bemerkung:

Die Partialsummen der Fourierreihe

$$g_k(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{l=1}^{k} (a_l \cdot \cos(l \cdot x) \cdot b_l \sin(l \cdot x))$$

sind bestmögliche Approximation in dem trigonometrischen Polygon von Grad $\le k$ (vergleiche mit der obigen Überlegung.)

Bemerkung:

Da jede stetige Funktion beliebig gut durch ein trigonometrisches Polynom approximiert werden kann (Weierstraßscher Approximationssatz), so gilt auch

$$\lim_{k \to \infty} \int_0^{2\cdot\pi} (f(x) - g_k(x))^2 \cdot dx = 0$$

und damit auch die sogeannte **Parseval'sche Gleichung**

$$\int_0^{2\pi} f(x)^2 \cdot dx = \pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k^2 + b_k^2\right) \right).$$

Daher konvergiert die Reihe $\sum(a_k^2 + b_k^2)$, es ist aber nicht klar, ob die Fourierreihe konvergiert. Tatsächlich ist das nicht immer der Fall. (Allerdings kann die Konvergenz für stetig differenzierbare Funktionen gezeigt werden, vergleiche mit Satz 2.27).

Beispiel 2.28 Sei $f(x)$ folgendermaßen gegeben:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \\ 0 & -\pi \le x \le -\frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2} \le x \le \pi \end{cases}$$

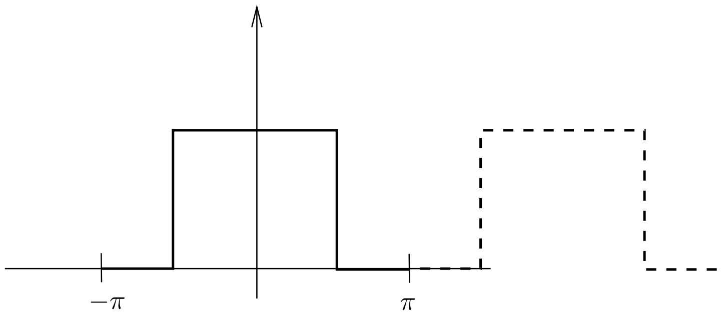

Abbildung 2.33: Abbildung zu Beispiel 2.28

Die Fourierkoeffizienten a_k und b_k berechnen sich zu

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} = 1, \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(k \cdot x) \cdot dx = \frac{1}{k \cdot \pi} \cdot \sin(k \cdot x) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{2}{k \cdot \pi} \cdot \sin\left(k \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & k \text{ gerade} \\ (-1)^k \frac{2}{k \cdot \pi} & k \text{ ungerade} \end{cases} \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(k \cdot x) \cdot dx = 0 \end{aligned}$$

und die dazugehörige Fourierreihe ist:

$$g(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k\pi} \sin\left(\frac{k \cdot \pi}{2}\right) \cdot \cos(k \cdot x).$$

Es zeigt sich, daß für all $x \neq \pm\frac{\pi}{2}$ die Fourierreihe $g(x) = f(x)$ ist. An den Stellen $x = \pm\frac{\pi}{2}$ gilt $g(\pm\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}$.

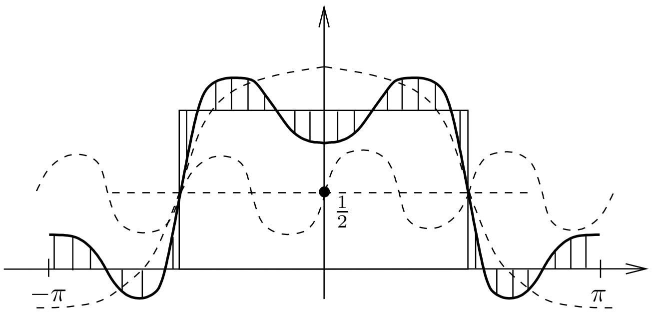

Abbildung 2.34: Überlagerungen von sin- und cos-Funktionen

Satz 2.27 *Ist $f(x)$ eine 2π - periodische, stückweise stetig differenzierbare Funktion (wobei die dazwischenliegenden Unstetigkeitsstellen Sprungstelle sind und die einseitigen Ableitungen existieren), dann konvergiert die Fourierreihe von $f(x)$ in jedem Punkt und es gilt:*

$$\textit{Fourierreihe von } f(x) = \begin{cases} f(x) & \textit{falls } x \textit{ keine Sprungstelle,} \\ \frac{f(x+)+f(x-)}{2} & \textit{falls } x \textit{ Sprungstelle.} \end{cases}$$

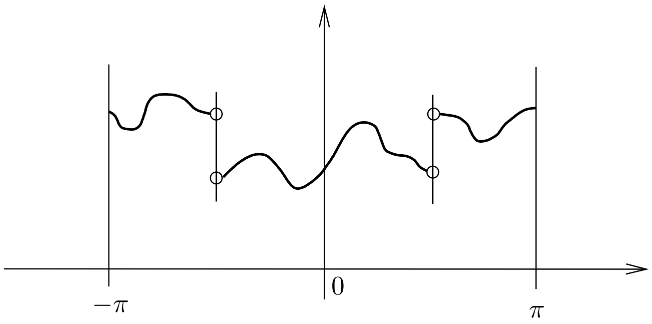

Abbildung 2.35: Abbildung einer stückweise stetig differenzierbaren Funktion (zu Satz 2.27)

Komplexe Fourierreihe:

Definiert man für ganze Zahlen k

$$\boxed{c_k \;:=\; \frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot e^{-i\cdot k\cdot x}\cdot dx}$$

so ergibt sich wegen $e^{i\cdot k\cdot x} = \cos(k\cdot x) + i\cdot\sin(k\cdot x)$

$$c_k = \frac{1}{2}\cdot(a_k - i\cdot b_k)\,, \qquad c_{-k} = \frac{1}{2}\cdot(a_k + i\cdot b_k) \qquad (k>0)$$

oder

$$a_k = c_k + c_{-k}, \qquad b_k = \frac{c_k - c_{-k}}{-i}.$$

Die Fourierreihe ist dann durch

$$\begin{aligned}
&\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cdot\cos(k\cdot x) + b_k\cdot\sin(k\cdot x))\\
&= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(c_k + c_{-k})\cdot(\cos(k\cdot x)) - i\cdot((c_k - c_{-k})\cdot(\sin(k\cdot x)))\\
&= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(c_k\cdot e^{i\cdot k\cdot x} + c_{-k}\cdot e^{-i\cdot k\cdot x}\right)\\
&= \boxed{\sum_{k\in\,\mathbb{Z}} c_k\cdot e^{i\cdot k\cdot x}}
\end{aligned}$$

Diese Reihe wird auch als **komplexe Fourierreihe** bezeichnet. Man beachte auch die formale Ähnlichkeit zur Fouriertransformation.

$2l$**-periodische Funktion:**

Sie $f(x)$, $-l \le x \le l$, gegeben (und periodische fortgesetzt).
Setzt man

$$a_k \;:=\; \frac{1}{l}\cdot\int_{-l}^{l} f(x)\cdot\cos\left(\frac{k\cdot\pi\cdot x}{l}\right)\cdot dx, \qquad b_k \;:=\; \frac{1}{l}\cdot\int_{-l}^{l} f(x)\cdot\sin\left(\frac{k\cdot\pi\cdot x}{l}\right)\cdot dx,$$

so ist die entsprechende Fourierreihe durch

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cdot\cos\left(\frac{k\cdot\pi\cdot x}{l}\right) + b_k\cdot\sin\left(\frac{k\cdot\pi\cdot x}{l}\right)\right)$$

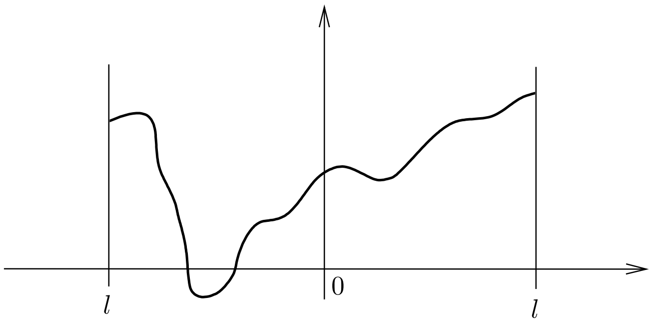

Abbildung 2.36: Abbildung einer $2l$-periodischen Funktion

gegeben. (Alle Eigenschaften übertragen sich.)

Komplexe $2l$-periodische Fourierreihe:

Sie $f(x)$, $-l \leq x \leq l$. Die komplexen Fourierkoeffizienten sind hier.

$$c_k \ := \ \frac{1}{l} \cdot \int_{-l}^{l} f(x) \cdot e^{-\frac{i \cdot k \cdot \pi \cdot x}{l}} \cdot dx,$$

und die komplexe Fourierreihe:

$$g(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \cdot e^{\frac{i \cdot k \cdot \pi \cdot x}{l}}.$$

Diskrete Fouriertransformation:

Eine periodische Funktion muss nur an endliche vielen Stellen abgetastet werden. Das Resultat ist eine endliche Folge:

$$a_k = f(k \cdot T), \qquad\qquad 0 \leq k < m.$$

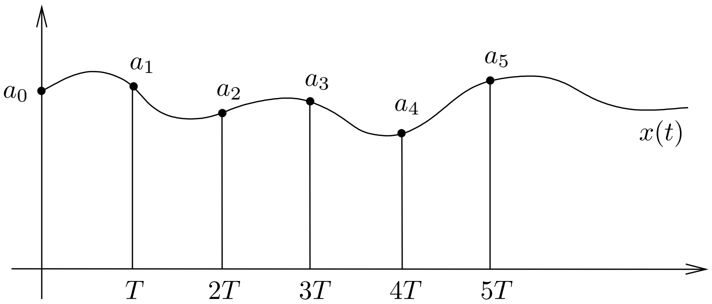

Abbildung 2.37: Ein kontinuierliches Signal wird mit der Taktzeit T abgetastet

Die **diskrete Fouriertransformierte** dieser endlichen Folge $(a_0, \ldots, a_{m-1})$ (von reellen oder komplexen Zahlen) ist durch

$$c_k \ := \ \sum_{j=0}^{m-1} a_j \cdot e^{-2 \cdot \pi \cdot \frac{j \cdot k}{m}} = \sum_{j=0}^{m-1} a_j \cdot \xi_m^{-k \cdot j} \qquad (0 \leq k < m)$$

definiert. ($\xi_m \ := \ e^{\frac{2 \cdot \pi \cdot i}{m}}$ bezeichnet hier die primitive m-te Einheitswurzel.)

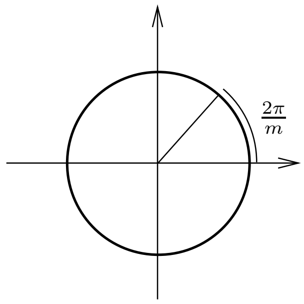

Abbildung 2.38: Abbildung einer primitiven m-ten Einheitswurzel

Rücktransformation:

Umgekehrt kann man aus Kenntnis der c_j, $0 \leq j < m$, die ursprüngliche Folge rückgewinnen:

$$a_k = \frac{1}{m} \cdot \sum_{j=0}^{m-1} c_j \cdot \xi_m^{k \cdot j}.$$

Die diskrete Fouriertransformation hat ähnliche Eigenschaften wie die Fouriertransformation. Beispielsweise wird eine Faltunsbeziehung in eine Multiplikation üebersetzt etc.

Fast Fouriertransformation (FFT):

Die Berechnung der c_j aus den a_k erfordert (wenn man die definierende Summe betrachtet) etwa m^2 Operationen. Mit Hilfe eines Tricks kann die Anzahl der Operationen wesentlich verringert werden. Dieses Verfahren heißt **Fast Fouriertransformation (FFT)**.

Man nehme an, $m = 2^l$. Dann gilt (wegen $\xi_m^2 = \xi_{m/2}$)

$$\begin{aligned} c_{2\cdot k} &= \sum_{j=0}^{m-1} a_j \cdot \xi_m^{-j\cdot 2\cdot k} \\ &= \sum_{j=0}^{\frac{m}{2}-1} a_j \cdot \xi_m^{-j\cdot 2\cdot k} + \sum_{j=0}^{\frac{m}{2}-1} a_{j+\frac{m}{2}} \cdot \xi_m^{-(j+\frac{m}{2})\cdot 2\cdot k} \\ &= \sum_{j=0}^{\frac{m}{2}-1} \left(a_j + a_{j+\frac{m}{2}}\right) \cdot \xi_{m/2}^{-j\cdot k}. \end{aligned}$$

Entsprechend gilt

$$c_{2\cdot k+1} = \sum_{k=0}^{\frac{m}{2}-1} \left(a_j - a_{j+\frac{m}{2}}\right) \cdot \xi_{\frac{m}{2}}^{-j}.$$

Die Anzahl der Rechenschritte wurde also etwa um die Hälfte reduziert. Anstelle von

vorher: $m \cdot m$ Multiplikationen sind es *nachher:* $2 \cdot \frac{m}{2} \cdot \frac{m}{2} + m = \frac{m^2}{2} + m$ Multiplikationen.

Nach iterativer Anwendung dieses Verfahrens kann man die c_j mit maximal $m \cdot \log(m)$ Multiplikationen berechnen (FFT).

Kapitel 3

Höhere Kombinatorik

3.1 Erzeugende Funktionen:

Definition 3.1 *Sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Folge reeller (oder komplexer) Zahlen*

- *Die gewöhnliche erzeugende Funktion von $(a_n)_{n\geq 0}$ ist*

$$A(x) = \sum_{n\geq 0} a_n \cdot x^n.$$

- *Die exponentielle erzeugende Funktion von $(a_n)_{n\geq 0}$ ist*

$$\widehat{A}(x) = \sum_{n\geq 0} a_n \cdot \frac{x^n}{n!}.$$

Beispiel 3.1 Für $a_n = 1$ ist $A(x) = \frac{1}{1-x}$ und $\widehat{A}(x) = e^x$.

Bemerkung:

Eine Folge (a_n) und ihre erzeugenden Funktionen $A(x)$ und $\widehat{A}(x)$ entsprechen einander eineindeutig. Aus der Kenntnis von $A(x)$ oder $\widehat{A}(x)$ kann man die Folge (a_n) rekonstruieren.

Beispiel 3.2 Türme von Hanoi:

Das Problem besteht darin, die Steine einzeln so umzulagern, sodass nie ein größerer Stein auf einen kleineren gelegt wird (siehe Abbildung: 3.1).

