ABSCHÄTZUNGEN GANZZAHLIGER POLYNOME AUF DEM INTERVALL $[0,1]$

Michael Drmota

Technische Universität Wien

Abstract. Es wird mit Hilfe elementarer Methoden, aber auch unter Benützung des Primzahlsatzes die Frage untersucht, wie klein das Maximum des Absolutbetrages eines Polynoms mit ganzzahligen Koeffizienten auf dem Einheitsintervall in Abhängigkeit des Grades sein kann.

1. Einleitung

Betrachtet man die ganzzahligen Polynome

$$P_{2n}(x) = x^n (1-x)^n \tag{1}$$

vom Grade $2n$, so fällt auf, dass diese auf dem Intervall $[0,1]$ die Werte

$$m_{2n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \tag{2}$$

als Maximum annehmen. Insbesondere konvergieren diese Maxima für $n \to \infty$ exponentiell gegen 0. Es stellt sich nun die Frage, ob man ganzzahlige Polynome finden kann, die ein kleineres Maximum besitzen, und wenn ja, wie weit man diese Werte aus (2) überhaupt verbessern kann. Diese Fragestellung soll zunächst einmal präzisiert werden. Dazu bezeichne man für $n = 1, 2, \dots$ durch $\mathcal{P}_n$ die Menge aller Polynome n-ten Grades

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 \qquad (a_n \neq 0) \tag{3}$$

mit ganzzahligen Koeffizieten a_k $(k = 0, 1, \dots, n)$ und betrachte dazu die Grösse

$$\mu_n = \min_{P_n \in \mathcal{P}_n} (m(P_n))^{1/n} \ , \tag{4}$$

wobei

$$m(P_n) = \max_{0 \le x \le 1} |P_n(x)| \tag{5}$$

das Maximum des Absolutbetrages von $P_n(x)$ auf $[0,1]$ bezeichnen soll. (Dass das Minimum in (4) tatsächlich existiert, wird im nächsten Abschnitt gezeigt.)

Die Aussage (2) kann nun zu

$$\mu_{2n} \le \frac{1}{2} \tag{6}$$

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

umformuliert werden, und die oben gestellte Frage ist darauf reduziert, wie sich die μ_n für $n \to \infty$ verhalten. Diese Fragestellung soll in dieser Note behandelt werdern.

Im folgenden Abschnitt wird gezeigt, dass die Folge der μ_n gegen einen Grenzwert μ konvergiert, der die Abschätzung

$$\frac{1}{e} \le \mu < \frac{1}{\sqrt{5}}$$

erfüllt, wobei aber stets $\mu_n > \mu$ gilt. Die obere Schranke wird durch eine explizite Konstruktion bewiesen, wogegen die untere Schranke $1/e$ interessanterweise aus dem Primzahlsatz folgt. Demnach gilt für jedes ganzzahlige Polynom $P_n \in \mathcal{P}_n$

$$m(P_n) > \left(\frac{1}{e}\right)^n . \tag{7}$$

2. Schranken für μ_n und μ

Zunächst muss sichergestellt werden, dass das Minimum in der Definition (4) existiert.

Lemma 1. *Es gibt nur endlich viele Polynome $P_n \in \mathcal{P}_n$ mit $m(P_n) \le 1$.*

Beweis. Ist $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$, so lassen sich die Koeffizienten aus dem linearen Gleichungssystem

$$\sum_{k=0}^{n} (\frac{j}{n})^k a_k = P_n(\frac{j}{n}) \ , \ j = 0, 1, \ldots, n$$

berechnen, wobei die Koeffizientenmatrix $\left((j/n)^k\right)_{j,k=0,1,\ldots,n}$ eine nur von n abhängige, reguläre (Vandermondsche) Matrix ist. Da wegen $|P_n(j/n)| \le 1$ nur endlich viele Werte für $P_n(j/n)$ in Frage kommen, gibt es daher nur endlich viele Polynome $P_n \in \mathcal{P}_n$ mit $m(P_n) \le 1$.

