Prüfung aus Mathematik 1 für Bauingenieure

am 15. Jänner 2016

ZUNAME: ....

Vorname: ....

Mat.Nr.: ....

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Arbeitszeit: 90 Minuten!

1. (a) Geben Sie die Definitionen der *Konvergenz einer unendlichen Folge* und *einer unendlichen Reihe* an.

   (b) Es sei a_n eine allgemeine reelle Zahlenfolge und b_n die Folge definiert durch
   $$b_n = a_{n+1} - a_n.$$
   Verwenden Sie die von Ihnen in 1 (a) gegebenen Definitionen zum Beweis der folgenden beiden Aussagen:

   (i) Ist a_n konvergent, so konvergiert auch b_n (gegen welchen Grenzwert?).

   (ii) Ist a_n konvergent, so konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

2. (a) Formulieren Sie den (kleinen) Mittelwertsatz der Integralrechnung.

   (b) Geben Sie die Definition des Differentialquotienten (also der Ableitung) einer allgemeinen Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an einer Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ an.

   (c) Es sei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und $a \in \mathbb{R}$ beliebig. Bestimmen Sie mit Hilfe von Beispiel 2 (a) und (b) die Ableitung der Funktion
   $$H(x) = \int_a^x h(t)\, dt.$$

3. (a) Bestimmen Sie den genauen Konvergenzbereich der Potenzreihe
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

   (b) Geben Sie eine Formel für die n-te Ableitung der Funktion $g(x) = -\ln(1 - x)$ an der Stelle $x_0 = 0$ an und beweisen Sie diese mittels vollständiger Induktion.

   (c) Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Potenzreihe aus Beispiel 2 (a) und der Funktion g aus Beispiel 2 (b)?

4. Diskutieren Sie für die auf $[-1, 1]$ definierte Funktion
   $$f(x) = |x|x$$
   die folgenden Punkte:

   – Stetigkeits- und Differenzierbarkeitsbereich

   – Monotonieverhalten und Extrema (inkl. Randextrema)

   Verwenden Sie die gesammelten Informationen, um eine Skizze von f anzufertigen.