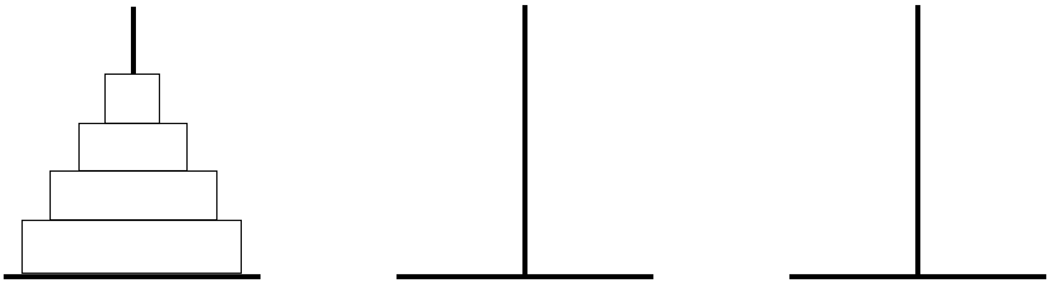

Abbildung 3.1: Abbildung der Türme von Hanoi

Es bezeichne nun a_n die minimale Anzahl von Zügen um einen Turm der Höhe n umzulegen. Nach kurzer Überlegung erkennt man die rekursive Beziehung:

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 2\,a_n + 1,$$

aus der man sofort die explizite Lösung

$$a_n = 2^n - 1$$

erraten (und mittels vollständiger Induktion auch beweisen kann).

Eine systematiche Vorgangsweise beruht auf erzeugenden Funktionen. Sei $A(x) = \sum_{n\geq 0} a_n \cdot x^n$. Aus der rekursiven Beziehung $a_{n+1} = 2a_n + 1$ kann man $A(x)$ (fast) direkt bestimmen und schließlich a_n ablesen:

$$\begin{aligned}
& a_n = 2\cdot a_{n-1} + 1 \qquad | \cdot x^n \qquad |\sum_{n\geq 1} \\
\Longrightarrow & \underbrace{\sum_{n\geq 1} a_n \cdot x^n}_{A(x)-a_0} = \underbrace{2\cdot \sum_{n\geq 1} a_{n-1}\cdot x^n}_{a_0\cdot x + a_1 \cdot x^2 + \ldots = x\cdot A(x)} + \sum_{n\geq 1} \cdot x^n \\
\Longrightarrow & \ A(x) = 2\cdot x \cdot A(x) + \frac{x}{1-x} \\
\Longrightarrow & \ A(x)\cdot (1-2\cdot x) = \frac{x}{1-x} \\
\Longrightarrow & \ A(x) = \frac{x}{(1-2\cdot x)\cdot(1-x)} = \underbrace{\frac{1}{1-2\cdot x}}_{\sum 2^n \cdot x^n} - \underbrace{\frac{1}{1-x}}_{\sum x^n} \\
\Longrightarrow & \ a_n = 2^n - 1.
\end{aligned}$$

Beispiel 3.3 Die *Fibonacci-Zahlen* sind durch

$$F_0 = 0, \qquad F_1 = 1, \qquad F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \qquad\qquad (n \geq 1)$$

gegeben, d.h. die nächstfolgende Fibonacci-Zahl berechnet sich aus der Summe der beiden vorangegangenen:

$$0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34, \ldots$$

Um eine explizite Formel für die Fibonacci-Zahlen zu erhalten, wendet man wieder die Methode der erzeugenden Funktionen an. Sei $F(x) = \sum_{n\geq 0} F_n \cdot x^n$ die erzeugende Funktion:

$$\begin{aligned}
& F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \qquad | \cdot x^n \quad |\sum_{n\geq 2} \\
\Longrightarrow & \sum_{n\geq 2} F_n \cdot x^n = \sum_{n\geq 2} F_{n-1}\cdot x^n + \sum_{n\geq 2} F_{n-2}\cdot x^n \\
\Longrightarrow & \ F(x) - \underbrace{F_1}_{=1} \cdot x - \underbrace{F_0}_{=0} = x \cdot (F(x) - \underbrace{F_0}_{=0}) + x^2 \cdot F(x) \\
\Longrightarrow & \ F(x) = \frac{x}{1-x-x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \underbrace{\frac{1}{1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot x}}_{\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot x^n} - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \underbrace{\frac{1}{1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\cdot x}}_{\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot x^n} \\
\Longrightarrow & \ F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).
\end{aligned}$$

Rationale Funktionen als erzeugende Funktionen:

Sei $\frac{f(x)}{g(x)}$ eine rationale Funktion mit grad $f <$ grad g, wobei der Nenner $g(x)$ die Faktorisierung

$$g(x) = c\cdot (x-x_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (x-x_r)^{k_r}$$

hat, wobei $x_1, \ldots, x_r$ die verschiedenen Nullstellen von $g(x)$ und $k_1, \ldots, k_r$ die entsprechenden Vielfachheiten bezeichnen.

Die Partialbruchzerlegung von $\frac{f(x)}{g(x)}$ kann folgendermaßen modifiziert dargestellt werden:

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{A_1}{(x-x_1)} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2} + \ldots + \frac{A_{k_1}}{(x-x_1)^{k_1}} + \ldots + \frac{C_1}{(x-x_r)} + \ldots + \frac{C_{k_r}}{(x-x_r)^{k_r}} \\
&= \frac{-\frac{A_1}{x_1}}{\left(1-\frac{x}{x_1}\right)} + \frac{\frac{A_1}{x_1^2}}{\left(1-\frac{x}{x_1}\right)^2} + \ldots + \frac{(-1)^{k_1}\frac{A_1}{x_1^{k_1}}}{\left(1-\frac{x}{x_1}\right)^{k_1}} + \ldots \\
&= \frac{A_1'}{1-\frac{x}{x_1}} + \frac{A_2'}{\left(1-\frac{x}{x_1}\right)^2} + \ldots + \frac{A_{k_1}'}{\left(1-\frac{x}{x_1}\right)^{k_1}} + \ldots.
\end{aligned}$$

Wegen

$$\frac{1}{(1-x)^k} = (1-x)^{-k} = \sum_{n\ge 0}\binom{-k}{n}\cdot(-x)^n = \sum_{n\ge 0}\binom{n+k-1}{k-1}\cdot x^n, \qquad \boxed{\textbf{UE}}$$

erhält man auch

$$\frac{1}{(1-\frac{x}{x_i})^k} = \sum_{n\ge 0}\binom{n+k-1}{k-1} x_i^{-n}\cdot x^n,$$

also

$$\frac{1}{1-\frac{x}{x_1}} = \sum_{n\ge 0} x_1^{-n}\cdot x^n, \qquad \frac{1}{\left(1-\frac{x}{x_1}\right)^2} = \sum_{n\ge 0}\frac{n+1}{x_1^n}\cdot x^n, \quad \ldots.$$

Man beachte, dass die Koeffizienten

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \frac{1}{(k-1)!}(n+1)\cdots(n+k-1)$$

Polynome in n vom Grad $k-1$ sind.
Schreibt man $\frac{f(x)}{g(x)} = \sum_{n\ge 0} a_n\cdot x^n$ als erzeugende Funktion an, so sind die Koeffizienten a_n durch

$$\begin{aligned}
a_n &= A_1'\cdot x_1^{-n} + A_2'\cdot\binom{n+1}{1}\cdot x_1^{-n} + \ldots + A_{k_1}'\cdot\binom{n+k_1-1}{k_1-1}\cdot x_1^{-n} + \ldots \\
&= \left(A_1' + A_1\cdot\binom{n+1}{1} + \ldots + \ldots\right)\cdot x_1^{-n} + \ldots + (\ldots)\cdot x_r^{-n} \\
&= P_{1,k_1-1}(n)\cdot x_1^{-n} + \ldots + P_{r,k_r-1}(n)\cdot x_r^{-n}
\end{aligned}$$

gegeben, wobei $P_{1,k_1-1}(n)$ ein Polynom in n vom Grad $\le k_1-1$ bezeichnet etc.

Lineare Rekursionen:

Eine lineare Rekursion (mit konstanten Koeffizienten) bestimmt eine Folge (a_n) durch die ersten r (Anfangs-)Werte $a_0, a_1, \ldots, a_{r-1}$ und durch eine Rekursion der Form

$$a_n = c_1\cdot a_{n-1} + c_2\cdot a_{n-2} + \ldots + c_r\cdot a_{n-r}$$

für $n\ge r$.
Beispielsweise sind die *Fibonaccizahlen* sind durch $F_0=0, F_1=1$ und durch die rekursive Beziehung $F_n = F_{n-1}+F_{n-2}$ gegeben. Hier ist $r=2$ und $c_1=c_2=1$.

Die erzeugende Funktion

$$A(x) = \sum_{n\ge 0} a_n\cdot x^n$$

einer Folge a_n, die durch eine lineare Rekursion gegeben ist, kann sofort explizit berechnet werden. Dazu multipliziert man $a_n = c_1\cdot a_{n-1} + c_2\cdot a_{n-2} + \ldots + c_r\cdot a_{n-r}$ mit x^n und schließt weiter:

$$a_n\cdot x^n = c_1\cdot a_{n-1}\cdot x^{n-1}\cdot x + \ldots + c_r\cdot a_{n-r}\cdot x^{n-r}\cdot x^n \qquad \Big|\sum_{n\ge r}$$

$$
\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad & \sum_{n\geq r} a_n \cdot x^n = c_1 \cdot \sum_{n\geq r} a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + c_r \cdot x^r \cdot \sum_{n\geq r} a_{n-r} \cdot x^{n-r} \\
\Longrightarrow \quad & A(x) - (a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_{r-1} \cdot x^{n-1}) \\
& = c_1 \cdot x \cdot [\, A(x) - (a_0 + \ldots + a_{r-2} \cdot x^{r-2})\,] + \ldots + c_r \cdot x^r \cdot A(x) \\
\Longrightarrow \quad & A(x) \cdot (1 - c_1 \cdot x - \ldots - c_r \cdot x^r) \\
& = \underbrace{a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_{r-1} \cdot x^{r-1} - c_1 \cdot x \cdot (a_0 + \ldots + a_{r-2} \cdot x^{r-2} - \cdots)}_{\text{Polynom } f(x) \text{ vom Grad } < r} \\
& = \frac{f(x)}{1 - c_1 \cdot x - \ldots - c_r \cdot x^r} \\
\Longrightarrow \quad & a_n = P_{1,k_1-1}(n) \cdot x_1^{-n} + \ldots + P_{l,k_l-1}(n) \cdot x_l^{-n},
\end{aligned}
$$

wobei $x_1, \ldots, x_r$ die verschiedenen Nullstellen von

$$1 - c_1 \cdot x - \ldots - c_r \cdot x^r,$$

$k_1, \ldots, k_l$ die entsprechenden Vielfachheiten und $P_{1,k_1-1}(x), \ldots, P_{l,k_l-1}(x)$ Polynome vom Grad $\leq k_1 - 1, \ldots, \leq k_l - 1$ bezeichnen.

Aus dieser Überlegung erhält man direkt den folgenden Satz.

Satz 3.1 *Sei (a_n) eine Folge, die durch eine lineare Rekursion der Form*

$$a_n = c_1 \cdot a_{n-1} + c_2 \cdot a_{n-2} + \ldots + c_r \cdot a_{n-r}$$

mit $c_r \neq 0$ gegeben ist und es seien $q_1, \ldots q_l$ die (verschiedenen) Nullstellen des **charakteristischen Polynom**

$$\chi(t) = t^r - c_1 \cdot t^{r-1} - \ldots - c_r$$

mit Vielfachheiten $k_1, \ldots k_l$. Dann hat a_n die Darstellung

$$a_n = P_{1,k_1-1}(n) \cdot q_1^n + \ldots + P_{l,k_l-1}(n) \cdot q_l^n,$$

wobei $P_{1,k_1-1}(x), \ldots, P_{l,k_l-1}(x)$ Polynome vom Grad $\leq k_1 - 1, \ldots, \leq k_l - 1$ bezeichnen.

Man beachte:

$$
\begin{aligned}
\chi(t) &= t^r - c_1 \cdot t^{r-1} - \ldots - c_r \\
&= t^r \cdot \left(1 - c_1 \cdot \frac{1}{t} - c_2 \cdot \left(\frac{1}{t}\right)^2 - \ldots - c_r \cdot \left(\frac{1}{t}\right)^r\right) \\
&= t^r \cdot g \cdot \left(\frac{1}{t}\right)
\end{aligned}
$$

Die Nullstellen von $q_1, \ldots q_l$ von $\chi(t)$ und die Nullstellen $x_1, \ldots x_l$ von $g(x)$ sind also zueinander reziprok:

$$q_1 = \frac{1}{x_1}, \ \ldots, \ q_l = \frac{1}{x_l}.$$

Beispiel 3.4 Man betrachte wieder die Fibonaccizahlen F_n, die durch $F_0 = 0, F_1 = 1$ und die Rekursion $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ (für $n \geq 2$) gegeben sind. Das charakteristische Polynom ist in diesem Fall

$$\chi(t) = t^2 - t - 1.$$

Die Nullstellen sind

$$q_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad q_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

mit Vielfachheit $k_1 = k_2 = 1$. Die Fibonaccizahlen müssen daher die Form

$$F_n = A \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

besitzen, wobei A, B gewisse Konstante (bzw. Polynome von Grad 0) bezeichnen.
Mit Hilfe der Anfangswerte $F_0 = 0, F_1 = 1$ kann man A und B bestimmen:

$$\begin{aligned} n = 0: &\qquad 0 = A + B \\ n = 1: &\qquad 1 = A \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} + B \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \Longrightarrow &\qquad A = \frac{1}{\sqrt{5}}, \qquad B = \frac{1}{\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

Also

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Beispiel 3.5 Das charakteristische Polynom der Rekursion

$$a_n = 4 \cdot a_{n-1} - 4 \cdot a_{n-2}$$

ist

$$\chi(t) = t^2 - 4t + 4 = (t-2)^2.$$

Hier ist $q_1 = 2$ die einzige Nullstelle mit Vielfachheit $k_1 = 2$. Die Folge a_n hat daher die Form

$$a_n = (A + B \cdot n) \cdot 2^n = A \cdot 2^n + B \cdot n \cdot 2^n.$$

Bemerkung 1. Der Zusammenhang zwischen den Nullstellen von $\chi(t)$ und der Gestalt der expliziten Gestalt von a_n kann auch folgendermaßen erklärt werden.
Man verwendet den *Ansatz* $a_n = q^n$, also man nimmt an, dass a_n eine geometrische Folge ist. Dann muss

$$q^n = c_1 q^{n-1} + \cdots + c_r q^{n-r}$$

oder nach Division durch q^{n-r}

$$q^r = c_1 q^{r-1} + \cdots + c_r q^{r-1}$$

gelten, also $\chi(q) = 0$. Also sind $a_n = q_1^n$, $a_n = q_2^n$, …, $a_n = q_l^n$ alles Lösungen der linearen Rekursion. Wegen der Linearität ist dann auch die Linearkombination

$$a_n = A_1 q_1^n + A_2 q_2^n + \cdots + A_l q_l^n$$

Lösung der Rekursion (mit beliebigen Konstanten $A_1, A_2, \ldots, A_l$.)

