Prüfung Mathematik 3 11.10.2013

Deckblatt nicht herunterreissen! - Nicht mit Bleistift oder rotem Stift schreiben! Bei den Aufgaben 1 und 2 zählen nur die Anworten auf dem Deckblatt. Es sind stets konkrete Zahlen einzutragen! Etwaige Nebenrechnungen bitte auf Schmierpapier durchführen und nicht abgeben!

Name: .... Matr.Nr.: ....

1. Setzen Sie die Funktion $g(x) = \pi - |x|$ vom Intervall $[-\pi, \pi)$ periodisch auf ganz $\mathbb{R}$ fort. Sei $G(x)$ diese Fortsetzung. Entwickeln Sie $G(x)$ in eine trigonometrische Fourier-Reihe auf $[0, 2\pi]$ und beantworten Sie folgende Fragen!

   (a) G ist ☐ gerade ☐ ungerade ☐ weder gerade noch ungerade

   (b) Der Fourier-Koeffizient $\frac{a_0}{2}$ lautet ....

   (c) Der Fourier-Koeffizient a_1 lautet ....

   (d) Der Wert der Summe $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$ lautet ....

   Betrachten Sie nun die Fourier-Approximationen $s_n(x)$ von G für $n \to \infty$

   (e) Der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} s_n(2\pi)$ lautet ....

10 Punkte (2+2+2+2+2)

2. Betrachten Sie das auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{\boldsymbol{o}\}$ definierte Vektorfeld

$$\mathbf{V}_\alpha(\mathbf{x}) = \alpha^2 \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^{3\alpha}} + (1 - \alpha^2)\,\mathrm{rot}\,(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x})$$

   wobei $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Parameter ist und $\boldsymbol{\omega} = (1/0/0)$. Beantworten Sie folgende Fragen:

   (a) Für welche Werte von α ist $\nabla \cdot \mathbf{V}_\alpha = 0$?
   ☐ für kein α ☐ $\alpha = -1$ ☐ $\alpha = 0$ ☐ $\alpha = 1$ ☐ für alle α

   (b) Sei $\alpha = 1$ und B die Kugel mit Radius 2 und Mittelpunkt $(0/0/0)$. Der Wert des Oberflächenintegrals $\iint_{\partial B} \mathbf{V}_1\, d\boldsymbol{O}$ beträgt: ....

   (c) Sei $\alpha = -1$ und B die Kugel mit Radius 2 und Mittelpunkt $(0/0/0)$. Der Wert des Oberflächenintegrals $\iint_{\partial B} \mathbf{V}_{-1}\, d\boldsymbol{O}$ beträgt: ....

   (d) Für welche Werte von α ist $\nabla \times \mathbf{V}_\alpha = 0$?
   ☐ für kein α ☐ nur für $\alpha = 0$ ☐ nur für $\alpha = \pm 1$ ☐ für alle α

   (e) Sei $\alpha = 0$. Das Vektorfeld $\mathbf{V}_0$ besitzt
   ☐ ein skalares Potential und zwar ....
   ☐ ein Vektor-Potential und zwar ....
   ☐ weder ein skalares noch ein Vektorpotential

10 Punkte (2+2+2+2+2)

3. (a) Wie lautet die zweite Green'sche Formel im $\mathbb{R}^3$

$$\iiint\limits_D (f\Delta g - g\Delta f)\, dx\, dy\, dz = \ldots\ldots \quad ?$$

i. Komplettieren Sie die Formel!

ii. Erklären und definieren Sie alle darin vorkommenden Differentialoperatoren!

iii. Geben Sie Voraussetzungen an, die garantieren, dass die Formel gültig ist!

(b) i. Geben Sie die d'Alembert'sche Darstellung der Lösung der beidseitig unbeschränkten Wellengleichung an:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \qquad u(x,0) = g(x), \quad u_t(x,0) = h(x), \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}, t \geq 0.$$

ii. Verwenden Sie das Reflexionsprinzip um folgende einseitig unbeschränkte Wellengleichung zu lösen:

$$u_{tt} = u_{xx}, \qquad u(x,0) = x^2, \quad u_t(x,0) = 0 \text{ und } u(0,t) = 0 \text{ für } x \geq 0, t \geq 0.$$

iii. Skizzieren Sie die Lösung aus (ii) zum Zeitpunkt $t = 1$ für $x \geq 0$.

10 Punkte ((2+2+1)+(2+2+1))

4. Betrachten Sie die Wärmeleitungsgleichung in einem Stab der Länge 2, welcher an seinen Enden im thermischen Gleichgewicht mit seiner Umgebung steht.

$$u_t(x,t) = \sigma u_{xx}(x,t), \qquad u_x(-1,t) = 0, \quad u_x(1,t) = 0.$$

(a) Führen Sie für die obige Gleichung auf $[-1, 1]$ den Separationsansatz durch und geben Sie möglichst viele Lösungen an, welche von der Gestalt $u(x,t) = X(x)T(t)$ sind!

(b) Geben Sie für $\sigma = 1$ jene Lösung der Wärmeleitungsgleichung an, welche zusätzlich erfüllt:

$$u(x,0) = \sin^2(\pi x).$$

(c) Machen Sie für Ihre Lösung aus (b) die Probe (explizites Nachrechnen aller Forderungen)!

10 Punkte (6+2+2)