Bemerkung. Man kann für die Koeffizienten a_k auch folgende explizite Schranken angeben:

$$|a_k| \le 2^k \, k! \binom{n}{k}^2 \ , \ k = 0, 1, \ldots, n \ . \tag{8}$$

Da nämlich $m(P_n) \le 1$ jedenfalls $m(P_n') \le 2n^2$ impliziert (siehe [4]) und die Koeffizienten a_k durch $P_n^{(k)}(0)/k!$ berechenbar sind, folgt (8) durch induktive Anwendung der erstgenannten Eigenschaft.

Für den Nachweis, dass die Folge $(\mu_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergiert, sei folgende Eigenschaft vorangestellt.

Lemma 2. *Ist $n > k \ge 2$, und schreibt man n in der Form $n = qk + r$ mit $0 \le r < k$, dann gilt*

$$\mu_n < \mu_k^{1/(1+\frac{1}{q})} \ . \tag{9}$$

Beweis. Sei $P_k(x)$ ein Polynom aus $\mathcal{P}_k$ mit $m(P_k) = \mu_k^k$, dann gilt für $Q_n(x) = P_k(x)^q x^r$ aus $\mathcal{P}_n$ $m(Q_n) \le \mu_k^{kq}$, woraus aber

$$\mu_n \le \mu_k^{\frac{kq}{n}} < \mu_k^{1/(1+\frac{1}{q})}$$

folgt.

Damit ist der Beweis des folgenden Satzes nicht mehr schwer.

Satz 1. *Die Folge $(\mu_n)_{n=1}^{\infty}$, definiert in (4), konvergiert gegen einen Grenzwert μ, für den für alle $n \geq 1$*

$$\mu_n \geq \mu \tag{10}$$

gilt.

Beweis. Es bezeichne zunächst

$$\mu = \liminf_{n\to\infty} \mu_n \ .$$

Aus (9) folgt für jedes $k \geq 2$

$$\limsup_{n\to\infty} \mu_n \leq \limsup_{q\to\infty} \mu_k^{1/(1+\frac{1}{q})} = \mu_k \ , \tag{11}$$

was aber

$$\limsup_{n\to\infty} \mu_n \leq \liminf_{k\to\infty} \mu_k = \mu \tag{12}$$

impliziert. Also konvergiert die Folge $(\mu_n)_{n=1}^{\infty}$. Weiters folgt aus (11) für alle $k \geq 1$

$$\mu = \lim_{n\to\infty} \mu_n \leq \mu_k \ . \tag{13}$$

Es ist interessant festzustellen, dass in (10) immer strikte Ungleichheit gilt. Dies ergibt sich als Folgerung aus dem nachstehenden

Satz 2. *Gibt es ein Polynom $P_n \in \mathcal{P}_n$ mit $m(P_n) \leq C^n$, wobei C^{-2n} eine ganze Zahl ist, dann gilt*

$$\mu_{2n(1+C^{-2n})} \leq \frac{C}{(1+C^{2n})^{1/(2n)}} < C \ . \tag{14}$$

Beweis. Aus

$$0 \leq x^k(1-x) \leq (\frac{k}{k+1})^k \frac{1}{k+1} \qquad (0 \leq x \leq 1)$$

und $0 \leq C^{-2n}P_n(x)^2 \leq 1$ folgt

$$0 \leq P_n(x)^{2k}(1 - C^{-2n}P_n(x)^2) \leq C^{2nk}(\frac{k}{k+1})^k \frac{1}{k+1} \ . \tag{15}$$

Setzt man nun $k = C^{-2n}$ und $N = 2n(k+1)$, so erhält man wegen (15) ein Polynom N-ten Grades $Q_N(x) = P_n(x)^{2k}(1 - C^{-2n}P_n(x)^2)$ aus $\mathcal{P}_n$, das auf dem Intervall $[0,1]$ absolut durch

$$\left(\frac{C}{(1+C^{2n})^{1/(2n)}}\right)^N \tag{16}$$

beschränkt wird. Damit ist Satz 2 bewiesen.

