Prüfung aus Mathematik 1 für Bauingenieure

am 17. Juni 2016

ZUNAME: ....

Vorname: ....

Mat.Nr.: ....

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Arbeitszeit: 90 Minuten!

1. (a) Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Entscheiden Sie, ob f an der Stelle $x_0 = 0$ differenzierbar ist und gegebenenfalls ob f' bei $x_0 = 0$ stetig ist.

(b) Formulieren Sie (ausführlich) die Regel von de l'Hospital.
Bestimmen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{\sin(x)}$$

und begründen Sie warum sich hier die Regel von de l'Hospital NICHT anwenden lässt.

2. (a) Gegeben sei eine allgemeine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit positivem Konvergenzradius r und sodass

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

existiert. Zeigen Sie, dass die durch gliedweise Differentiation bzw. Integration hervorgehenden Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \qquad \text{bzw.} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

ebenfalls Konvergenzradius r haben.

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe der geometrischen Reihe die Potenzreihen mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ von

$$\frac{1}{(1-x)^2} \qquad \text{und} \qquad \frac{1}{(1-x)^{17}}.$$

3. (a) Formulieren Sie das Integralkriterium von Cauchy für unendliche Reihen.

(b) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n} \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n [\ln n]^2}.$$

4. (a) Formulieren Sie die Leibnizsche Sektorformel allgemein und verwenden Sie diese zur Berechnung des Flächeninhalts der Ellipse

$$E = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} \leq 1 \right\}.$$

(b) Berechnen Sie die Länge der folgenden Kurve:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix}, \qquad t \in [0, 2\pi].$$