Prüfung aus Mathematik 1

am 18. Jänner 2013

ZUNAME: ....

Vorname: ....

Mat.Nr.: ....

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Arbeitszeit: 90 Minuten!

1. (a) Es sei (a_n) eine Folge positiver Zahlen, deren Folgenglieder die Ungleichung $a_n \leq \frac{1}{7}a_{n-1}$ für alle $n \geq 1$ erfüllen. Zeigen Sie durch *vollständige Induktion*, dass dann für jedes $n \geq 1$:

$$a_n \leq 7^{-n}a_0. \tag{1}$$

   (b) Geben Sie die Definition von *Konvergenz* einer reellen Folge (a_n) an. Verwenden Sie Ungleichung (1) und die von Ihnen gegebene Definition, um zu zeigen, dass die Folge aus (a) konvergiert. Was ist der Grenzwert der Folge aus (a)?

   (c) Geben Sie das *Leibniz'sche Kriterium* für Reihenkonvergenz an und untersuchen Sie

$$\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^{i+1}a_i,$$

   wobei $(a_n) = (0, 1, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{5}, 0, \frac{1}{7}, 0, \ldots)$, auf Konvergenz. Dürfen Sie dazu das Leibniz'sche Kriterium verwenden?

2. (a) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Geben Sie die Definition der *Ableitung* von f an einer Stelle $a \in \mathbb{R}$ an und erklären Sie mit Hilfe einer aussagekräftigen Skizze ihre Bedeutung.

   (b) Überprüfen Sie folgende Funktionen auf *Differenzierbarkeit*:

$$f(x) = \begin{cases} -x^3 & \text{für } x < 0, \\ x^2(x-1) & \text{für } x \geq 0 \end{cases} \qquad \text{und} \qquad g(x) = e^{-|x|}.$$

   (c) Bestimmen Sie die *Extremstellen* und Extremwerte der Funktion f aus (b) auf $[-1, 1]$.

3. (a) Formulieren Sie (ausführlich) den *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.*

   (b) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Bestimmen Sie die Ableitungen der Funktionen:

$$F_1(x) := \int_{17}^{x} f(t)\,dt, \qquad F_2(x) := \int_{x}^{42} f(t)\,dt, \qquad F_3(x) := \int_{17}^{42} f(2t)\,dt.$$

   Welche dieser Funktionen sind Stammfunktionen von f?

4. (a) Es seien $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbare Funktionen. Zeigen Sie durch direktes Nachrechnen, dass die Funktion

$$u(x,t) = \frac{g(x-3t) + g(x+3t)}{2} + \frac{1}{6}\int_{x-3t}^{x+3t} h(s)\,ds$$

   die Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

   und die Anfangsbedingungen $u(x,0) = g(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = h(x)$ erfüllt.

   (b) Bestimmen Sie die Funktion u aus (a) explizit für $g(x) = x^2$ und $h(x) = 2x$.