Prüfung Mathematik für BI – 4.5.2012

Name/ Matrikelnummer:..

Lösen Sie die Beispiele der Angabe entsprechend, begründen Sie Ihre Antworten, aber fassen Sie sich kurz!

1. Gegeben sei die Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3/2 & 0 \\ 3 & -5/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   (a) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von A.
   (b) Bestätigen Sie Ihr Ergebnis aus (a), indem Sie für einen Ihrer Eigenvektoren nachweisen, dass er die definierende Gleichung von Eigenwerten und Eigenvektoren erfüllt.
   (c) Wie lauten die Koordinaten des Punktes P, dessen Koordinaten bezüglich der Standardbasis $(1, 1, 1)^T$ sind, bezüglich der Basis aus Eigenvektoren?

   5 Punkte (3+1+1)

2. (a) Gegeben sind die Nullstellen $\lambda_1 = i$ und $\lambda_2 = -i$ einer charakteristischen Gleichung einer homogenen linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten.
      i. Geben Sie ein reelles Fundamentalsystem dieser Differentialgleichung an.
      ii. Angenommen $f(x) = (x^2+1)\cos(x)$ ist eine Inhomogenität dieser Differentialgleichung. Geben Sie den Ansatz für eine Partikulärlösung der Differentialgleichung mit Inhomogenität $f(x)$ nach der Ansatzmethode an.
   (b) Berechnen Sie alle Extrema (d.h. innere Extreme UND Randextrema) der Funktion $f(x, y) = x(y^2 - 1)$ über dem Bereich begrenzt durch die Geraden $x = 0$, $y = -x$ und $1 - 2x$.

   5 Punkte (1,5(0,5+1)+3,5)

3. Es sei D das Dreieck begrenzt durch die Geraden $y = 1 - x$, $y = 2x$ und $y = 1 + x$.
   (a) Berechnen Sie das Doppelintegral $\iint_D 2x dx dy$, indem Sie die Substitution $x = (u + v)/2$ und $y = (u - v)/2$ durchführen. Skizzieren Sie die Integrationsbereiche vor und nach der Substitution.
   Anmerkung: Wenn Sie nicht wissen, wie man substituiert, berechnen Sie das Integral direkt (mit einem Punkt Abzug).
   (b) Führen Sie das Kurvenintegral $\int_C \boldsymbol{v}\ d\boldsymbol{x}$, wobei C der gegen den Uhrzeigersinn durchlaufene Rand des Dreiecks D und $\boldsymbol{v} = \binom{x}{x^2}$ sind, mit einem geeigneten Integralsatz auf das Integral aus (a) zurück.

   5 Punkte(3,5+1,5)

4. Legendrepolynome $p_n(x)$, $n = 1, 2 \ldots$, sind Polynome, welche auf $[-1, 1]$ ein vollständiges Orthogonalsystem bezüglich des inneren Produktes $< f, g >= \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$ bilden. Die ersten Legendrepolynome lauten:
$$p_0(x) = 1,\ p_1(x) = x,\ p_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \ldots$$
   (a) Zeigen Sie rechnerisch, dass $p_0(x)$ und $p_2(x)$ tatsächlich orthogonal sind.
   (b) Bestätigen Sie die allgemeine Formel
$$\|p_n(x)\|^2 = \frac{2}{2n+1} \qquad (1)$$
   im Fall $n = 1$, d.h. berechnen Sie $\|p_1(x)\|^2$ unter Verwendung des inneren Produkts.
   (c) Sei $f(x) = e^x$. Berechnen Sie die Koeffizienten c_0 und c_1 der Entwicklung von $f(x)$ in die ersten zwei Legendrepolynome $p_0(x)$ und $p_1(x)$ und geben Sie die Entwicklung von $f(x)$ an.
   Anmerkung: Die Formel (1) erspart etwas Arbeit.

   5 Punkte (1+1+3)

Viel Erfolg!