## Vorlesungsprüfung Mathematik 3 7.12.2012

Name: ...................................

Matr.Nr.: ..............................

**Deckblatt nicht herunterreissen! - Nicht mit Bleistift oder rotem Stift schreiben!**

1. Gegeben sind Vektoren $f$ und $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ eines Vektorraums $\mathcal{V}$ mit Skalarprodukt.
   (a) Geben Sie die Orthogonalprojektion $f^*$ von $f$ auf den von $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ aufgespannten Unterraum an
   (b) Rechnen Sie nach, dass die von Ihnen in (a) angegebene Projektion tatsächlich eine Orthogonalprojektion ist, d.h. dass $f - f^*$ orthogonal auf den Unterraum steht.
   (c) Beweisen Sie: Sind $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ paarweise orthogonal, dann sind sie auch linear unabhängig, d.h. zeigen Sie dass jede Linearkombination
   $$c_1\phi_1 + c_2\phi_2 + \ldots + c_m\phi_m = \mathbf{o}$$
   trivial ist. Gegeben Sie ein konkretes Beispiel das zeigt, dass die Umkehrung dieser Aussage nicht gilt!

**5 Punkte (1+2+2)**

2. Betrachten Sie den Drehkörper („Einschaliges Hyperbolid")
   $$P = \left\{(x, y, z) : x \leq \sqrt{z^2+1}\cos\varphi, \quad y \leq \sqrt{z^2+1}\sin\varphi \quad \text{mit} \quad \varphi \in [0, 2\pi), z \in [-1, 1]\right\}$$
   Skizzieren Sie $P$ und berechnen Sie für das Vektorfeld $\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5(z^2-1)y \\ 3z \end{pmatrix}$ das Integral
   $$\iiint\limits_P \nabla \cdot \mathbf{V}(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$
   indem Sie einen **Integralsatz** verwenden! **4 Punkte**
   Achtung: Nicht auf Deck- und Grundfläche vergessen!

## Bitte wenden!

3. Gegeben ist die PDE
$$tu_t + \frac{1}{x} u_x = 0,$$
   (a) Klassifizieren Sie die PDE, d.h. bestimmen Sie die Ordnung und entscheiden Sie ob die PDE linear, quasilinear und/oder nichtlinear ist. Begründen Sie ihre Antwort!
   (b) Finden Sie alle Lösungen der PDE und machen Sie die Probe!
   (c) Welche der folgenden Bedingungen lassen sich für die PDE erfüllen? Geben Sie, wenn möglich, die konkrete Lösung $u(t, x)$ an bzw. begründen Sie warum keine Lösung existieren kann: (i) $u(t = 0, x) = x$ bzw. (ii) $u(t, x = 0) = t$.

**5 Punkte (1+2+2)**

4. Gegeben ist das Randwert-Problem für $0 \leq x \leq \pi$ und $0 \leq y \leq \pi$ :
$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad u(0, y) = u(\pi, y) = 0, \quad u(x, 0) = u(x, \pi) = \sin(x). \tag{1}$$
   (a) Überprüfen Sie ob die PDE (1) linear ist und entscheiden Sie gegebenenfalls ob sie elliptisch, hyperbolisch oder parabolisch ist.
   (b) Führen Sie für die PDE (1) den Separationsansatz durch und geben Sie die beiden erhaltenen eindimensionalen Randwertprobleme vollständig (d.h. mit den Randwerten) an!
   (c) Geben Sie die Lösung der PDE (1) an.

**6 Punkte (1+1+4)**

**____ / 20**

# Gutes Gelingen