Beispielsweise führt dies bei $a_n = 4 \cdot a_{n-1} - 4 \cdot a_{n-2}$ zum Ansatz

$$q^n = 4 \cdot q^{n-1} - 4 \cdot q^{n-2} \qquad | : q^{n-2}$$

und damit zu

$$q^2 = 4 \cdot q - 4 \quad \text{bzw. zu} \quad q^2 - 4q + 4 = (q-2)^2 = 0.$$

Daraus ergibt sich aus dieser Überlegung nur eine Lösung der Form $a_n = A2^n$. Der fehlende Term $Bn2^n$ (der durch die Vielfachheit $k_1 = 2$ bedingt ist) kann auf diese Weise nicht abgelesen werden. Sind allerdings alle Nullstellen von $\chi(t)$ einfach, so liefert diese Ansatzmethode die vollständige Lösung.

Bemerkung 1. Die Methode der erzeugenden Funktionen kann auch für allgemeinere (d.h. inhomogene linerare) Rekursionen verwendet werden. Ist beispielsweise b_n eine vorgegeben Folge und a_n rekursiv durch

$$a_n = 2 \cdot a_{n-1} + b_n$$

gegeben, so erhält man nach Multiplikation mit x^n und Summation $\sum_{n\ge1}$

$$A(x) - a_0 = xA(x) + B(x)$$

oder

$$A(x) = \frac{a_0 + B(x)}{1-x},$$

wobei $B(x) = \sum_{n\ge1} b_n x^n$ die erzeugende Funktion von b_n bezeichnet. Daraus kann man in vielen Fällen a_n (wieder) explizit berechnen oder (wenigsten) asymptotische Eigenschaften für a_n ableiten.

Dafür benötigt man auch Methoden, die erzeugende Funktion von gegebenen Folgen b_n zu bestimmen. Es sei z.B. $b_n = n^2$. Hier führt folgende einfache Vorgangsweise zum Ziel. Man startet mit der geometrischen Reihe und differenziert (und multipliziert an geeigneter Stelle mit x):

$$\begin{aligned}
& & \frac{1}{1-x} &= \sum_{n\ge0} x^n \\
&\Longrightarrow & \left(\frac{1}{1-x}\right)' &= \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n\ge0} n x^{n-1} \\
&\Longrightarrow & \frac{x}{(1-x)^2} &= \sum_{n\ge0} n x^n \\
&\Longrightarrow & \left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)' &= \frac{1+x}{(1-x)^3} = \sum_{n\ge0} n^2 x^{n-1} \\
&\Longrightarrow & \frac{x+x^2}{(1-x)^3} &= \sum_{n\ge0} n^2 x^n.
\end{aligned}$$

Es wurde also das Prinzip

$$A(x) = \sum_{n\ge0} a_n x^n \quad \Longrightarrow \quad xA'(x) = \sum_{n\ge0} n a_n x^n$$

verwendet.
Wir verwenden (um weitere *Rechenregeln*) einfach darstellen zu können die Notation

$$a_n \leftrightarrow A(x) \quad \Longrightarrow \quad n a_n \leftrightarrow xA'(x)$$

Rechenregeln für erzeugende Funktionen:

Es sei $A(x)$ die erzeugende Funktion der Folge a_n und $B(x)$ die erzeugende Funktion der Folge b_n, also

$$a_n \leftrightarrow A(x), \qquad b_n \leftrightarrow B(x).$$

Dann folgt

$$\begin{aligned}
\lambda \cdot a_n + \mu \cdot b_n &\leftrightarrow \lambda \cdot A(x) + \mu \cdot B(x) \\
\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k} &\leftrightarrow A(x) \cdot B(x) \\
\sum_{k=0}^{n} a_k &\leftrightarrow \frac{1}{1-x} \cdot A(x) \\
a_n \cdot \gamma^n &\leftrightarrow A \cdot (\gamma \cdot x) \\
a_{n-1} &\leftrightarrow x \cdot A(x) \\
n \cdot a_n &\leftrightarrow x \cdot A'(x)
\end{aligned}$$

Beispiel 3.6 Man suche eine einfache Darstellung von

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} k.$$

Dazu bestimme man die erzeugende Funktion von a_n mit Hilfe der obigen Rechenregeln:

$$\begin{aligned}
1 &\leftrightarrow \frac{1}{1-x} \\
n &\leftrightarrow \frac{x}{(1-x)^2} \\
a_n = \sum_{k=0}^{n} k &\leftrightarrow \frac{1}{1-x} \cdot \frac{x}{(1-x)^2} = \frac{x}{(1-x)^3}.
\end{aligned}$$

Daher gilt

$$a_n = \binom{n-1+2}{2} = \binom{n+1}{2} = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

Rechenregeln für exponentielle erzeugende Funktionen:

Es sein jetzt $\widehat{A}(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n/n!$ die exponentielle erzeugende Funktion der Folge a_n und $\widehat{B}(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n/n!$ die exponentielle erzeugende Funktion der Folge b_n. Wir bezeichnen das wieder durch

$$a_n \leftrightarrow \widehat{A}(x), \qquad b_n \leftrightarrow \widehat{B}(x).$$

Hier gelten die Rechenregeln

$$\begin{aligned}
\lambda \cdot a_n + \mu \cdot b_n &\quad\leftrightarrow\quad \lambda \cdot \widehat{A}(x) + \mu \cdot \widehat{B}(x) \\
\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k \cdot b_{n-k} &\quad\leftrightarrow\quad \widehat{A}(x) \cdot \widehat{B}(x) \\
\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k &\quad\leftrightarrow\quad e^x \cdot \widehat{A}(x) \qquad\qquad (b_n = 1) \\
a_n \cdot \gamma^n &\quad\leftrightarrow\quad \widehat{A}(\gamma \cdot x) \\
a_{n-1} &\quad\leftrightarrow\quad \widehat{A}'(x) \\
n \cdot a_n &\quad\leftrightarrow\quad x \cdot \widehat{A}'(x).
\end{aligned}$$

3.2 Unmarkierte kombinatorische Strukturen – Kombinationen

Beispiel 3.7 Wir betrachten Kombinationen von weißen, gelben und roten Kugeln mit folgenden Einschränkungen:

- 2 oder 3 weiße Kugeln $\quad w^2 + w^3 = ww + www$
- mindestens 1 gelbe Kugel $\quad g + g^2 + g^3 + \ldots = \frac{g}{1-g}$
- höchstens 1 rote Kugel $\quad r^0 + r = 1 + r$

Die danebenstehenden *erzeugenden Funktionen* kodieren die Farbe und die Einschränkungen in geeigneter Weise.

Betrachtet man nun die möglichen **Kombinationen** von solchen weißen, gelben und roten Kugeln mit den gegeben Einschränkungen, so kann man die korrespondierenden erzeugenden Funktionen einfach miteinander multiplizieren und erhält eine erzeugende Funktion in drei *Veränderlichen* w, r und g, die alle Kombinationen auflistet:

$$(w^2 + w^3) \cdot (g + g^2 + g^3 + \ldots) \cdot (1 + r) = w^2 \cdot g + w^2 \cdot g^2 + w^2 \cdot g^3 + \ldots + w^2 \cdot g \cdot r + w^2 \cdot g^2 \cdot r + \ldots.$$

Dieses Prinzip kann auch verwendet werden, die Anzahl von dieser Kombinationen von n weißen, gelben und roten Kugeln unter diesen Einschränkungen zu bestimmen.

Setzt man

$$w = g = r = x,$$

so gibt der Koeffizient von x^n in der erzeugenden Funktion die entsprechende Anzahl a_n der Kombinationen an:

$$\sum_{n \geq 0} a_n x^n = (x^2 + x^3) \cdot \frac{x}{1-x} \cdot (1 + x).$$

Aus dieser expliziten Gestalt kann man leicht a_n ablesen:

$$a_0 = a_1 = 0, \; a_2 = 1, \; a_3 = 3, \; a_n = 4 \; (n \geq 4).$$

Beispiel 3.8 *Kombinationen ohne Wiederholung:*

Man betrachte Kombinationen von N verschiedenen Elementen (oder Kugelsorten) $a_1, \ldots, a_N$ mit der Einschränkung, dass jedes Element höchstens einmal auftreten darf. Die entsprechende erzeugende Funktion ist:

$$(1 + a_1) \cdot (1 + a_2) \cdot \ldots \cdot (1 + a_N).$$

Um die Anzahl der Kombinationen zu bestimmen, bei denen genau n Elemente tatsächlich auftreten (das ist genau die Anzahl der Möglichkeiten aus N Elementen, n auszuwählen), setzt man

$$a_1 = \ldots = a_N = x$$

und erhält die erzeugende Funktion

$$(1 + x)^N = \sum_{n \geq 0} \binom{N}{n} x^n.$$

Die Anzahl der Möglichkeiten, aus N Elementen, n auszuwählen ist daher

$$\binom{N}{n}.$$

Beispiel 3.9 *Kombinationen mit Wiederholung:*

Man betrachte Kombinationen von N verschiedenen Elementen (oder Kugelsorten) $a_1, \ldots, a_N$ ohne Einschränkung. Die entsprechende erzeugende Funktion ist:

$$(1 + a_1 + a_1^2 + \ldots) \cdot (1 + a_2 + a_2^2 + \ldots) \cdot \ldots \cdot (1 + a_N + a_N^2 + \ldots).$$

Für die Anzahlbestimmung setzt man wieder $a_1 = a_2 = \ldots = a_N = x$. Die erzeugende Funktion ist daher

$$\left(\frac{1}{1 - x}\right)^N = \sum_{n \geq 0} \binom{n + N - 1}{N - 1} \cdot x^n = \sum_{n \geq 0} \binom{N + n - 1}{n} x^n.$$

Daher gibt es

$$\binom{N + n - 1}{n} = \binom{n + N - 1}{N - 1}$$

Möglichkeiten, aus Kombinationen von N Elementen (ohne Einschränkung, d.h. mit beliebier Wiederholungsmöglichkeit) mit insgesamt n Stück zu bilden.

Beispiel 3.10 *Ebene Wurzelbäume:*

Ebene Wurzelbäume haben eine rekursive Beschreibung: sie bestehen aus einer Wurzel, an der entweder nichts, ein Wurzelbaum, zwei Wurzelbäume (wobei die Reihenfolge wesentlich ist), drei Wurzelbäume etc. *anschließen* (vergleiche mit Abbildung 3.2).

Diese rekursive Beschreibung kann als Gleichung der erzeugenden Funktion $P(x) = \sum_{n \geq 0} p_n x^n$ (wobei p_n die Anzahl der ebenen Wurzelbäume mit n Knoten bezeichnet) beschrieben werden:

$$P(x) = x + x \cdot P(x) + P(x) + \ldots = \frac{x}{1 - P(x)}.$$

Daraus kann $P(x)$ explizit berechnet werden. Die sich ergebende quadratische Gleichung

$$P(x)^2 - P(x) + x = 0$$

hat die Lösung

$$P(x) = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - x} = \frac{1 - \sqrt{1 - 4 \cdot x}}{2}.$$

(Die potentielle Lösung $P(x) = (1 + \sqrt{1 - 4 \cdot x})/2$ scheidet aus, da die Koeffizienten negativ sind.)

Daraus können die Koeffizienten abgelesen werden:

$$p_n = -\frac{1}{2} \cdot (-4)^n \cdot \binom{\frac{1}{2}}{n} = \frac{1}{n} \cdot \binom{2n - 2}{n - 1}.$$

Diese Zahlen heißen auch *Catalanzahlen.* Z.B. ergibt sich

$$p_3 = \frac{1}{3} \cdot \binom{4}{2} = 2,$$

er gibt 2 verschiedene ebene Wurzelbäume mit 3 Knoten.

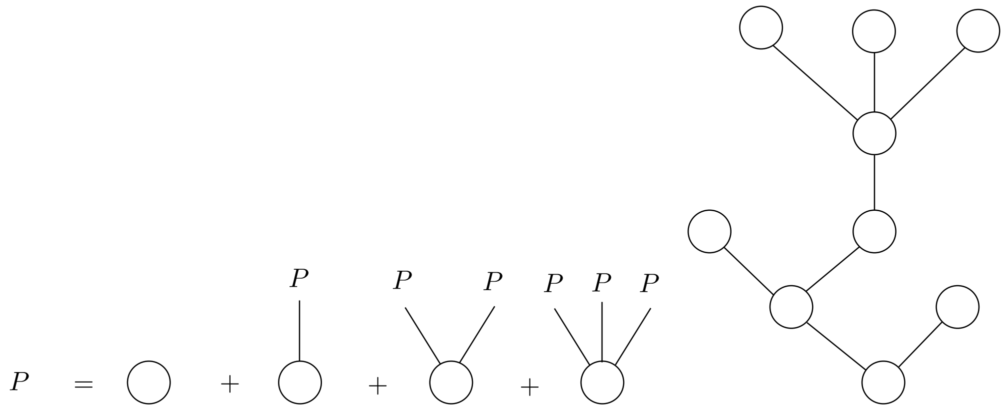

Abbildung 3.2: Ebene Wurzelbäume

3.3 Markierte kombinatorische Konstruktionen – Variationen

Bei Variationen (bzw. bei markierten kombinatorischen Konstruktionen) spielt die *Reihenfolge* der Objekte ein Rolle.

