Prüfung Mathematik – 9.3.2012

Name/ Matrikelnummer:..

Lösen Sie die Beispiele der Angabe entsprechend, begründen Sie Ihre Antworten, aber fassen Sie sich kurz!

1. (a) Sei z eine beliebige (allgemeine!) komplexe Zahl. Erklären Sie die Gültigkeit der Gleichungen $|z| = |\bar{z}| = |-z|$
      i. durch eine aussagekräftige Skizze UND
      ii. durch Nachrechnen.

   (b) Skizzieren Sie die Menge der komplexen Zahlen z, deren Quadrat z^2 im ersten Quadranten der Gauß'schen Zahlenebene liegt (d.h. z^2 soll sowohl positiven Real– als auch Imaginärteil haben).
   Anleitung: Befolgen Sie folgende Schritte:
      i. Geben Sie Ungleichungen für r und ϕ an, sodass eine komplexe Zahl $w = re^{i\phi}$ im ersten Quadraten liegt.
      ii. Berechnen Sie alle zweiten Wurzeln aus komplexen Zahlen $w = re^{i\phi}$, welche den Ungleichungen für r und ϕ aus (i) genügen und skizzieren Sie diese in der Zahlenebene.

   4 Punkte (1,5+2,5)

2. (a) Welche der folgenden reellen Folgen konvergiert? Begründen Sie Ihre Antwort und geben Sie, so existent, den jeweiligen Grenzwert an:

$$(a_n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{(1/n)}, \qquad (b_n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{(2n)}, \qquad (c_n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{(n^2)}.$$

   (b) Geben Sie eine konkrete Folge (a_n) an, sodass der Konvergenzbereich der Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a_n} x^n$ ganz $\mathbb{R}$ ist und begründen Sie Ihre Wahl rechnerisch (d.h. mit einer geeigneten Formel bzw. einem geeignetem Kriterium).

   4 Punkte (2+2)

3. Welche der folgenden Aussagen/ Gleichungen sind richtig, welche sind falsch? Wenn Sie eine Aussage für richtig halten, argumentieren Sie dies mit einer **kurzen aber schlüssigen** Erklärung. Falsche Aussagen widerlegen Sie durch ein Gegenbeispiel.
   Achtung: Ohne richtige Erklärung, z.B. für Raten, gibt es keine Punkte!

   Sei $f(x)$ eine auf $\mathbb{R}$ ohne $\{0\}$ definierte stetige reelle Funktion so gilt (nicht):

   (a) Falls $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ nicht existiert, so existiert auch nicht $\lim_{x\to 0^+} f(x)$.
   (b) Gilt $|f(x)| \leq x$ für alle $x \in \mathbb{R}$, so existiert $\lim_{x\to 0} f(x)$.
   (c) Ist $f(x)$ eine gerade Funktion, für welche $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ existiert, so existiert $\lim_{x\to 0} f(x)$.
   (d) Ist $f(x)$ eine ungerade Funktion, für welche $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ existiert, so existiert $\lim_{x\to 0} f(x)$.

   4 Punkte (1+1+1+1)

4. Gegeben ist die Funktion $f(x) = 2x^2 - |x|$ mit dem Definitionsbereich $(-2, 5]$.

   (a) Überprüfen Sie anhand der Definition der Differenzierbarkeit, ob $f(x)$ an $x = 0$ differenzierbar ist.
   (b) Geben Sie das Monotonieverhalten von $f(x)$ auf D an und bestimmen Sie alle lokalen Extrema von $f(x)$.
   (c) Geben Sie ein möglichst großes Intervall in D an, auf welchem $f(x)$ umkehrbar ist und zeigen Sie, dass auf diesem Intervall $f^{-1}(x) = \frac{1}{4}(1 + \sqrt{1+8x})$.
   Anleitung: Rechnen Sie die definierende Eigenschaft der Umkehrfunktion nach.

   5 Punkte (1,5+2+1,5)

5. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle $n = 0, 1, 2, \ldots$ die Gleichung

$$\int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n!$$

   gilt.
   Anleitung: Partielle Integration.
   3 Punkte

Viel Erfolg!