Prüfung Mathematik 3 — 3.5.2013

Deckblatt nicht herunterreissen! - Nicht mit Bleistift oder rotem Stift schreiben! Bei den Aufgaben 1 und 2 zählen nur die Anworten auf dem Deckblatt. Es sind stets konkrete Zahlen einzutragen! Etwaige Nebenrechnungen bitte auf Schmierpapier durchführen.

Name: .... Matr.Nr.: ....

1. Setzen Sie die Funktion $g(x) = |x|$ vom Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ π-periodisch auf ganz $\mathbb{R}$ fort. Sei $G(x)$ diese Fortsetzung. Entwickeln Sie $G(x)$ in eine trigonometrische Fourier-Reihe auf $[0, 2\pi]$ und beantworten Sie folgende Fragen!

   (a) Der Fourier-Koeffizient $\frac{a_0}{2}$ lautet ....

   (b) Der Fourier-Koeffizient a_1 lautet ....

   (c) Der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n^2 + b_n^2)$ lautet ....

   (d) Die Summe $\frac{a_0^2}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$ lautet ....

   Betrachten Sie nun die Fourier-Approximationen $s_n(x)$ von G für $n \to \infty$

   (e) Der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(-\frac{3}{2}\pi)$ lautet ....

10 Punkte (2+2+2+2+2)

2. Betrachten Sie das auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{\boldsymbol{o}\}$ definierte Vektorfeld

$$\mathbf{V}_\alpha(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\,\|\mathbf{x}\|^{-\alpha}, \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{o}$$

   wobei $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Parameter ist. Beantworten Sie folgende Fragen:

   (a) Für welche Werte von α ist $\nabla \cdot \mathbf{V}_\alpha = 0$?
   ☐ für kein α ☐ $\alpha = 0$ ☐ $\alpha = 1$ ☐ $\alpha = 2$ ☐ $\alpha = 3$

   (b) Sei $\alpha = 2$ und B die Kugel mit Radius 1 und Mittelpunkt $(0,0,0)$. Der Wert des Oberflächenintegrals $\iint\limits_{\partial B} \mathbf{V}_2\, d\boldsymbol{O}$ beträgt: ....

   (c) Sei $\alpha = 0$ und B die Kugel mit Radius 1 und Mittelpunkt $(0,0,0)$. Der Wert des Oberflächenintegrals $\iint\limits_{\partial B} \mathbf{V}_0\, d\boldsymbol{O}$ beträgt: ....

   (d) Für welche Werte von α ist $\nabla \times \mathbf{V}_\alpha = 0$?
   ☐ für kein α ☐ nur für $\alpha = 0$ ☐ nur für $\alpha = 1$ ☐ für alle α

   (e) Sei $\alpha = 2$. Das Vektorfeld $\mathbf{V}_2$ besitzt auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{\boldsymbol{o}\}$
   ☐ ein skalares Potential und zwar ....
   ☐ ein Vektor-Potential und zwar ....
   ☐ weder ein skalares noch ein Vektorpotential

10 Punkte (2+2+2+2+2)

3. (a) i. Es ist V ein Vektorraum mit Skalarprodukt, U ein Unterraum von V und $x \in V$ ein beliebiger, aber fest gewählter Vektor. Welche Eigenschaften muss ein Vektor $y \in V$ haben, damit er die orthogonale Projektion des Vektors x auf den Unterraum U ist?

   Achtung: Es ist hier <u>nicht</u> gefragt, wie man Projektion konkret berechnet! Geben Sie nur die gefragten Eigenschaften an, keine Rechenverfahren!

   ii. Welcher der nachfolgenden Vektoren im $\mathbb{R}^3$ ist die orthogonale Projektion von $(2,1,0)$ auf die Ebene $x+y+z=0$?

   ☐ $(2,1,0)$ ☐ $(1,0,-1)$ ☐ $(1,-1,0)$ ☐ $(-1,0,1)$ ☐ $(0,0,0)$

   iii. Welcher der nachfolgenden Vektoren in $C[0,2\pi]$ (versehen mit dem üblichen Skalarprodukt) ist die orthogonale Projektion von $\sin x + 2\sin x\cos x$ auf den von $\sin 2x$ und $\cos 2x$ erzeugten Unterraum?

   ☐ 2 ☐ $\sin x$ ☐ $\cos x$ ☐ $\sin 2x$ ☐ $\cos 2x$ ☐ 0

   (b) i. Was versteht man definitionsgemäß unter den Charakteristiken einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung?

   Geben Sie bitte nur die Definition und keine Äquivalenzen an!

   ii. Fertigen Sie eine aussagekräftige und akkurate <u>Skizze</u> der Charakteristiken der partiellen Differentialgleichung $xu_x + yu_y = 0$ an!

8 Punkte (4+4)

4. Betrachten Sie die Laplace Gleichung am Kreisring $K := \{(x,y) : 1 \le \sqrt{x^2+y^2} \le 2\}$ in Polarkoordinaten:

$$r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\varphi\varphi} = 0.$$

   (a) Führen Sie für die obige Gleichung auf K den Separationsansatz durch und geben Sie möglichst viele Lösungen an, welche von der Gestalt $u(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$ sind! Vergessen Sie nicht auf die Lösungen die zum Eigenwert 0 gehören!

   (b) Geben Sie die allgemeine Lösung der obigen Gleichnung an, sowie speziell jene Lösung, welche zusätzlich

$$u(1,\varphi) = 1 \quad \text{und} \quad u(2,\varphi) = 3\sin\varphi$$

   erfüllt!

12 Punkte (8+4)