Korollar. *Für alle $n \geq 1$ gilt*

$$\mu < \mu_{2n([\mu_n^{-2n}]+1)} < \mu_n - \frac{1-\mu_n^{-2n}+[\mu_n^{-2n}]}{1+[\mu_n^{-2n}]}\,\frac{\mu_n}{2n} \ . \tag{17}$$

Beweis. Zunächst wende man Satz 2 mit $C = [\mu_n^{-2n}]^{-1/(2n)}$ an. Bezeichne $\epsilon = 1-\mu_n^{-2n}+[\mu_n^{-2n}]$, dann gilt

$$\mu_n^{2n} - \frac{C^{2n}}{1+C^{2n}} = \frac{\epsilon}{(1+[\mu_n^{-2n}])\mu_n^{-2n}} \ ,$$

woraus aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung

$$\mu_n - \mu > \mu_n - \frac{C}{(1+C^{2n})^{1/(2n)}} > \frac{1}{2n}\,\frac{1}{\mu_n^{2n-1}}\,\frac{\epsilon}{(1+[\mu_n^{-2n}])\mu_n^{-2n}}$$

folgt.

Um diesen Satz anzuwenden, betrachte man vorerst jene n, für die man μ_n explizit berechnen kann.

n	μ_n	$P_n(x)$
1	1	x
2	2^{-1}	$x(1-x)$
3	$(\sqrt[3]{2}\sqrt[2]{3})^{-1}$	$x(2x-1)(1-x)$
4	2^{-1}	$x^2(1-x)^2$
5	$5^{-1/2}$	$x^2(2x-1)(1-x)^2$

Für $n=5$ ist $\mu_5^{-10} = 5^5$ eine ganze Zahl. Nach Satz 2 und seinem Korollar erhält man daher

$$\mu < (1+5^5)^{-1/10} < 0.4472 < 5^{-1/2} < 0.4472136 \ . \tag{18}$$

Man sieht schon an diesem einfachen Beispiel, dass es nicht so einfach ist, ein kleines C zu erreichen. Aus diesem Gesichtspunkt ist es daher nicht verblüffend, dass es für μ_n eine natürliche untere Schranke gibt, die allerdings aus dem Primzahlsatz

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi(n)}{n/\log n} = 1$$

folgt. ($\pi(n)$ ist die Anzahl der Primzahlen $\leq n$.)

Satz 3. *Es gilt $\mu \geq 1/e$ und daher für alle $n \geq 1$*

$$\mu_n < \frac{1}{e} \tag{19}$$

Zum Beweis benötigt man folgendes Lemma.

Lemma 3. *Bezeichnet man mit $V(n)$ das kleinste, gemeinsame Vielfache der ersten n natürlichen Zahlen $1, 2, \ldots, n$, dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log V(n)}{n} = 1 \ . \tag{20}$$

Beweis. Wegen

$$V(n) = \prod_{p\leq n} p^{\left[\frac{\log n}{\log p}\right]}$$

ist

$$\log V(n) = \sum_{p\leq n} \left[\frac{\log n}{\log p}\right] \log p = \sum_{p^m\leq n} \log p = \psi(n)$$

der Tschebyscheffschen ψ–Funktion gleich. Der Primzahlensatz ist aber zu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\psi(n)}{n} = 1$$

äquivalent

Beweis von Satz 3. Sei $P_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k x^k$ ein Polynom aus $\mathcal{P}_n$ mit $m(P_n) = \mu_n^n$. (a_0 muss 0 sein, da sonst $|P_n(0)| = |a_0| \geq 1$ wäre.) Nun ist

$$\mu_n^{2n} \geq \int_0^1 P_n(x)^2\, dx = \sum_{k=2}^{2n} \left(\sum_{i+j=k} a_i a_j \right) \frac{1}{k+1} \geq \frac{1}{V(2n+1)} \ .$$

woraus zunächst

$$\mu_n \geq e^{-\frac{\log V(2n+1)}{2n}}$$

und schliesslich

$$\mu = \lim_{n\to\infty} \mu_n \geq \frac{1}{e}$$

folgt, was zusammen mit der Ungleichung $\mu_n > \mu$ aus dem Korollar von Satz 2 die Aussage von Satz 3 impliziert.

Abschliessende Bemerkungen

Die Problemstellung lässt sich ohne Schwierigkeiten auf den mehrdimensionalen Fall, also auf Polynome in mehreren Variablen, verallgemeinern. Man erhält mit ganz analogen Methoden dieselben Ergebnisse wien im eindimensionalen Fall.