2 Kugeln: r, g

1. Kombinationen $\qquad r \cdot g = g \cdot r$
2. Variationen $\qquad r \cdot g \neq g \cdot r$

Allgemein entsprechen einer Kombination von n verschiedenen Objekten $n!$ Variationen . Um diesem Umstand Rechnung zu tragen, verwendet man bei Variationen anstelle der gewöhnichen erzeugenden Funktionen die *expoentiellen erzeugenden Funktionen* für die Anzahlen a_n:

$$\widehat{A}(x) = \sum_{n \geq 0} a_n \cdot \frac{x^n}{n!}.$$

Beispiel 3.11 Wir betrachten Variationen von weißen, gelben und roten Kugeln mit folgenden Einschränkungen:

- 2 oder 3 weiße Kugeln $\qquad \frac{w^2}{2!} + \frac{w^3}{3!}$
- mindestens 1 gelbe Kugel $\qquad g + \frac{g^2}{2!} + \frac{g^3}{3!} + \ldots = e^g - 1$
- höchstens 1 rote Kugel $\qquad r^0 + r = 1 + r$

Die danebenstehenden *erzeugenden Funktionen* kodieren wieder die die möglichen Variationen. Allerdings ist es jetzt **nicht mehr möglich**, durch Produktbildung eine erzeugende Funktion aller Variaionen dieser verschieden gefärbten Kugeln (mit den geannten) Einschränkungen zu bekommen.
Wenn man allerdings nur an der *Anzahl* a_n der Variationen (von n Kugeln mit den geannten Einschränkungen) interessiert ist, funktioniert das Verfahren wie bei den Kombinationen.
Man setzt

$$w = g = r = x,$$

und erhält

$$\sum_{n \geq 0} a_n \cdot \frac{x^n}{n!} = \left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}\right) \cdot \left(x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\right) \cdot (1+x) = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right) \cdot (e^x - 1) \cdot (1+x)$$

Daraus kann man a_n wieder ablesen. $\boxed{\textbf{UE}}$

Beispiel 3.12 *Kombinationen ohne Wiederholung:*

Man betrachte Variationen von N verschiedenen Elementen (oder Kugelsorten) $a_1, \ldots, a_N$ mit der Einschränkung, dass jedes Element höchstens einmal auftreten darf. Die entsprechende (exponentiellen) erzeugenden Funktion sind:

$$1 + a_1,\ 1 + a_2,\ \ldots,\ 1 + a_N.$$

Um die Anzahl der Variationen zu bestimmen, bei denen genau n Elemente tatsächlich auftreten (das ist genau die Anzahl der Möglichkeiten aus N Elementen, n auszuwählen, wobei die Reihenfolge eine Rolle spielt), setzt man

$$a_1 = \ldots = a_N = x$$

und erhält die erzeugende Funktion

$$(1+x)^N = \sum_{n \geq 0} \binom{N}{n} x^n = \sum_{n=0}^{N} \frac{N!}{n! \cdot (N-n)!} \cdot x^n = \sum_{n=0}^{N} \frac{N!}{(N-n)!} \cdot \frac{x^n}{n!}$$

Die Anzahl der Möglichkeiten, aus N Elementen, n auszuwählen ist daher

$$\frac{N!}{(N-n)!} = N \cdot (N-1) \cdot \ldots \cdot (N \times N - 1).$$

Beispiel 3.13 *Variationen mit Wiederholung:*

Man betrachte Variationen von N verschiedenen Elementen (oder Kugelsorten) $a_1, \ldots, a_N$ ohne Einschränkung. Die entsprechenden (exponentiellen) erzeugenden Funktionen sind:

$$1 + a_1 + \frac{a_1^2}{2!} + \ldots,\ \ldots,\ 1 + a_N + \frac{a_N^2}{2!} + \ldots.$$

Für die Anzahlbestimmung setzt man wieder $a_1 = a_2 = \ldots = a_N = x$ und erhält

$$e^x \cdot \ldots \cdot e^x = e^{N \cdot x} = \sum_{n \geq 0} \frac{(N \cdot x)^n}{n!} = \sum_{n \geq 0} N^n \cdot \frac{x^n}{n!}.$$

Daher gibt es

$$N^n$$

Möglichkeiten, Variationen von N Elementen (ohne Einschränkung, d.h. mit beliebier Wiederholungsmöglichkeit) mit insgesamt n Stück zu bilden.

Kapitel 4

Graphentheorie

4.1 Grundlegende Begriffe:

Definition 4.1 *Ein* **Graph** $G = (V, E)$ *besteht aus einer Knotenmenge* $V = V(G)$ *und einer Kantenmenge* $E = E(G)$*. Dabei ist eine Kante* $e \in E(G)$ *entweder* **gerichtet***, d.h. ein geordnetes Paar* $e = \langle v_1, v_2 \rangle$ *von zwei Knoten* $v_1, v_2 \in V(G)$*, oder* **ungerichtet***, d.h. ein ungeordnetes Paar* $e = (v_1, v_2)$ *von zwei Knoten* $v_1, v_2 \in V(G)$*.*[1] *Im gerichtete Fall heißt* v_1 **Anfangsknoten** *und* v_2 **Endknoten** *von* e*.*
Sind alle Kanten $e \in E(G)$ *gerichtet, so spricht man von einem* **gerichteten Graphen***, sind hingegen alle Kanten* $e \in E(G)$ *ungerichtet, so heißt* G **ungerichteter Graph***.*[2]

In der obigen Definition sind auch Kanten der Form $\langle v, v \rangle$ (bzw. (v, v)) zugelassen. So eine Kante heißt auch **Schlinge**.

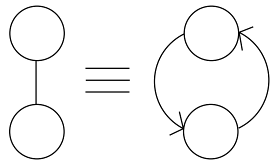

Abbildung 4.1: Interpretation einer ungerichteten Kante als Paar gerichteter Kanten.

Sind zwei Knoten v, w eines Graphen durch eine Kante verbunden, so heißen v und w auch **adjazent**. Weiters **inzidieren** Knoten v, w mit einer Kante, die sie verbindet.
Die Anzahl der Knoten eines Graphen G wird auch mit $\alpha_0(G) = |V(G)|$ und die Anzahl der Kanten mit $\alpha_1(G) = |E(G)|$ bezeichnet.
Es ist auch möglich, Graphen mit **Mehrfachkanten** zu betrachten. Hier kann man aber Kanten nicht mehr mit Paaren von Knoten identifieren. Einer allgemeinen Kante e werden zwei Knoten v_1, v_2 zugeordnet, die als Anfangs- bzw. Endknoten interpretiert werden können. Zwei verschiedene Kanten können daher (in diesem Rahmen) durchaus dieselben Anfangs- und Endknoten besitzen.

Definition 4.2 *Ein Graph* $G = (V, E)$ *heißt* **schlicht** *oder* **einfach***, wenn* G *keine Schlingen (und keine Mehrfachkanten) enthält.*

Definition 4.3 *In einem schlichten ungerichteten Graphen* G *heißen die zu* $v \in V(G)$ *adjazenten Knoten*

$$\Gamma(v) = \{w \in V(G) \,|\, (v, w) \in E(G)\}$$

Nachbarn *von* v*.*
Die Anzahl

$$d(v) = |\Gamma(v)| = |\{w \in V(G) \,|\, (v, w) \in E(G)\}|$$

[1] Diese Notation der geordneten bzw. ungeordneten Paare weicht ein wenig von der bisher verwendeten ab, wo (a, b) ein geordnetes Paar bezeichnet hat.
[2] Ein Graph ist natürlich eine alternative Beschreibung einer binären Relation auf einer Menge V. Dabei beschreibt ein gerichteter Graph eine allgemeine Relation und ein ungerichteter Graph eine symmetrische Relation.

der Nachbarn von $v \in V(G)$ ist der **Knotengrad** *von $v \in V(G)$*
In einem gerichteten Graphen G heißen die Elemente von

$$\Gamma^+(v) = \{w \in V(G) \,|\, \langle v, w\rangle \in E(G)\}$$

Nachfolger *des Knoten $v \in V(G)$ und*

$$\Gamma^-(v) = \{w \in V(G) \,|\, \langle w, v\rangle \in E(G)\}$$

Vorgänger *von $v \in V(G)$. $\Gamma(v) = \Gamma^+(v) \cup \Gamma^-(v)$ bilden die Nachbarn von $v \in V(G)$.*
Die Anzahl

$$d^+(v) = |\Gamma^+(v)| = |\{w \in V(G) \,|\, \langle v, w\rangle \in E(G)\}|.$$

der Nachfolger von $v \in V(G)$ ist der **Weggrad** *von $v \in V(G)$.*
Die Anzahl

$$d^-(v) = |\{w \in V(G) \,|\, \langle w, v\rangle \in E(G)\}|.$$

der Vorgänger von $v \in V(G)$ ist der **Hingrad** *von $v \in V(G)$*

Man beachte, daß bei gerichteten Graphen in dieser Definition Schlingen zugelassen sind. Ließe man auch im ungerichteten Fall Schlingen zu, so müßten diese bei der Gradberechnung doppelt gezählt werden.

Satz 4.1 *In einem schlichten ungerichteten Graphen G gilt*

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2|E(G)|.$$

In einem ungerichteten Graphen G gilt hingegen

$$\sum_{v \in V(G)} d^+(v) = \sum_{v \in V(G)} d^-(v) = |E(G)|.$$

Teilgraphen

Definition 4.4 *Ein Graph $G' = (V', E')$ heißt* **Teilgraph** *eines Graphen $G = (V, E)$ wenn $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$ gelten.*
Ein Teilgraph $G' = (V', E')$ eines Graphen $G = (V, E)$ heißt **induzierter Teilgraph**, *wenn E' alle Kanten aus E enthält, für die Anfangs-, und Endknoten in V' liegen, d.h. E' muß nicht extra angegeben werden, sondern wird durch Vorgabe von G und V' induziert.*

4.1.1 Kantenfolgen

Definition 4.5 *Eine Folge von Kanten $e_1, e_2, \ldots, e_k \in E(G)$ eines ungerichteten Graphen G heißt* **Kantenfolge**, *wenn es Knoten $v, v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, w \in V(G)$ mit*

$$e_1 = (v, v_1), e_2 = (v_1, v_2), \ldots, e_{k-1} = (v_{k-2}, v_{k-1}), e_k = (v_{k-1}, w)$$

gibt, d.h. man kann die Kanten $e_1, e_2, \ldots, e_k$ "ohne Absetzen" *durchlaufen. Man sagt auch daß die Kantenfolge e_j $(1 \leq j \leq k)$ die Knoten v und w verbindet. Die Anzahl k der Kanten ist die* **Länge** *der Kantenfolge. Eine Kantenfolge der Länge 0 besteht aus keiner Kante und wird als* **leere Kantenfolge** *bezeichnet. Sie verbindet jeden Knoten mit sich selbst.*
Eine Folge von Kanten $e_1, e_2, \ldots, e_k \in E(G)$ eines gerichteten Graphen G heißt **Kantenfolge**, *wenn für je zwei aufeinanderfolgende Kanten e_j, e_{j+1} $(1 \leq j < k)$ der Endknoten von e_j mit dem Anfangsknoten von e_{j+1} übereinstimmt, d.h. es gibt Knoten $v, v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, w$ mit*

$$e_1 = \langle v, v_1\rangle, e_2 = \langle v_1, v_2\rangle, \ldots, e_{k-1} = \langle v_{k-2}, v_{k-1}\rangle, e_k = \langle v_{k-1}, w\rangle.$$

Wiederum spricht man von einer Kantenfolge, die die Knoten v und w (gerichtet) verbindet, v ist der Anfangsknoten und w der Endknoten. Ebenso ist k die Länge der Kantenfolge.
Ein Knoten w ist von einem Knoten v aus **erreichbar**, *wenn es eine Kantenfolge gibt, die v mit w verbindet.*
Eine Kantenfolge $e_1, e_2, \ldots, e_k \in E(G)$ in einem Graphen G heißt **Kantenzug**, *wenn alle Kanten e_j $(1 \leq j \leq k)$ voneinander verschieden sind.*

Eine Kantenfolge $e_1, e_2, \ldots, e_k \in E(G)$ in einem Graphen G heißt **Weg** *(in einem ungerichtete Graphen) bzw.* **Bahn** *(in einem gerichtete Graphen), wenn alle Knoten, die mit den Kanten e_j $(1 \leq j \leq k)$ inzidieren, voneinander verschieden sind.*
Verbindet eine Kantenfolge (resp. ein Kantenzug resp. ein Weg oder Bahn) die Knoten v und w, so bezeichnet man dies auch durch $KF(v,w)$ (resp. durch $KZ(v,w)$ resp. durch $W(v,w)$).
Eine Kantenfolge, die einen Knoten $v \in V(G)$ mit sich selbst verbindet, heißt **geschlossen**.
Eine geschlossene Kantenfolge $K(v,v)$ in einem ungerichteten Graphen heißt **Kreis**, *wenn alle Knoten dieser Kantenfolge mit Ausnahme von v voneinander verschieden sind und keine Kante mehrfach vorkommt.*
Eine geschlossene Kantenfolge $K(v,v)$ in einem gerichteten Graphen heißt **Zyklus**, *wenn alle Knoten dieser Kantenfolge mit Ausnahme von v voneinander verschieden sind.*

Die Erreichbarkeitsrelation kann nicht nur durch Kantenfolgen beschrieben werden.

Satz 4.2 *Werden in einem Graphen G zwei verschiedene Knoten v, w durch eine Kantenfolge verbunden, so gibt es auch einen Weg bzw. Bahn, der v mit w verbindet und nur Kanten aus der ursprünglichen Kantenfolge enthält.*

Bei geschlossenen Kantenfolgen ist die Situation ein wenig differenzierter.

Satz 4.3 *Gibt es in einem ungerichteten Graphen zwei (verschiedenen) Knoten v, w und zwei verschiedene Wege, die diese Knoten verbinden, dann gibt einen Kreis positiver Länge, der nur Kanten aus diesen beiden Wegen enthält.*
Gibt es in einem gerichteten Graphen G eine geschlossene Kantenfolge positiver Länge, so gibt es auch einen Zyklus positiver Länge, der nur Kanten aus der ursprünglichen geschlossenen Kantenfolge enthält.

Isomorphe Graphen

Definition 4.6 *Zwei Graphen G_1, G_2 heißen* **isomorph**, *wenn es eine bijektive Abbildung*

$$\phi : V(G_1) \to V(G_2)$$

gibt, so daß eine Kante (v,w) (bzw. $\langle v,w \rangle$) genau dann in $E(G_1)$ enthalten ist, wenn die Kante $(\phi(v), \phi(w))$ (bzw. $\langle \phi(v), \phi(w) \rangle$) in $E(G_2)$ enthalten ist.

Insbesondere heißt ein Isomorphimus $\phi : V(G) \to V(G)$ auf einem Graphen $G = (V,E)$ **Automorphismus**. Die Menge aller Automorphisen $\mathrm{Aut}(G)$ eines Graphen $G = (V,E)$ bildet mit der Hintereinanderausführung eine Gruppe, die sogenannte **Automorphismengruppe** von $G = (V,E)$.

Adjazenzmatrix

Definition 4.7 *Sei G ein Graph mit Knotenmenge $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Die* **Adjazenzmatrix** $A(G) = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ *ist durch*

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } (v_i, v_j) \in E(G) \text{ bzw. } \langle v_i, v_j \rangle \in E(G), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben.

Man beachte, daß die Adjazenzmatix eines ungerichteten Graphen immer symmetrisch ist.
Schlingen äußern sich in der Adjazenzmatrix durch Einträge 1 in der Diagonale. Schlichte Graphen haben daher eine symmetrische Adjazenzmatrix mit verschwindender Diagonale.
Es ist auch sinnvoll, Graphen mit Mehrfachkanten eine Adjazenzmatrix zuzuorden, wo a_{ij} die *Anzahl* der Kanten von v_i nach v_j bezeichnet.

