Prüfung aus Mathematik 1 für BI und UI

am 6. März 2020

ZUNAME: ....

Vorname: ....

Mat.Nr.: ....

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Arbeitszeit: 90 Minuten!

1. Die geometrische Reihe hat bekanntlich für $|x| < 1$ die Summenfunktion

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n. \tag{1}$$

   (a) Bestimmen Sie den *genauen* Konvergenzbereich der Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^n.$$

   (b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Ableitung der beiden Seiten der Gleichung (1) die Summenfunktion der Potenzreihe aus (a).

   (c) Bestimmen Sie durch Integration der beiden Seiten der Gleichung (1) die Potenzreihe der Funktion $\ln(1-x)$ mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

2. Diskutieren Sie für die Funktion

$$h(x) = \sqrt{\ln(1+x^2)}$$

   – Definitionsbereich und Verhalten für $x \to \pm\infty$
   – Stetigkeit und Differenzierbarkeit, insbesondere bei $x_0 = 0$
   – Monotonieverhalten und Extrema

   Verwenden Sie die gesammelten Informationen, um eine Skizze von h anzufertigen.

3. Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist definiert über die Exponentialreihe

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

   (a) Geben Sie die Definition des Cauchyprodukts zweier absolut konvergenter Reihen an und zeigen Sie mit dessen Hilfe, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$

$$\exp(x)\exp(y) = \exp(x+y).$$

   (b) Verwenden Sie die Ableitung der Exponentialreihe zum Nachweis von $\exp' = \exp$.

   (c) Es sei nun $y(x)$ eine beliebige Lösung der Differentialgleichung $y'(x) = y(x)$. Was ergibt sich dann für

$$\left(\frac{y(x)}{\exp(x)}\right)'?$$

4. (a) Formulieren Sie den Satz über die Differentiation der Umkehrfunktion und berechnen Sie mit dessen Hilfe die Ableitung von $\arcsin : (-1,1) \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

   (b) Bestimmen Sie durch Berechnung eines geeigneten Integrals die Länge der Kurve im $\mathbb{R}^2$, welche durch den Funktionsgraphen von

$$f(x) = \sqrt{9-x^2}, \qquad x \in [0,3],$$

   bestimmt wird.