Prüfung Mathematik 1 für BI – 11.3.2011

Name/ Matrikelnummer:...

Lösen Sie die Beispiele der Angabe entsprechend und fassen Sie sich kurz!

1. (a) Berechnen Sie den Abstand des Punktes $P = (1, 2, 3)$ von der Ebene $x + y + z = 1$.
   (b) Erläutern Sie den Differentialquotienten anhand einer Skizze.
   (c) Berechnen Sie $f'(a)$ für $f(x) = x^2 + \frac{x}{2}$ mit dem Differentialquotienten.

   4 Punkte (1,5+1+1,5)

2. Sei (a_n) eine allgemeine Folge (d.h. keine konkrete Folge annehmen!) und (b_n) eine weitere Folge erklärt durch $b_n = a_{n+1} - a_n$.
   Welche der folgenden Aussagen sind richtig, welche sind falsch? Wenn Sie eine Aussage für richtig halten, argumentieren Sie dies mit einer **kurzen** Erklärung. Falsche Aussagen widerlegen Sie durch ein Gegenbeispiel. (Ohne Erklärung, d.h. für Raten, gibt es keine Punkte.)

   (a) Ist (a_n) konvergent, so konvergiert (b_n).
   (b) Ist (a_n) divergent, so divergiert (b_n).
   (c) Ist (a_n) konvergent, so konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
   (d) Ist (a_n) konvergent, so konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. (Partialsummen betrachten!)

   4 Punkte (jeweils 1)

3. (a) Formulieren Sie, was

   $$\textit{die Funktion } g(x) \textit{ ist auf } [a, \infty) \textit{ uneigentlich integrierbar}$$

   bedeutet.
   (b) Berechnen Sie das uneigentliche Integral von $g(x) = xe^{-x^2+1}$ auf $[1, \infty)$.
   (c) Formulieren Sie ein Kriterium mit welchem aus der Konvergenz von $g(x)$ aus (b) die Konvergenz des uneigentlichen Integrals von $f(x) = \sin(x)e^{-x^2+1}$ auf $[1, \infty)$ folgt.

   4 Punkte (1+2+1)

4. Sei $f(x) = x\mathrm{e}^{2x}$.

   (a) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass

   $$f^{(n)}(x) = 2^{n-1}n\mathrm{e}^{2x} + 2^n x\mathrm{e}^{2x},$$

   wobei $f^{(n)}(x)$ die n–te Ableitung von $f(x)$ ist.
   (b) Wie lautet nach (a) die Taylorreihe von $f(x)$ mit Entwicklungspunkt $a = 0$?

   4 Punkte (2,5+1,5)

5. (a) Wie lautet der Definitionsbereich der reellen Funktion $r(x) = \frac{1}{p(x)}$, wobei $p(x) = (x^2 + 2)(x + 2)^2$?
   (b) Wie lautet der Ansatz der Partialbruchzerlegung der Funktion $r(x)$ aus (a)?
   (c) Berechnen Sie einen (nur einen!) Koeffizienten der Partialbruchzerlegung von $r(x)$ aus (a).
   (d) Geben Sie ein Polynom $q(x)$ an, sodass $\lim_{x\to a} \frac{q(x)}{p(x)}$ für das $p(x)$ aus (a) für alle reellen a existiert.

   4 Punkte (0,5+1+1,5+1)

Viel Erfolg!