Beispiel 4.1 *(siehe Abbildung 4.2)*

$$A(G) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

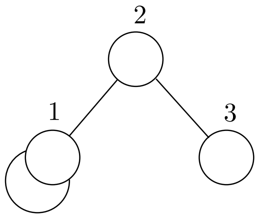

Abbildung 4.2: Beispiel eines ungerichteten Graphen mit einer Schlinge

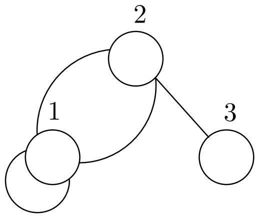

Abbildung 4.3: Beispiel eines Graphen mit einer Schlinge und einer Mehrfachkante

Beispiel 4.2 *(siehe Abbildung 4.3)*

$$A(G) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Mit Hilfe der Adjazenzmatrix $A(G)$ eines Graphen lassen sich direkt die Knotengrade ablesen.

Satz 4.4 *Sei $A(G) = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ die Adjazenzmatrix eines Graphen G mit Knotenmenge $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Ist G schlicht und ungerichtet, so gilt*

$$d(v_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}.$$

Ist G gerichtet, so gilt entsprechend

$$d^+(v_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \quad \textit{und} \quad d^-(v_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}.$$

Satz 4.5 *Sei $A(G) = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ die Adjazenzmatrix eines Graphen G mit Knotenmenge $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Dann ist der Eintrag $a_{ij}^{[k]}$ der k–ten Potenz der Adjazenzmatrix*

$$A(G)^k = (a_{ij}^{[k]})_{1 \le i,j \le n}$$

die Anzahl der Kantenfolgen der Länge k von v_i nach v_j.

Mit Hilfe dieses Satzes läßt sich auch die **Erreichbarkeitsrelation** beschreiben.

Satz 4.6 *Sei $A(G) = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ die Adjazenzmatrix eines Graphen G mit Knotenmenge $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ und m Kanten. Weiters sei die Matrix $C = (c_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ durch*

$$C = \sum_{k=0}^{m-1} A(G)^k$$

gegeben. Dann ist v_j von v_i genau dann erreichbar, wenn $c_{ij} > 0$ ist.

Zusammenhang

Definition 4.8 *Ein ungerichteter Graph G heißt* **zusammenhängend***, wenn es zwischen je zwei Knoten $v, w \in V(G)$ eine Kantenfolge $KF(v, w)$ (bzw. einen Weg $W(v, w)$) gibt.*
Die maximalen zusammenhängenden Teilgraphen eines ungerichteten Graphen G heißen **(Zusammenhangs-) Komponenten** *von G.*

Ein Graph G ist daher genau dann zusammenhängend, wenn er nur aus einer Zusammenhangskomponente besteht.

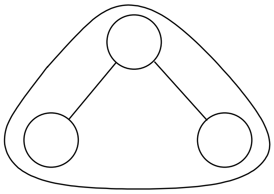

Abbildung 4.4: Zusammenhangskomponenten sind zusammenhängende Teilgraphen

Definition 4.9 *Ein gerichteter Graph G heißt* **stark zusammenhängend***, wenn für je zwei (verschiedene) Knoten $v, w \in V(G)$ eine (gerichtete) Kantenfolge $KF(v, w)$ (bzw. ein Bahn $W(v, w)$) existiert.*
Die maximalen stark zusammenhängenden Teilgraphen eines gerichteten Graphen G heißen **starke Zusammenhangskomponenten** *oder* **Komponenten des starken Zusammenhangs** *von G.*

Definition 4.10 *Der Schatten G^u eines gerichteten Graphen G ist ein ungerichteter Graph mit der selben Knotenmenge wie G ($V(G^u) = V(G)$) und (v, w) ist eine (ungerichtete) Kante von G', wenn $\langle v, w\rangle$ oder $\langle w, v\rangle$ in $E(G)$ enthalten sind, d.h. gerichtete Kanten werden einfach durch ungerichtete ersetzt.*
Ein gerichteter Graph G heißt **schwach zusammenhängend***, wenn der Schatten G^u zusammenhängend ist. Entsprechend sind die* **schwachen Zusammenhangskomponenten** *die Komponenten von G^u.*

Die Komponenten des schwachen Zusammenhangs können daher wie im ungerichteten Fall bestimmt werden.

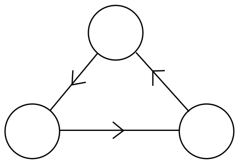

Abbildung 4.5: Stark zusammenhängender Graph

4.2 Bäume und Wälder

Definition 4.11 *Ein schlichter ungerichteter Graph W, der keine Kreise enthält, heißt* **Wald***.*
Ein Wald T, der auch zusammenhängend ist, heißt **Baum***.*

Die Zusammenhangskomponenten eines Waldes sind Bäume.
Man beachte, daß in einem Baum T zu je zwei Knoten v, w genau einen Weg $W(v, w)$ gibt. (Da T zusammenhängend ist, muß es es einen Weg $W(v, w)$ geben. Gäbe es aber einen weiteren von $W(v, w)$ verschiedenen Weg, $\tilde{W}(v, w)$, so müßte es auch einen Kreis positiver Länge, was aber definitionsgemäß ausgeschlossen ist.) Die Länge dieses Weges $W(v, w)$ bezeichnet man als den **Abstand** $d_T(v, w)$.

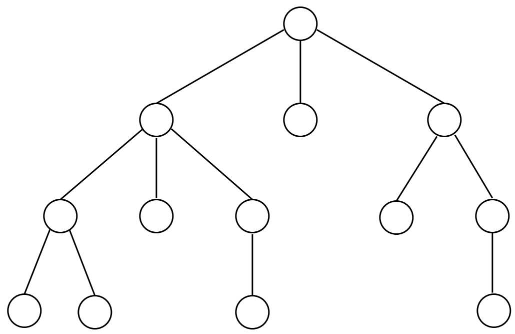

Abbildung 4.6: Wurzelbaum

Satz 4.7 *Für einen Baum T gilt*

$$\alpha_0(T) = \alpha_1(T) + 1.$$

Entsprechend gilt für einen Wald W mit k Komponenten

$$\alpha_0(W) = \alpha_1(W) + k.$$

Zeichnet man in einem Baum einen Knoten $w \in E(T)$ (**Wurzel**) aus, so kann man sich die Struktur eines Baumes sehr einfach verdeutlichen. Zeichnet man in einer graphischen Darstellung die Nachbarn von w oberhalb von w und deren Nachbarn (mit der Ausnahme w) wieder darüber usw., so entsteht tatsächlich ein Bild, das einem Baum ähnelt.
Man beachte, daß hier tatsächlich von jedem Knoten in neue Knoten verzweigt wird, da ein Baum definitionsgemäß kreisfrei ist.

Spannende Bäume und Gerüste

Definition 4.12 *Ein* **spannender Baum** *T eines schlichten ungerichteten zusammenhängenden Graphen G ist ein Baum mit $V(T) = V(G)$ und $E(T) \subseteq E(G)$, d.h. er enthält dieselben Knoten wie G und gewisse Kanten von G.*
Ein **Gerüst** *oder* **spannender Wald** *W eines schlichten ungerichteten Graphen G ist ein Wald mit $V(W) = V(G)$ und $E(W) \subseteq E(G)$ und denselben Zusammenhangskomponenten wie G, d.h. schränkt man W auf eine Zusammenhangskomponente K von G ein, so ist diese Einschränkung T ein spannender Baum von K.*

Satz 4.8 (Matrix-Baum-Theorem von Kirchhoff) *Sei G ein schlichter ungerichteter zusammenhängender Graph mit Knotenmenge $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ und Adjazenzmatrix $A(G)$. Es bezeichne weiters $D(G)$ die Diagonalmatrix der Knotengrade $\operatorname{diag}(d(v_1), d(v_2), \ldots, d(v_n))$, so ist jeder Kofaktor der Matrix*

$$D(G) - A(G),$$

d.h. der Betrag einer beliebige $(n-1) \times (n-1)$–Unterdeterminante dieser Matrix, die Anzahl der spannenden Bäume von G.

Ist G nicht zusammenhängende, so wendet man das Matrix-Baum-Theorem für jede Komponente an und multipliziert die Ergebnisse, um die Anzahl der Gerüste von G zu erhalten.

Beispiel 4.3 Man betrachte den Graphen aus Abbildung 4.7.

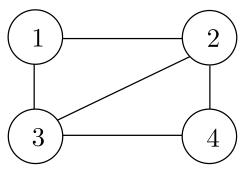

Abbildung 4.7: Graph zu Beispiel 4.3

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D(G) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D(G) - A(G) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Nach Streichen einer Zeile und einer Spalte (hier 2. Zeile und 2. Spalte) ermittelt man die verbleibenden Determinante:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 12 - (2+2) = 8.$$

Es gibt also 8 spannende Bäume (siehe Abbildung 4.8).

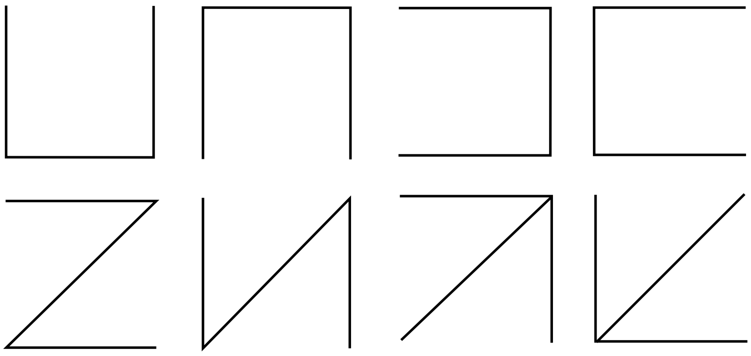

Abbildung 4.8: Darstellung aller möglichen spannenden Bäume zu Beispiel 4.3

Minimaler spannender Baum

Definition 4.13 *Ein* **Netzwerk** *bzw. ein* **bewerteter Graph** *ist ein gerichteter oder ungerichteter Graph $G = (V, E)$, wo jeder Kante $e \in E$ ein* **Wert** *(Gewicht, Länge, Kapazität) $w(e) \in \mathbb{R}$ zugeordent wird, d.h. es gibt noch eine Funktion $w : E \to \mathbb{R}$.*
Für jede Teilmenge $F \subseteq E$ von Kanten heißt

$$w(F) = \sum_{e \in F} w(e)$$

Gewicht *von F.*

Üblicherweise wird auch vorausgesetzt, daß für alle $w(e) \geq 0$ gilt. In manchen Anwendungen ist es auch sinnvoll, die Bewertung $w(e) = \infty$ zuzulassen.

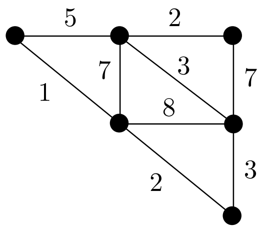

Abbildung 4.9: Graph mit Kantenbewertungen

Mit Hilfe des **Kruskal-Algorithmus** gelingt es in sehr einfacher Weise ein minimales bzw. maximales Gerüst W eines Netzwerkes ($G = (V, E)$ mit nichtnegativem Gewicht $w : E \to \mathbb{R}_0^+$) zu bestimmen, d.h. $w(W) = \sum_{e \in \, E(W)} w(e)$ soll kleinstmöglich sein.

1. Man numeriere die Kanten $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ nach steigendem Gewicht:
$$w(e_1) \leq w(e_2) \leq \cdots \leq w(e_m).$$

2. Setze $E' := \emptyset$.

```
for j := 1 to m do
    if (V, E' ∪ {e_j}) kreisfrei then
        E' := E' ∪ {e_j}
    end;
end;
```

$W = (V, E')$ ist nun ein minimales Gerüst von G.

Um ein maximales Gerüst zu erhalten, muß man in 1. die Kanten nach fallendem Gewicht ordnen. Hat G n Knoten und k Zusammenhangskomponenten, so hat jedes Gerüst von G genau $n-k$ Kanten. Daher kann 2. abgebrochen werden, wenn E' bereits $n-k$ Kanten enthält.
Man beachte, daß es im allgemeinen es eine sehr große Anzahl von Gerüsten in einem Graphen gibt, die mit Hilfe des Matrix-Baum-Theorems berechnet werden kann. (Man kann sich damit auch einen *Überblick* über alle möglichen Gerüste zu verschaffen.) Trotzdem kann ein minimales Gerüst mit Hilfe des Kruskal-Algorithmus sehr leicht zu bestimmen.
Analog bestimmt man auch maximale spannende Bäume bzw. Gerüste.

4.3 Eulersche und Hamilitonsche Linien:

4.3.1 Eulersche Linien

Definition 4.14 *Eine Kantenfolge in einem (gerichteten oder ungerichteten) Graphen G heißt* **Eulersche Linie***, wenn sie jeden Knoten und jede Kante enthält, und zwar jede Kante genau einmal.*
Bei einer **geschlossenen Eulerschen Linie** *stimmen Anfangs- und Endknoten überein, bei einer* **offenen Eulerschen Linie** *sind sie verschieden.*

Satz 4.9 *Ein ungerichteter Graph G besitzt genau dann eine geschlossene Eulersche Linie, wenn G zusammenhängend ist und alle Knotengrade $d(v)$ $(v \in V(G))$ gerade sind.*
Ein ungerichteter Graph G besitzt genau dann eine offene Eulersche Linie, wenn G zusammenhängend ist und mit der Ausnahme von zwei Knoten $v_1, v_2 \in V(G)$ (mit ungeradem Knotengrad) alle Knotengrade $d(v)$ $(v \in V(G) \setminus \{v_1, v_2\})$ gerade sind.

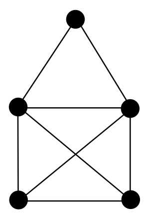

Abbildung 4.10: Ungerichteten Eulerschen Graphen

Satz 4.10 *Ein gerichteter Graph G besitzt genau dann eine geschlossene Eulersche Linie, wenn G schwach zusammenhängend ist und alle Knoten $v \in V(G)$ Hin- und Weggrad gleich sind: $d^+(v) = d^-(v)$.*
Ein gerichteter Graph G besitzt genau dann eine offene Eulersche Linie, wenn G schwach zusammenhängend ist und mit der Ausnahme von zwei Knoten $v_1, v_2 \in V(G)$, für die $d^+(v_1) = d^-(v_1)+1$ und $d^+(v_2) = d^-(v_2) - 1$ gilt, bei allen Knoten $v \in V(G) \setminus \{v_1, v_2\})$ Hin- und Weggrad gleich sind: $d^+(v) = d^-(v)$.

