Prüfung Mathematik – 12.10.2012

Name/ Matrikelnummer:...

Lösen Sie die Beispiele der Angabe entsprechend, begründen Sie Ihre Antworten, aber fassen Sie sich kurz!

1. (a) Bestimmen Sie alle komplexen Nullstellen des Polynoms $p(x) = x^4 + 16$, indem Sie die Polardarstellung verwenden. Geben Sie die Nullstellen anschließend wieder in Standardnotation $a + bi$ an.

   (b) Zerlegen Sie das Polynom $p(x)$ in seine (komplexen) Linearfaktoren, d.h. stellen Sie $p(x)$ als Produkt linearer komplexer Polynome dar.

   (c) Wie viele komplexe Nullstellen hat ein Polynom 8-ten Grades? Wie lauten alle Nullstellen von $q(x) = p(x)^2$?

   4 Punkte (2+1+1)

2. Sei (a_n) eine reelle Folge, und (a_{2n}) bzw. (a_{2n+1}) die Teilfolgen von (a_n), welche nur aus Folgengliedern mit geradem bzw. ungeradem Index bestehen.
   Welche der folgenden Aussagen/ Gleichungen sind richtig, welche sind falsch? Wenn Sie eine Aussage für richtig halten, argumentieren Sie dies mit einer **kurzen aber schlüssigen** Erklärung. Falsche Aussagen widerlegen Sie durch ein Gegenbeispiel.
   Achtung: Ohne richtige Erklärung, z.B. für Raten, gibt es keine Punkte!

   (a) Falls (a_{2n}) konvergiert, so konvergiert auch (a_n).

   (b) Falls (a_{2n}) divergiert, so divergiert auch (a_n).

   (c) Falls (a_{2n}) und (a_{2n+1}) beide konvergieren, so konvergiert auch (a_n).

   (d) Falls (a_{2n}) und (a_{2n+1}) beide konvergieren, so konvergiert auch $(a_{2n}) + (a_{2n+1})$

   4 Punkte (1+1+1+1)

3. Sei $f(x)$ eine allgemeine beliebig oft differenzierbare Funktion und $g(x)$ eine Funktion mit $g'(x) = c$, c reell konstant.

   (a) Geben Sie $g(x)$ (soweit möglich, d.h. allgemein) an. Wie sieht der Funktionsgraph von $g(x)$ aus? Wann gibt es zu $g(x)$ eine Umkehrfunktion?

   (b) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion und der passenden Differentiationsregel, dass für obige Funktionen $f(x)$ und $g(x)$
   $$(f(x)g(x))^{(n)} = f^{(n)}(x)g(x) + nf^{(n-1)}(x)g'(x)$$
   gilt, wobei $f^{(n)}(x)$ für die n–te Ableitung von $f(x)$ steht.

   4 Punkte (1,5+2,5)

4. (a) Bestimmen Sie mit der Regel von de l'Hospital $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}$.

   (b) Verwenden Sie Ihr Ergebnis aus (a), um die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)}$ mit dem Quotientenkriterium zu untersuchen.

   (c) Überprüfen Sie mit dem Cauchy'schen Integralkriterium, ob die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)}$ konvergiert bzw. divergiert.
   Anmerkung: Die Substitution $u = \ln(x)$ kann helfen.

   4,5 Punkte (1+1,5+2)

5. Bestätigen Sie die offensichtlich gültige Gleichung $\frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-x^2}$, indem Sie

   (a) unter Verwendung der Summenformel der geometrischen Reihe die Potenzreihendarstellungen (mit Entwicklungsstelle 0) der drei rationalen Funktionen $\frac{1}{1-x}$, $\frac{1}{1+x}$ und $\frac{1}{1-x^2}$ angeben.

   (b) Das Cauchyprodukt der Potenzreihendarstellungen von $\frac{1}{1-x}$ und $\frac{1}{1+x}$ berechnen und dessen Übereinstimmung mit der Potenzreihendarstellung von $\frac{1}{1-x^2}$ begründen.

   3,5 Punkte (1,5+2)

Viel Erfolg!