Vorlesungsprüfung Mathematik 3 8.3.2013

Deckblatt nicht herunterreissen! - Nicht mit Bleistift oder rotem Stift schreiben! Bei den Aufgaben 1 und 2 zählen nur die Anworten auf dem Deckblatt. Es sind stets konkrete Zahlen einzutragen! Etwaige Nebenrechnungen bitte auf Schmierpapier durchführen.

Name: .... Matr.Nr.: ....

1. Setzen Sie die Funktion $g(x) = \sin x$ vom Intervall $[0, \pi]$ π-periodisch auf ganz $\mathbb{R}$ fort. Sei $G(x)$ diese Fortsetzung. Entwickeln Sie $G(x)$ in eine trigonometrische Fourier-Reihe auf $[0, 2\pi]$ und beantworten Sie folgende Fragen!

   (a) G ist ☐ gerade ☐ ungerade ☐ weder gerade noch ungerade

   (b) Der Fourier-Koeffizient $\frac{a_0}{2}$ lautet ....

   (c) Der Fourier-Koeffizient a_2 lautet ....

   (d) Der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ lautet ....
   $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ lautet ....

   Betrachten Sie nun die Fourier-Approximationen $s_n(x)$ von G für $n \to \infty$

   (e) Der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(-\frac{\pi}{2})$ lautet ....

   10 Punkte (2+2+2+2+2)

2. Betrachten Sie das auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{\boldsymbol{o}\}$ definierte Vektorfeld

$$\mathbf{V}_\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{(x^\alpha + y^\alpha + z^\alpha)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

   wobei $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Parameter ist. Beantworten Sie folgende Fragen:

   (a) Für welche Werte von α ist $\nabla \cdot \mathbf{V}_\alpha = 0$?
   ☐ für kein α ☐ $\alpha = 0$ ☐ $\alpha = 1$ ☐ $\alpha = 2$ ☐ $\alpha = 3$

   (b) Sei $\alpha = 0$ und B die Kugel mit Radius 1 und Mittelpunkt $(0, 0, 0)$. Der Wert des Oberflächenintegrals $\iint\limits_{\partial B} \mathbf{V}_0 \, d\boldsymbol{O}$ beträgt: ....

   (c) Sei $\alpha = 2$ und B die Kugel mit Radius 1 und Mittelpunkt $(0, 0, 0)$. Der Wert des Oberflächenintegrals $\iint\limits_{\partial B} \mathbf{V}_2 \, d\boldsymbol{O}$ beträgt: ....

   (d) Für welche Werte von α ist $\nabla \times \mathbf{V}_\alpha = 0$?
   ☐ für kein α ☐ nur für $\alpha = 0$ ☐ nur für $\alpha = 1$ ☐ für alle α

   (e) Sei $\alpha = 2$ und C die gegen den Uhrzeigersinn durchlaufene Kreislinie mit Radius 1 und Mittelpunkt $(0, 0, 0)$, welche sich in der Ebene $z = 0$ befindet. Der Wert des Kurvenintegrals $\oint_C \mathbf{V}_2 \, d\boldsymbol{x}$ beträgt: ....

   10 Punkte (2+2+2+2+2)

3. (a) i. Es ist V ein Vektorraum mit Skalarprodukt, U ein Unterraum von V und $x \in V$ ein beliebiger, aber fest gewählter Vektor. Welche beiden Eigenschaften kennzeichnen $P_U x$, die orthogonale Projektion des Vektors x auf den Unterraum U?

Achtung: Es ist hier <u>nicht</u> gefragt, wie man $P_U x$ konkret berechnet!

ii. Welcher der nachfolgenden Vektoren im $\mathbb{R}^3$ ist die orthogonale Projektion von $(1, 1, 1)$ auf die Ebene $x - y + z = 0$?

☐ $(1, 1, 1)$ ☐ $(1, 1, 0)$ ☐ $(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3})$ ☐ $(0, 1, 1)$ ☐ $(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2})$

iii. Welcher der nachfolgenden Vektoren in $C[0, 2\pi]$ (versehen mit dem üblichen Skalarprodukt) ist die orthogonale Projektion von $\sin x \cos x$ auf den von $\sin x$ und $\cos x$ erzeugten Unterraum?

☐ $\frac{1}{2}$ ☐ $\sin x$ ☐ $\cos x$ ☐ $\sin 2x$ ☐ $\cos 2x$ ☐ 0

(b) i. Was versteht man unter den Charakteristiken einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung?

Geben Sie bitte nur eine Erklärung/Definition und keine Äquivalenzen an!

ii. Fertigen Sie eine aussagekräftige und akkurate <u>Skizze</u> der Charakteristiken der partiellen Differentialgleichung $xu_x + yu_y = 0$ an!

8 Punkte (4+4)

4. Betrachten Sie die Laplace Gleichung am Halbkreis $H := \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1 \text{ und } y \geq 0\}$ in Polarkoordinaten:

$$r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\varphi\varphi} = 0.$$

   (a) Führen Sie für die obige Gleichung auf H den Separationsansatz durch und geben Sie möglichst viele Lösungen an, welche von der Gestalt $u(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$ sind. Bestimmen Sie unter all den so erhaltenen Lösungen jene, welche die Randbedingung $u = 0$ auf $\{(x,0) : -1 \leq x \leq 1\}$ erfüllen!

   (b) Geben Sie speziell jene Lösung an, welche zusätzlich auch noch

$$u(1,\varphi) = \sin\varphi$$

   für $0 \leq \varphi \leq \pi$ erfüllt.

   (c) Geben Sie die Laplace Gleichung in kartesischen Koordinaten an und machen Sie für die von Ihnen in (b) erhaltene Lösung die Probe in kartesischen Koordinaten!

12 Punkte (7+3+2)