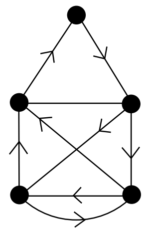

Abbildung 4.11: Gerichteter Eulerscher Graph

Definition 4.15 *Eine Kantenfolge in einem (gerichteten oder ungerichteten) Graphen G heißt* **Hamiltonsche Linie***, wenn sie jeden Knoten (mit der möglichen Ausnahme, daß Anfangs- und Endpunkt übereinstimmen) genau einmal enthält.*
Bei einer **geschlossenen Hamiltonschen Linie** *stimmen Anfangs- und Endknoten überein, bei einer* **offenen Hamiltonschen Linie** *sind sie verschieden.*

Im Gegensatz zu den Eulerschen Linien gibt es (bis jetzt) noch kein allgemeines Kriterium für die Existenz von Hamiltonschen Linien. Es gibt aber viele Sätze, die hinreichende Bedingungen für die Existenz einer Hamiltonschen Linie angeben. Als Beispiel dafür sei der folgende Satz angegeben.

Satz 4.11 *Sei G ein schlichter ungerichteter Graph mit n Knoten, so daß für alle Knotenpaare $x, y \in V(G)$, die in G nicht durch eine Kante verbunden sind, d.h. $(x, y) \notin E(G)$,*

$$d(x) + d(y) \geq n$$

gilt. Dann gibt es in G eine geschlossene Hamiltonsche Linie.

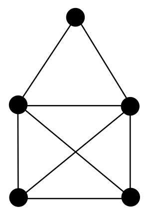

Abbildung 4.12: Abbildung eines Eulerschen Graphen

4.4 Planare (ebene) Graphen

Definition 4.16 *Ein Graph G heißt* **planar** *oder* **eben***, wenn G kreuzungsfrei in der Ebene $\mathbb{R}^2$ dargestellt werden kann, d.h. die Kurven, die die Kanten repräsentieren, haben außer in jenen Punkten, die die Knoten repräsentieren, keine weiteren Schnittpunkte.*

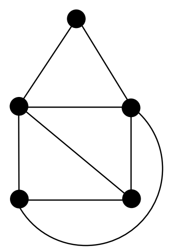

Abbildung 4.13: Abbildung eines planaren Graphen

Die kreuzungsfreie Darstellung eines Graphen G zerlegt die Ebene in eine endliche Anzahl von Gebieten. Es stellt sich heraus, daß diese Anzahl unabhängig davon ist, wie man G in der Ebene kreuzungsfrei repräsentiert. Man bezeichnet diese Anzahl durch $\alpha_2(G)$.

Satz 4.12 (Eulersche Polyederformel) *Für einen zusammenhängenden planaren Graphen G gilt*

$$\alpha_0(G) - \alpha_1(G) + \alpha_2(G) = 2.$$

Durch Projektion eines konvexen Polyeders P (Durchschnitt von endlich vielen Halbräumen im $\mathbb{R}^3$) auf eine im Inneren des Polyeders liegende Kugel erhält man auf der Kugeloberfäche eine kreuzungsfreie Darstellung eines Graphen G, der dieselbe Anzahl von Knoten, Kanten und Gebieten hat wie das Polyeder Eckpunkte, Kanten und Flächen. Projiziert man nun die Kugeloberfläche mittels stereographischer Projektion auf die Ebene (wobei als *Nordpol* weder ein Knotenpunkt noch ein Punkt einer Kante des Graphen auf der Kugeloberfläche verwendet werden darf) so wird die kreuzungsfreie Darstellung des Graphen G auf der Kugeloberfläche auf eine kreuzungsfreie Darstellung von G in der Ebene projiziert. Natürlich bleibt auch bei dieser Projektion die Anzahl der Knoten, Kanten und Gebiete gleich. Daher gilt auch

$$\alpha_0(P) - \alpha_1(P) + \alpha_2(P) = 2,$$

wobei $\alpha_0(P)$ die Anzahl der Eckpunkte, $\alpha_1(P)$ die Anzahl der Kanten und $\alpha_2(P)$ die Anzahl der Flächen des Polyeders P bezeichnen.
Aus der eben geführten Überlegung ergibt sich auch die folgende Eigenschaft.

Satz 4.13 *Ein Graph läßt sich genau dann kreuzungsfrei in der Ebene darstellen, wenn er kreuzungsfrei auf einer Kugeloberfläche darstellbar ist.*

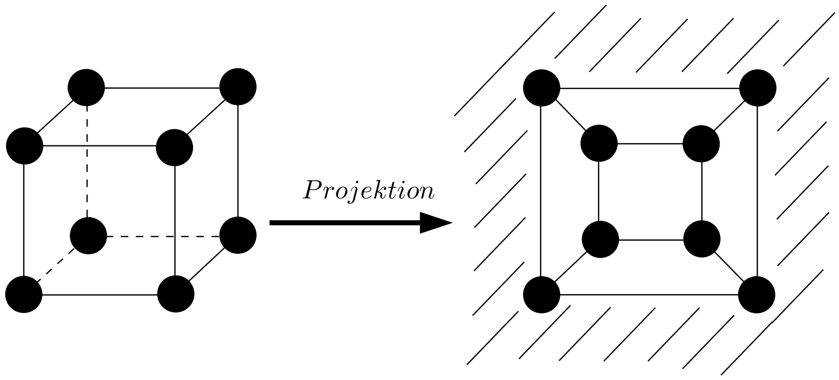

Abbildung 4.14: Abbildung einer Projekion eines Würfels in eine Ebene

Satz von Kuratowski

Definition 4.17 *Der* **vollständige Graph** C_n *ist ein schlichter ungerichteter Graph mit n Knoten, bei dem jeder Knoten mit jedem anderen durch eine Kante verbunden ist.*
Ein (ungerichteter) Graph G heißt **paarer Graph**, *wenn dessen Knotenmenge $V(G)$ in zwei disjunkte nichtleere Teilmengen V_1, V_2 zerlegt werden kann, so daß alle Kanten nur zwischen V_1 und V_2 verlaufen.*
Der **vollständige paare Graph** $K_{m,n}$ $(m, n \geq 1)$ *ist ein schlichter paarer Graph mit $m + n$ Knoten $V(G) = V_1 \cup V_2$, wobei V_1 m Knoten und V_2 n Knoten enthält und jeder Knoten aus V_1 mit allen Knoten aus V_2 durch eine Kante verbunden ist.*

Satz 4.14 *Der vollständige Graph C_5 und der vollständige paare Graph $K_{3,3}$ sind nicht planar.*

Definition 4.18 *Ein Graph H heißt* **Unterteilung** *eines Graphen G, wenn H aus G dadurch hervorgeht, wenn in einer oder in mehreren Kanten von G zusätzliche Knoten eingefügt werden.*

Satz 4.15 (Satz von Kuratowski) *Eine Graph G ist genau dann nicht planar, wenn er einen Teilgraphen enthält, der aus C_5 oder $K_{3,3}$ durch eventuelle Unterteilung (von Kanten) entsteht.*

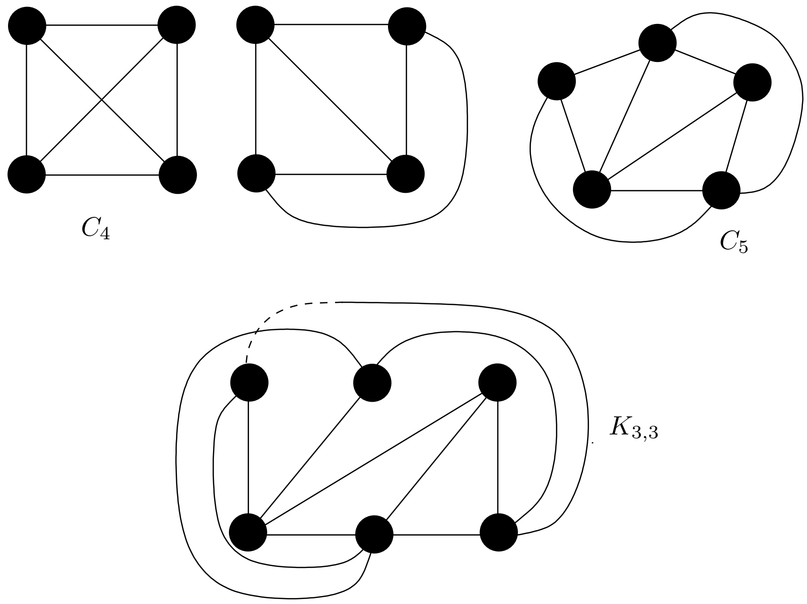

Abbildung 4.15: C_5 und $K_{3,3}$ sind nicht planar

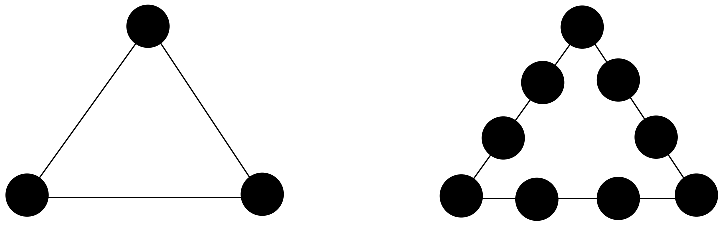

Abbildung 4.16: Unterteilung eines Graphen (Satz **??**)

Duale Graphen

Definition 4.19 *Sei G ein in die Ebene $\mathbb{R}^2$ eingebetteter ungerichteter planarer Graph ohne Schlingen, und es bezeichne F die Menge der Gebiete der Ebene $\mathbb{R}^2$, die durch den eingebetteten Graphen festgelegt werden.*
Der **duale Graph** *G^* von G hat als Knotenmenge $V(G^*) = F$ und ein Paar (f_1, f_2) von verschiedenen Gebieten $f_1, f_2 \in F$ bilden eine Kante von G^*, wenn f_1, f_2 eine gemeinsame begrenzende Kante $e \in E(G)$ haben.*

Man beachte, daß, wenn es keine Knoten vom Grad ≤ 2 gibt, die Kantenmengen von G und G^* dadurch bijektiv aufeinander abgebildet werden, insbesondere gilt neben der Eigenschaft $\alpha_1(G^*) = \alpha_1(G)$ auch die Gleichheit $\alpha_0(G^*) = \alpha_2(G)$. Es gilt sogar $\alpha_2(G^*) = \alpha_0(G)$, was aus dem folgenden Satz abgeleitet werden kann.

Satz 4.16 *Sei G ein in die Ebene $\mathbb{R}^2$ eingebetteter ungerichteter planarer Graph ohne Schlingen und ohne Knoten vom Grad ≤ 2. Dann ist der duale Graph G^* auch planar mit einer durch die Konstruktion natürlichen Einbettung in die Ebene $\mathbb{R}^2$. Weiters ist der biduale Graph G^{**} in natürlicher Weise isomorph zu G.*

Im Zusammenhang mit dualen Graphen ist der **Vierfarbensatz** zu nennen, der aussagt, daß es möglich ist, die Gebiete eines in die Ebene eingebetteten planaren Graphen immer mit nur vier Farben färben kann, so daß je zwei aneinandergrenzende Gebiete (d.h. die eine gemeinsame begrenzende Kante besitzen) verschieden gefärbt sind. Diese Eigenschaft ist aber in der *dualen Verion* noch einfacher zu formulieren.

Satz 4.17 (Vierfarbensatz) *Sei G planar. Dann gibt es eine Färbung der Knoten mit ≤ 4 Farben, sodass benachbarte Knoten verschieden gefärbt sind. (siehe auch Abbildung 4.17).*

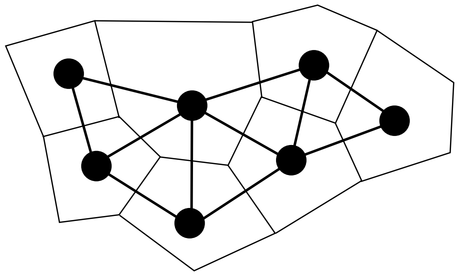

Abbildung 4.17: Dualer Graph zum Färben von Landkarten (Satz 4.17)

4.5 Netzwerke

Wir betrachten wieder **Netzwerke**, also gerichtete oder ungerichtete Graphen $G = (V, E)$, wo jeder Kante $e \in E$ ein **Wert** (Gewicht, Länge, Kapazität) $w(e) \in \mathbb{R}$ zugeordent wird, d.h. es gibt noch eine Funktion $w : E \to \mathbb{R}$.

Definition 4.20 *Sei $G = (V, E)$ ein Netzwerk mit Bewertung $w : E \to \mathbb{R}_0^+$. Die* **Länge** *einer Kantenfolge $e_1, e_2, \ldots, e_k$ ist durch die Summe der Gewichte*

$$w(\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}) = \sum_{j=1}^{k} w(e_j)$$

gegeben. Die **Distanz** *$d(v, w)$ zwischen zwei Knoten $v_1, v_2 \in V$ ist die kleinstmögliche Länge einer $KF(v_1, v_2$. Gibt es keine $KF(v_1, v_2)$, so setzt man $d(v_1, v_2) = \infty$.*

Dijkstra-Algorithmus

Mit Hilfe des Dijkstra-Algorithmus wird von einem Knoten $v_0 \in V$ eines Netzwerkes mit nichtnegativem Gewicht die Distanz $d(v_0, v)$ für alle Knoten $v \in V$ bestimmt.

1. Setze $W := \emptyset$, $U := V$, $l(v_0) := 0$, $l(v) := \infty$ für alle $v \in V \setminus \{v_0\}$ und $p(v) = *$ für alle $v \in V$.
2. Man bestimme $m = \min\limits_{v \in U} l(v)$, wähle eine Knoten $z \in U$ mit $l(z) = m$.
3. Man setze $W := W \cup \{z\}$, $U := U \setminus \{z\}$ und für $v \in U$, die $l(v) > l(z) + w(z, v)$ erfüllen, setze man $p(v) := z$ und
$$l(v) := l(z) + w(z, v).$$
4. Ist $W = V \to$ **ENDE**.
Ist $l(v) = \infty$ für alle $v \in U \to$ **ENDE**.
Gehe zu 2.

Die Menge $W \subseteq V$ umfaßt in jedem Zeitpunkt des Algorithmus jene $v \in V$, für die schon bekannt ist, daß $l(v) = d(v_0, v)$ ist. Für $v \in U$ ist hingegen $l(v)$ die minimale Länge einer Kantenfolge $KF(v_0, v)$, die mit Ausnahme von v nur Knoten aus W enthält. $p(v)$ ist jeweils der Vorgängerknoten von v auf einer minimalen Kantenfolge $KF(v_0, v)$.

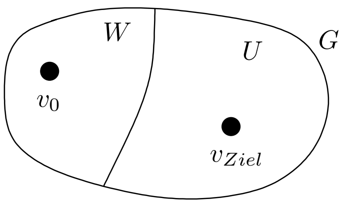

Abbildung 4.18: Abbildung zum Dijkstra-Algorithmus

Aus diesen Bedingungen ist klar, daß der in 2. ausgewählte Knoten $z \in U$ in W aufgenommen werden kann. Für $v \in U \setminus \{z\}$ wird in 3. $l(v)$ neu berechnet, da W um z erweitert wurde.

