Prüfung Mathematik – 4.5.2012

Name/ Matrikelnummer:..

Lösen Sie die Beispiele der Angabe entsprechend, begründen Sie Ihre Antworten, aber fassen Sie sich kurz!

1. (a) Zeigen Sie die Gültigkeit der Gleichung $(\cos(x) + i\sin(x))^n = \cos(nx) + i\sin(nx)$, für $n = 0, 1, 2, \ldots$, auf zwei verschiedene Arten:
   i. mittels vollständiger Induktion und den Summensätzen
      - $\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$ und
      - $\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$.

   ii. unter Verwendung der Formel von Euler.

   3,5 Punkte (2,5+1)

2. (a) Wählen Sie a, b, c, d reell so, dass die Folge $\frac{an^2-(b+(-1)^n)n}{dn^c}$ konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert für Ihre Wahl von a, b, c, d.
   (b) Wählen Sie a, b, c, d reell so, dass die Folge $\frac{an^2-(b+(-1)^n)n}{dn^c}$ beschränkt ist aber divergiert und begründen Sie die Divergenz kurz.
   (c) Zeigen Sie, dass $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n} = 4$, indem Sie
   i. die geometrische Reihe und deren Summenfunktion ableiten und
   ii. einen passenden Wert in die abgeleitete Reihe und deren Summenfunktion einsetzen und die behauptete Gleichung bestätigen.

   4 Punkte (2(1+1)+2(1,5+0,5))

3. Welche der folgenden Aussagen/ Gleichungen sind richtig, welche sind falsch? Wenn Sie eine Aussage für richtig halten, argumentieren Sie dies mit einer **kurzen aber schlüssigen** Erklärung. Falsche Aussagen widerlegen Sie durch ein Gegenbeispiel.
   Achtung: Ohne richtige Erklärung, z.B. für Raten, gibt es keine Punkte!
   Sei $f(x)$ eine auf ganz $\mathbb{R}$ stetige Funktion.
   (a) Wenn $f(x)$ differenzierbar ist, so existiert $\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h^2)-f(1)}{h^2}$ und ist gleich $f'(1)$.
   (b) Existiert $\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h^2)-f(1)}{h^2}$, so existiert $f'(1)$.
   (c) Wenn $f(x)$ differenzierbar ist, so existiert $\lim_{h\to 1} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ und ist gleich $f'(1)$.
   (d) Wenn $f(x)$ differenzierbar ist, so existiert $\lim_{h\to 0} \frac{f(1-h)-f(1)}{h}$ und ist gleich $f'(1)$.

   4 Punkte (1+1+1+1)

4. (a) Bestimmen Sie $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(x))}{x^2}$, indem Sie die Regel von de l'Hospital anwenden. Begründen Sie, warum Sie die Regel von de l'Hospital anwenden dürfen.
   (b) Führen Sie $\lim_{x\to 0}(\cos(x))^{1/x^2}$ durch Umformung auf den Grenzwert aus (a) zurück. Was ist laut (a) also $\lim_{x\to 0}(\cos(x))^{1/x^2}$?
   (c) Es sei $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)(x-1)^n$.
   i. Berechnen Sie den Konvergenzbereich von $f(x)$.
   ii. Berechnen Sie die Tangente an $f(x)$ im Punkt $x = 1$.

   4,5 Punkte (1,5+0,5+2,5(1,5+1)

5. (a) Berechnen Sie das Integral $\int \frac{1}{x^2(x-1)}\, dx$ mittels Partialbruchzerlegung.
   (b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung (d.h. führen Sie Trennung der Variablen und Variation der Konstanten aus) der Differentialgleichung

   $$xy'(x) = y(x) + \frac{1}{x-1}.$$

   Anmerkung zur Kontrolle: Im Zuge der Variation der Konstanten sollten Sie Ihr Ergebnis aus (a) verwenden können.

   4 Punkte(2+2)

Viel Erfolg!