Es bleibt noch die Frage offen, welchen Wert μ tatsächlich annimmt. Aus dem Korollar von Satz 2 lässt sich wenigstens ablesen, dass es, wenn man ein n sucht, für das $\mu_n < \mu + \epsilon$ gilt, sinnvoll ist, erst mit dem Grad $n = [-3\log\epsilon]$ die Suche zu beginnen, da für n mit $\mu_n < \mu + \epsilon$ das Korollar die Ungleichung $2n\epsilon(1 + e^{2n}) \geq \mu_n(1 - \mu_n^{-2n} + [\mu_n^{-2n}])$ zur Folge hat, die für $n < [-3\log\epsilon]$ nicht unbedingt erfüllt sein muss, da die letzte Klammer sehr nahe bei 1 liegen kann.

In diesem Zusammenhang sei erwähnt, dass eine ähnliche Fragestellung schon von D. Hilbert [3] behandelt wurde. Er bewies mit Hilfe eines Gitterpunktsatzes von Minkowski, dass für jedes reelle Intervall $[a,b]$ mit Länge $b-a<4$ Polynome $P_n \in \mathcal{P}_n$ existieren, die die Abschätzung

$$\int_a^b P_n(x)^2\,dx < (l_n \frac{b-a}{4})^n$$

mit einer Folge $(l_n)_{n=1}^{\infty}$, für die $\lim_{n\to\infty} l_n = 1$ gilt, erfüllen, die Integrale also insbesondere gegen 0 konvergieren. Spezialisiert man dies auf das Intervall $[0,1]$ und berücksichtigt man, dass aus

$$\int_0^1 P_n(x)^2\,dx \le C^2$$

immer $m(P_n) \le (n+1)C$ folgt (siehe [4]), impliziert der Hilbertsche Satz $\mu \le 1/2$. interessanterweise kann man mit dieser Methode nichts Besseres erzielen. K. Prachar [5] hat nämlich gezeigt, dass es für Intervalle $[a,b]$ mit Länge $b-a\ge 4$ keine Polynome $P_n \in \mathcal{P}_n$ geben kann, für die die Folge

$$\int_0^1 P_n(x)^2\,dx$$

gegen 0 konvergiert. Dass μ tatsächlich kleiner als $1/2$ ist, wird daher daran liegen, dass die betrachteten Intervallgrenzen 0 und 1 ganzzahlig sind.

Abschliessend möchte ich noch erwähnen, wie ich auf diese Fragestellung gestossen bin. Beim Studium des Beukerschen Beweises [2] der Irrationalität von $\zeta(2)$ und $\zeta(3)$ — der erste Beweis der Irrationalität von $\zeta(3)$ stammt übrigens von R. Apéry [1] — fällt auf, dass man ihn vereinfachen könnte, wenn man für genügend kleine C ganzzahlige Polynome $P_n \in \mathcal{P}_n$ fände, die die Abschätzung $m(P_n) \le C^n$ erfüllten. Insbesonder müsste man $C < 1/e$ wählen können. Dies ist aber nach Satz 3 dieser Note nicht möglich. Die Frage nach der Irrationalität beziehungsweise auch die nach der Transzendenz von $\zeta(n)$ kann daher nicht mit dieser Methode gelöst werden. Für ungerade n ist dieses Problem ja nach wie vor ungelöst.

Literatur

[1] R. Apéry, *Interpolation de fractions continues et irrationalité de certaines constantes*, CTHS Bull. Sec. Sci., III, Bib. Nat. Paris (1981), 37–53.

[2] F. Beukers, *A note on the irrationality of* $\zeta(2)$ *and* $\zeta(3)$, Bull. London Math. Soc. **11** (1979), 268–272.

[3] D. Hilbert, *Ein Beitrag zur Theorie des Legendreschen Polynoms*, Acta Mathematica **18** (1894), 155–159.

[4] G. Pòlya und G. Szegö, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis II*, Springer, New York, 1964.

[5] K. Prachar, *Über die quadratische Abweichung ganzzahliger Polynome von der Null*, phil. Diss. an der Univ. Wien, 1947.

Technische Universität Wien
Institut für Algebra und Diskrete Mathematik
Abteilung für Diskrete Mathematik
Wiedner Hauptstrasse 8–10
A–1040 Wien, Österreich