Prüfung aus Mathematik 1

am 11. Oktober 2013

ZUNAME: ....

Vorname: ....

Mat.Nr.: ....

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Arbeitszeit: 90 Minuten!

1. (a) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Geben Sie die Definitionen der *Stetigkeit* und der *Ableitung* von f an einer Stelle $a \in \mathbb{R}$ an.

   (b) Zeigen Sie, dass die Funktion
$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$
   stetig und differenzierbar an der Stelle $a = 0$ ist.

   (c) Geben Sie eine Funktion $g(x)$ an, die bei $x_0 = 0$ stetig, aber nicht differenzierbar ist.

2. Bestimmen Sie den genauen Konvergenzbereich der Reihe
$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^n.$$
   Zeigen Sie durch Differentiation der Summenformel für die geometrische Reihe, dass im Konvergenzbereich gilt
$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

3. (a) Formulieren Sie (ausführlich) das Integralkriterium von Cauchy über die Konvergenz von Reihen.

   (b) Untersuchen Sie die folgenden Reihen mit Hilfe des Cauchyschen Integralkriteriums auf Konvergenz:
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}, \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n (\ln n)^2}, \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}.$$

4. Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems
$$y'(x) = x^2 (3y(x) + 1), \qquad y(0) = 0.$$