Endet der Algorithmus nicht mit $W = V$, sondern mit der Abbruchbedingung $l(v) = \infty$ für alle $v \in U$, so ist G nicht zusammenhängend, und W umfaßt genau jene Knoten, die von v_0 aus erreichbar sind.
Sucht man übrigens zu einem bestimmten Punkt $v_1 \in V$ die Distanz $d(v_0, v_1)$, so kann der Algorithmus auch dann abgebrochen werden, wenn v_1 in W aufgenommen wird.
Für $v \in W$ kann durch $v, p(v), p(p(v)), \ldots, v_0$ eine $KF(v_0, v)$ von kleinsmöglicher Länge rückverfolgt werden. Möchte man alle Kantenfolgen kleinsmöglicher Länge finden, so muß in 3. für alle Knoten v mit $l(v) = l(z) + w(z, v)$ der Knoten z als *alternatives* $p(y)$ vermerkt werden.

Beispiel 4.4 Im folgenden Graphen sollen alle Distanzen $d(v_0, v)$ bestimmt werden.

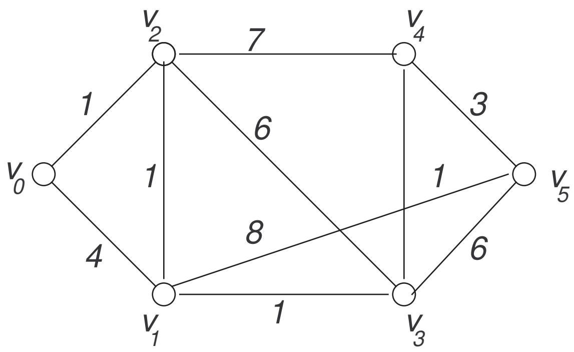

Abbildung 4.19: Abbildung zum Dijkstra-Algorithmus

1. Durchlauf

   $m = 0$
   $z = v_0$
   $W = \{v_0\}, U = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$
   $l(v_1) = 4, l(v_2) = 1, l(v_3) = l(v_4) = l(v_5) = \infty$
   $p(v_1) = v_0, p(v_2) = v_0, p(v_3) = p(v_4) = p(v_5) = *$

2. Durchlauf

   $m = 1$
   $z = v_2$
   $W = \{v_0, v_2\}, U = \{v_1, v_3, v_4, v_5\}$
   $l(v_1) = 2, l(v_3) = 7, l(v_4) = 8, l(v_5) = \infty$
   $p(v_1) = v_2, p(v_3) = v_2, p(v_4) = v_2, p(v_5) = *$

3. Durchlauf

   $m = 2$
   $z = v_1$
   $W = \{v_0, v_1, v_2\}, U = \{v_3, v_4, v_5\}$
   $l(v_3) = 3, l(v_4) = 8, l(v_5) = 10$
   $p(v_3) = v_1, p(v_4) = v_2, p(v_5) = v_1$

4. Durchlauf

   $m = 3$
   $z = v_3$
   $W = \{v_0, v_1, v_2, v_3\}, U = \{v_4, v_5\}$
   $l(v_4) = 6, l(v_5) = 9$
   $p(v_4) = v_3, p(v_5) = v_3$

5. Durchlauf

   $m = 6$
   $z = v_4$
   $W = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4\}, U = \{v_5\}$
   $l(v_5) = 7$
   $p(v_5) = v_4$

6. Durchlauf

$m = 7$
$z = v_3$
$W = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}, U = \emptyset$
ENDE

Man erhält damit $d(v_0, v_1) = 2$, $d(v_0, v_2) = 1$, $d(v_0, v_3) = 3$, $d(v_0, v_4) = 6$ und $d(v_0, v_5) = 7$.

Kapitel 5

Zahlentheorie

5.1 Teilbarkeit

In der Zahlentheorie rechnet man mit den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ bzw. mit den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$. Die Teilbarkeitslehre ist in $\mathbb{N}$ etwas leichter, da man nicht auf negative Teiler Rücksicht nehmen muss, vom algebraischen Standpunkt ist es aber einfacher, in $\mathbb{Z}$ zu rechnen. $\mathbb{Z}$ ist ein Ring (noch mehr, ein Integritätsbereich), $\mathbb{N}$ hingeben nur ein sogenannter Halbring, da die additive Struktur keine Gruppe bildet.

Definition 5.1 *Für ganze Zahlen a, b definiert man*

$$a|b \text{ (a teilt b) } :\Longleftrightarrow \exists\, c \in \mathbb{Z} : b = a \cdot c.$$

Satz 5.1

1. $a|b \;\wedge\; b|c \quad \Longrightarrow \quad a|c$
2. $a, b \neq 0, \quad a|b \;\wedge b|a \quad \Longleftrightarrow \quad a = \pm b$
3. $a|b \;\wedge a|c \quad \Longrightarrow \quad a|b \pm c$

Beweis:

1. $b = a \cdot d_1 \qquad c = b \cdot d_2 \quad \Longrightarrow \quad c = a \cdot \underbrace{(d_1 \cdot d_2)}_{d \in\ \mathbb{Z}} \quad \Longrightarrow \quad a|c$
2. $b = a \cdot c_1, \quad a = b \cdot c_2 \quad \Longrightarrow \quad b = b \cdot (c_2 \cdot c_1) \qquad\qquad (b \neq 0)$

   $\Longrightarrow \quad 1 = c_2 \cdot c_1 \quad \Longrightarrow \quad c_1 = c_2 = \pm 1 \quad \Longrightarrow \quad a = \pm b$
3. $\boxed{\textbf{UE}}$

Definition 5.2 *Für $a, b \in \mathbb{Z}$ heißt $d = \mathrm{ggT}(a, b)$ ein größter gemeinsamer Teiler, wenn folgende zwei Eigenschaften erfüllt sind.*

1. $d|a \;\wedge\; d|b$
2. $t|a \;\wedge\; t|b \quad \Longrightarrow \quad t|d$

Man beachte, dass mit d auch $-d$ ein größter gemeinsamer Teiler (in diesem Sinn ist). Aus Gründen der Einfachheit nimmt man üblicherweise an, dass der größter gemeinsamer Teiler nicht negativ ist.

Eine elementare, aber für die Zahlentheorie grundlegende Eigenschaft, ist die **Division mit Rest**.

Satz 5.2 *Es seien $a, b \in \mathbb{Z}$ und $b \neq 0$. Dann gibt es ganze Zahlen $q, r \in \mathbb{Z}$ mit*

$$a = b \cdot q + r \quad \textit{und} \quad 0 \leq r < |b|.$$

Beweis: Man setzt

$$q = \lfloor \frac{a}{b} \rfloor \quad \text{und} \quad r := a - b \cdot q = \underbrace{(\frac{a}{b} - q)}_{|\ldots|<1} \cdot b.$$

Wegen $0 \leq \frac{a}{b} - q < 1$ gilt $0 \leq r < |b|$.
In diesem Zusammenhang heißt q *Quotient* und r *Rest.*

Die Division mit Rest ist Grundlage der folgenden Divisionskette:

Euklidischer Algorithmus:

$a, b \in \mathbb{Z}, \qquad (b > 0)$

$$\begin{array}{ll}
a = q_0 \cdot b + r_0, & 0 < r_0 < b \\
b = q_1 \cdot r_0 + r_1, & 0 < r_1 < r_0 \\
r_0 = q_2 \cdot r_1 + r_2, & 0 < r_2 < r_1 \\
\quad \vdots & \\
r_{k-2} = q_k \cdot r_{k-1} + r_k, & 0 < r_k < r_{k-1} \\
r_{k-1} = q_{k+1} \cdot r_k + 0 & r_{k+1} = 0
\end{array}$$

Diese Divisionskette muss einmal abbrechen, da die Reste r_j streng monoton fallend und nicht negativ sind: $b > r_0 > r_1 > r_2 > \cdots > r_k > r_{k+1} = 0$.
Die Anzahl der Divisionsschritte ist (auf dem ersten Blick) durch b beschränkt. Tatsächlich ist der Algorithmus viel schneller. Aus

$$r_{k-2} \geq r_{k-1} + r_k \geq 2 \cdot r_k$$

folgt

$$\boxed{r_k \leq \frac{1}{2} \cdot r_{k-2}}$$

Das Verfahren bricht also schon nach $O(\log b)$ Schritten ab, d.h. er gehört zu den schnellsten Algorithmen und er berechnet den größten gemeinsamen Teiler zweier Zahlen (ohne dass man die Primfaktorenzerlegung kennen muss).

Satz 5.3 *Der letzte von* 0 *verschiedene Rest* r_k *im Euklidischen Algorithmus ist der größte gemeinsame Teiler:*

$$r_k = d = \mathrm{ggT}(a, b).$$

Beweis:

1. $r_k | r_{k-1} \implies r_k | r_{k-2} \implies r_k | r_1,\ r_k | r_0 \implies r_k | b,\ r_k | a$
2. $t | a,\ t | b \implies t | (a - q \cdot b) = r_0 \implies t | r_1 \implies \ldots \implies t | r_k$

Beispiel 5.1 Der $\mathrm{ggT}(105, 60)$ berechnet sich mit Hilfe von

$$\begin{array}{rcl}
105 & = & 1 \cdot 60 + 45 \\
60 & = & 1 \cdot 45 + 15 \\
45 & = & 3 \cdot 15 + 0
\end{array}$$

zu

$\mathrm{ggT}(105, 60) = 15.$

Man kann nun den Euklidischen Algorithmus auch nutzen, den größten gemeinsamen Teiler darzustellen. Dafür substituiert man Schritt für Schritt einen Rest r_j:

$$\begin{aligned} 15 &= 60 - 45 \\ &= 60 - (105 - 60) \\ &= 2 \cdot 60 - 1 \cdot 105 \end{aligned}$$

Es ist also möglich, den ggT als *ganzzahlige Linearkombination* der beiden Ausgangszahlen 105 und 60 darzustellen.

Dieses Verfahren funktioniert auch allgemein.

Satz 5.4 *Es seien $a, b \in \mathbb{Z}$ und $d = \mathrm{ggT}(a, b)$. Dann gibt es ganze Zahlen $e, f\mathbb{Z}$ mit*

$$d = e \cdot a + f \cdot b.$$

Wir geben dazu noch ein Beispiel an:

Beispiel 5.2 Der $\mathrm{ggT}(15, 17)$ bestimmt sich wegen

$$\begin{aligned} 17 &= 1 \cdot 15 + 2 \\ 15 &= 7 \cdot 2 + 1 \\ 2 &= 2 \cdot 1 + 0 \end{aligned}$$

zu

$$\mathrm{ggT}(15, 17) = 1.$$

Umgekehrt erhält man

$$\begin{aligned} 1 &= 15 - 7 \cdot 2 \\ &= 15 - 7 \cdot (17 - 15) \\ &= 8 \cdot 15 - 7 \cdot 17. \end{aligned}$$

Definition 5.3 *Eine natürliche Zahl $p > 1$ heißt **Primzahl**, wenn die einzigen Teiler ± 1 und $\pm p$ sind.*
Die Menge der Primzalen wird mit $\mathbb{P}$ bezeichnet.

Satz 5.5 *Sei $p \in \mathbb{P}$ und $a, b \in \mathbb{Z}$. Dann gilt:*

$$p | a \cdot b \quad \Longrightarrow \quad p | a \wedge p | b.$$

Beweis:

1. Fall: $\quad p | a$. Hier ist nichts zu beweisen.

2. Fall: $\quad p \nmid a \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{ggT}(p, e) = 1$, a der ggT ein Teiler von p sein muss, aber p ausscheidet.

$\Longrightarrow \exists\, e, f \in \mathbb{Z}: \quad 1 = e \cdot p + f \cdot a$

Also: $b = b \cdot 1 = \underbrace{b \cdot b \cdot p}_{p|} + f \cdot \underbrace{(a \cdot b)}_{p|} \quad \Longrightarrow \quad p | b.$

Satz 5.6 (Fundamentalsatz der Zahlentheorie) *Jede natürliche Zahl a lässt sich als Produkt von Primzahlen darstellen:*

$$a = p_1 \cdot \ldots \cdot p_r, \quad p_j \in \mathbb{P},$$

wobei die Darstellung bis auf Reihenfolge eindeutig ist.

Beweis:
Wir zeigen zuerst, dass es immer möblich ist, a als Produkt von Primzahlen darzustellen.
1. Fall: Ist $a \in \mathbb{P}$, so ist nichts zu beweisen.

2. Fall: Ist $a \notin \mathbb{P}$, so kann man a als $a = a_1 \cdot a_2$ mit $1 < a_1 < a$ und $a < a_2 < a$ schreiben.

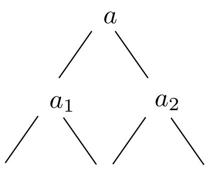

Abbildung 5.1: Zerlegung einer natürlichen Zahl a.

Nun kann man dieselbe Fallunterscheidung für a_1 und a_2 anwenden. Nach endlich vielen Schritten muss dieses Verfahren abbrechen, da die Teiler immer kleiner werden, also erhält man die Darstellung

$$= p_1 \cdot \ldots \cdot p_r, \qquad p_j \in \mathbb{P}.$$

Nehmen wir nun an, es gäbe zwei Darstellungen von a als Produkt von Primzahlen:

$$a = p_1 \cdot \ldots \cdot p_r = q_1 \cdot \ldots \cdot q_s \qquad p_j, q_s \in \mathbb{P}.$$

Insbesondere gilt $p_1 | q_1 \cdot \ldots \cdot q_s$. Demnach gilt

$$p_1 | q_1 \ \vee \ p_1 | q_2 \ \vee \ \cdots \ \vee p_1 | q_s.$$

Es sei o.B.d.A. $p_1 | q_1$. Daraus folgt aber $p_1 = q_1$ (da $p_1 \neq 1$ ist). Also erhält man

$$p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_r = q_2 \cdot \ldots \cdot q_s$$

und kann dieselbe Überlegung wieder anwenden. Dieses Verfahren ergibt natürlich, dass die Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_r$ und $q_1, q_2, \ldots, q_s$ (bis auf die Reihenfolge) übereinstimmen, insbesondere ist $r = s$.

Notation:

Für eine natrürliche Zahl a und eine Primzahl p schreibt man $\nu_p(a) = k$, falls $p^k | a$, aber $p^{k+1} \nmid a$. Aus dem Fundamentalsatz folgt daher die Schreibweise

$$a = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\nu_p(a)}.$$

So ist etwa

$$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5, \ \nu_2(60) = 2, \ \nu_3(60) = 1, \ \nu_5(60) = 1.$$

Satz 5.7 *Es gibt unendlich viele Primzahlen:*

$$|\mathbb{P}| = \infty.$$

Beweis: Angenommen, es gäbe nur endliche viele Primzahlen: $\mathbb{P} = \{p_1, \ldots, p_N\}$. Dann betrachte man die Zahl

$$Q = p_1 \cdot \ldots \cdot p_N + 1.$$

Offensichtlich gilt

$$p_1 \nmid Q, \ p_2 \nmid Q, \ \ldots, \ p_N \nmid Q$$

und die Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_N$ können daher nicht in der Primzahlendarstellung von Q vorkommen. Das widerspricht aber der Annahme.

