

Konstruktion und Dekonstruktion von p -adischen Zahlen, Prüfergruppe und Verwandten

Eine Einführung in den kategorientheoretischen Werkzeugkasten

Manuel Eder

Oktober 2013

Zusammenfassung

Die p -adischen Zahlen und die Prüfergruppe sind Beispiele eines Limes¹ bzw. eines Kolimes² im kategorientheoretischen Sinn, für deren Verhalten man relativ leicht Intuition entwickelt.

Wir wollen an diesen beiden Beispielen die Konzepte eines Limes und eines Kolimes, sowie das nötige Werkzeug, um über diese sprechen zu können, „entdecken“. Wir untersuchen, wie Limiten und Kolimiten in Kategorien algebraischer Objekte, wie zum Beispiel der Kategorie **Ring** der Ringe oder der Kategorie **Ab** der abelschen Gruppen, sowie in der Kategorie der Mengen aussehen, und stellen Verbindungen her.

Wir präsentieren ein paar einfache Resultate, wie zum Beispiel, dass der Vergissfunktorkontraktor von einer algebraischen Kategorie in die Kategorie der Mengen stetig ist (und später auch, dass er Limiten erzeugt), sowie ein Resultat über iterierte Limiten und die klassische Konstruktion von Limiten aus Produkten und Egalisatoren. Ganz am Ende betrachten wir noch das Verhältnis von Kolimiten von Funktoren über Halbordnungen und den Kolimiten der auf bestimmte „(ko)finale“ Teilhalbordnungen eingeschränkten Funktoren. Durchgehend liegt unser Fokus nicht auf den Resultaten, sondern auf den Werkzeugen, die uns erlauben, diese Resultate zu finden. Das Argumentieren anhand von Diagrammen und über natürliche Isomorphie von hom -Funktoren wird vielfach vorgeführt.

Wir zeigen, wie sich die Dualität in der Kategorientheorie, also zum Beispiel die Dualität zwischen Limes und Kolimes, ausnutzen lässt, um in einem Kontext gewonnene Intuitionen auf den anderen zu übertragen. Wir halten die Verbindung zu unseren konkreten Beispielen, den p -adischen Zahlen und der Prüfergruppe, und motivieren alle allgemeinen Ergebnisse aus dem Bedürfnis, diese beiden Beispiele besser zu verstehen. Am Ende, wenn wir herausfinden, dass der Vergissfunktorkontraktor den speziellen Kolimes, der die Prüfergruppe ist, erzeugt, kommen viele dieser Ergebnisse nochmals zusammen.

¹anderswo auch inverser Limes oder projektiver Limes genannt

²anderswo auch direkter Limes oder induktiver Limes genannt