Satz 5.8 *Es seien $a = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\nu_p(a)}$ und $b = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\nu_p(b)}$ die Primfaktorenzerlegungen von $a, b \in \mathbb{Z}$. Dann gilt*

$$\mathrm{ggT}(a, b) = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\min\{\nu_p(a), \nu_p(b)\}}$$

und

$$\mathrm{kgV}(a, b) = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\max\{\nu_p(a), \nu_p(b)\}}.$$

Gegenbeispiel:

Abschließend soll gezeigt werden, dass die eindeutige Primfaktorenzerlegung keine selbstverständliche Eigenschaft von Ringen ist. Man betrachte etwa den Integritätsbereich

$$R = \{a + b \cdot i \cdot \sqrt{5} | a, b \in \mathbb{Z}\}$$

(mit der gewöhnlichen Addition und Multiplikation in $\mathbb{C}$).
In R sind die Zahlen

$$2, 3, 1 + i \cdot \sqrt{5}, 1 - i \cdot \sqrt{5}$$

nicht weiter zerlegbar (sie sind sozusagen für R Primzahlen), er gilt aber

$$6 = 2 \cdot 3 = (1 + i \cdot \sqrt{5}) \cdot (1 - i \cdot \sqrt{5}).$$

Daher gibt es in R keine eindeutige Primfaktorenzerlegung.

5.2 Kongruenzen

Definition 5.4 *Es sei ein Zahl $m \in \mathbb{Z}$, der sogeannte* ***Modul****, ausgezeichnet.*
Zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ heißen ***kongruent modulo*** *m, falls m ein Teiler von $b - a$ ist. Man schreibt dafür:*

$$\begin{aligned} a \equiv b(m) \quad &:\Longleftrightarrow \quad m | b - a \\ &\Longleftrightarrow \quad a = b + k \cdot m \qquad (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Unter einer ***Restklasse*** *$\overline{a}$ modulo m versteht man die Menge*

$$\begin{aligned} \overline{a} \quad &= \quad a + m \cdot \mathbb{Z} = \{\ldots, a - 2 \cdot m, a - m, a, a + m, a + 2 \cdot m, \ldots\} \\ &= \quad \{b \in \mathbb{Z} \quad | \quad a \equiv b(m)\} \end{aligned}$$

Die Menge aller Restklassen modulo m wird mit $\mathbb{Z}_m$ bezeichnet.

Es gilt die folgende Charakterisierung:

$$\boxed{\overline{a} = \overline{b} \iff a \equiv b(m)}$$

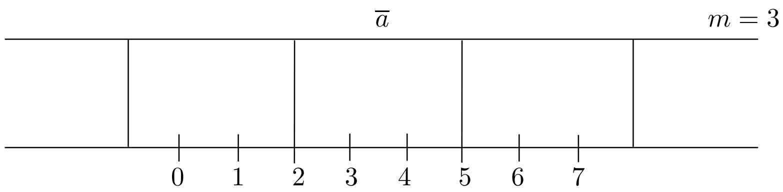

Abbildung 5.2: Darstellung einer Restklasse mit m=3

Die Relation $a \equiv b\,(m)$ ist eine Äquivalenzrelation auf den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$. Die Konkruenzklassen sind die dazugehörigen Äquivalenzklassen und bilden daher eine Partition der ganzen Zahlen.

Satz 5.9 *Die Menge $\mathbb{Z}_m$ besteht genau aus den m Restklassen:*

$$\mathbb{Z}_m = \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{m - 1}\}, \qquad |\mathbb{Z}_m| = m.$$

Interessanterweise kann man mit den Restklassen rechnen.

Satz 5.10 *Definiert man auf den Restklassen modulo m die Operationen*

$$\overline{a} + \overline{b} := \overline{a + b}, \qquad \overline{a} \cdot \overline{b} := \overline{a \cdot b},$$

so bildet die Struktur $\langle \mathbb{Z}_m, +, \cdot \rangle$ einen Ring, den sogenannten ***Restklassenring modulo*** *m.*

Beispiel 5.3 Für $m = 3$ besteht $\mathbb{Z}_3 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$ aus 3 Elementen und die Rechenoperationen des Rings $\langle \mathbb{Z}_3, +, \cdot \rangle$ sind folgendermaßen definiert:

$$\begin{array}{c|ccc} + & \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} \\ \hline \overline{0} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} \\ \overline{1} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{0} \\ \overline{2} & \overline{2} & \overline{0} & \overline{1} \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} \cdot & \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} \\ \hline \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{1} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} \\ \overline{2} & \overline{0} & \overline{2} & \overline{1} \end{array}$$

Man beachte, dass dieser Ring auch einen Körper bildet. Alle Elemente $\neq \overline{0}$ besitzen ein multiplikatives Inverses.

Achtung: Wenn m keine Primzahl ist, gilt **keine Kürzungsregel**.
Für $m = 6 = 2 \cdot 3$ haben wir etwa:

$$\overline{2} \cdot \overline{3} = \overline{4} \cdot \overline{3} [= \overline{0}] \qquad \not\Longrightarrow \qquad \overline{2} = \overline{4}.$$

$\mathbb{Z}_6$ (und allgemein $\mathbb{Z}_m$ für eine zusammengesetzte Zahl m) ist kein Körper.

In einem Ring R (mit Einselement) betrachtet man die Menge der bezüglich der Multiplikation invertierbaren Elemente:

$$R^\star = E(R) = \{a \in \mathbb{R} \quad | \quad \exists\, b \in \mathbb{R} : \quad a \cdot b = b \cdot a = 1\}.$$

Dies Menge wird auch **Einheitengruppe** genannt. Beispielsweise ist $\mathbb{Z}^\star = \{-1, 1\}$.

Satz 5.11

$$E(\mathbb{Z}_m) = \mathbb{Z}_m^\star = \{\overline{a} \quad | \quad \mathrm{ggT}(a, m) = 1\}.$$

Beispiel 5.4 $\quad \mathbb{Z}_6^\star = \{\overline{1}, \overline{5}\}, \qquad \mathbb{Z}_5^\star = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\}$

Beweis:

$$\begin{aligned} \mathrm{ggT}(a,m) = 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad \exists\, e, f \in \mathbb{Z} : \qquad a \cdot e + m \cdot f = 1 \\ &\Longleftrightarrow \quad \exists\, e \in \mathbb{Z} : a \cdot e \equiv 1\, (m) \\ &\qquad\quad\; \exists\, \overline{e} \in \mathbb{Z}_m : \overline{a} \cdot \overline{e} = \overline{1} \end{aligned}$$

Beispiel 5.5

Zur Berechnen des Inversen von $\overline{15}$ modulo 17 bestimmt man zunächst mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus ganze Zahlen (hier 8 und -7) mit

$$1 = 8 \cdot 15 - 7 \cdot 17.$$

und liest

$$\overline{15}^{\,-1} = \overline{8}$$

ab.

Eulersche φ-Funktion:

Die Eulersche φ-Funktion $\varphi(m)$ gibt die Anzahl der invertierbaren Restklassen modulo m an:

$$\varphi(m) = |\mathbb{Z}_m^\star| = \{a \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq a \leq m, \;\; \mathrm{ggT}(a, m) = 1\}.$$

Beispiel 5.6 $\varphi(6) = 2, \qquad \varphi(5) = 4.$

Ganz allgemein gilt für eine Primzahl $\varphi(p) = p - 1$, da alle Zahlen $1 \leq a < p$ die Eigenschaft $\mathrm{ggT}(a, p) = 1$ haben. Daher gilt der folgende Satz:

Satz 5.12 *Für eine Primzahl p ist $\langle \mathbb{Z}_p, +, \cdot \rangle$ ein Körper.*
Ist m keine Primzahl, so ist $\langle \mathbb{Z}_m, +, \cdot \rangle$ kein Körper.

Die Eulersche φ-Funktion kann mit Hilfe einer einfachen Formel berechnet werden:

Satz 5.13 *Es sei $m = p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r}$ die Primfaktorenzerlegung von m (d.h. die $p_j \in \mathbb{P}$ sind voneinander verschieden und $e_j > 0$). Dann gilt*

$$\boxed{\Longrightarrow \varphi(m) = m \cdot \left(1 - \tfrac{1}{p_1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \tfrac{1}{p_r}\right)}$$

Im speziellen gilt für eine Primzahl p:

$$\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1} = p^{k-1} \cdot (p-1) = p^k \cdot (1 - \frac{1}{p}).$$

Eine wichtige Anwendung der Eulerschen φ-Funktion ist der folgende Sachverhalt.

Satz 5.14 (Kleiner Satz von Fermat) *Es seien $a, m \in \mathbb{Z}$. Dann gilt:*

$$(a, m) = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad a^{\varphi(m)} \equiv 1\,(m).$$

Ist speziell $m = p$ eine Primzahl, so vereinfacht sich das zu

$$p \nmid a \implies a^{p-1} \equiv 1\,(p) \quad \text{oder} \quad p \mid (a^{p-1} - 1).$$

Beweis: Es bezeichne $\mathbb{Z}_m^\star = \{\overline{c_1}, \ldots, \overline{c_k}\}$, $k = \varphi(m)$, die Einheitengruppe von $\mathbb{Z}_m$. Dann gilt für $\overline{a} \in \mathbb{Z}_m^\star$ wegen der Invertierbarkeit

$$\{\overline{a} \cdot \overline{c_1}, \ldots, \overline{a} \cdot \overline{c_k}\} = \{c_1, \ldots, c_k\}.$$

Multipliziert man all diese Elemente miteinander und kürzt, ergibt das:

$$(\overline{a}\overline{c}_1) \cdots (\overline{a}\overline{c}_k) = \overline{a}^{\varphi(m)} \overline{c}_1 \cdots \overline{c}_k = c_1, \ldots, c_k \quad \Longrightarrow \quad \overline{a}^{\varphi(m)} = \overline{1}.$$

RSA-Verfahren

Das RSA-Verfahren ist ein Verschlüsselungsverfahren. Im Unterschied zur Codierungstheorie, wo die Fehlererkennung und -korrektur bei Fehlübertragungen im Vordergrund steht, ist bei der **Verschlüsselung** das Ziel, sie *abhörsicher* zu machen, d.h. ein potentieller *Lauscher* soll nicht in der Lage sein, die gesendete verschlüsselte Nachricht zu entziffern.
Verschlüsselungsverfahren finden nicht nur militärische Anwendungen, sie werden natürlich auch im zivilen Bereich, etwa im Bankenwesen, eingesetzt.
Das momentan beste Verschlüsselungsverfahren ist das nach Rivest, Schamir und Adleman benannte **RSA-Verfahren**, das sich auch dadurch auszeichnet, daß es mit **öffentlichen Schlüsseln** arbeitet.
Das RSA-Verfahren beruht auf dem folgenden Satz:

Satz 5.15 *Seien p, q zwei verschiedene ungerade Primzahlen, $m = pq$ und $v = \mathrm{kgV}(p-1, q-1)$. Dann gilt für alle $a, m \in \mathbf{Z}$*

$$a^{mv+1} \equiv a\,(m).$$

Sind also $e, d \in \mathbf{Z}$ zwei Zahlen mit $ed \equiv 1 \bmod v$, so gilt für alle $a \in \mathbf{Z}$

$$(a^e)^d \equiv a\,(m).$$

Beweis: Zunächst beobachtet man:

$$a^{mv+1} \equiv a\,(p \cdot q) \quad \Longleftrightarrow \quad a^{mv+1} \equiv a\,(p) \wedge a^{mv+1} \equiv a\,(q).$$

1. Fall: $p \mid a$. Hier gilt offensichtlich $a^{mv+1} \equiv 0 \equiv a\,(p)$

2. Fall: $p \nmid a$. Hier verwendet man den kleinen Fermatschen Satz: $a^{p-1} \equiv 1(p)$. Man setzt $v = s \cdot (p-1)$ und erhält

$$a^{mv+1} = a \cdot a^{(v \cdot s) \cdot (p-1)} = a \cdot (a^{p-1})^{v \cdot s} \equiv a \equiv 1(p).$$

Damit ist alles gezeigt.

Möchte also eine Person A verschlüsselte Nachrichten empfangen können, so mulptipliziert A zwei (i.a. mindestens 100-stellige) Primzahlen p, q miteinander und veröffentlicht das Produkt $n = pq$ und eine Zahl e, die zu $v = \mathrm{kgV}(p-1, q-1)$ teilerfremd ist.
Ist nun eine weitere Person B daran interessiert, der Person A eine Nachricht zu senden, die nur A lesen kann, so unterteilt er die Nachricht in Blöcke $a_1, a_2, \ldots$, so daß jeder Block durch eine nichtnegative Zahl $< n$ repräsentiert werden kann. Anschließend verschlüsselt er $a_1, a_2, \ldots$ durch

$$b_j = a_j^e\,(m) \qquad (j \geq 1)$$

und läßt A die Zahlen $b_1, b_2, \ldots$ ohne weitere Geheimhaltung zukommen.
A kann nun die ursprüngliche Nachricht $a_1, a_2, \ldots$ durch

$$a_j = b_j^d\,(m) \qquad (j \geq 1)$$

zurückgewinnen, also entschlüsseln.

Öffentlicher Schlüssel (m, e)

Verschlüsselung: E: $a \longrightarrow a^e \bmod m$ $a \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$

Entschlüsselung: D: $b \longrightarrow b^d \bmod m$ D(E(a))=a

$m = p \cdot q$, $e \cdot d \equiv 1(v)$, $v = kgV(p-1, q-1)$

Auf dem ersten Blick erscheint das RSA-Verfahren nicht sehr sicher zu sein. Da n und e bekannt sind, sollte man doch $d = e^{-1} \bmod v$ berechnen können. Der Grund, warum dies nicht funktioniert, ist die Tatsache, daß $v = \mathrm{kgV}(p-1, q-1)$ nur mit Hilfe der Primfaktorenzerlegung von $n = pq$ errechnet werden kann, und diese wird nicht bekanntgegeben.
Es hat sich gezeigt, daß die Ermittlung der Primfaktorenzerlegung einer natürlichen Zahl bei wenigen *großen* Primfaktoren am schwierigsten ist. Weiters steigt der Aufwand, die Primfaktorenzerlegung einer Zahl zu bestimmen sehr schnell mit der Größe der vorgegebenen Zahl. Beispielsweise liegt die erwartete Rechenzeit zur Faktorisierung eine 300-stelligen Zahl momentan außerhalb unserer Lebenserwartung.