Prüfung aus Mathematik 1 für BI

am 2. März 2018

ZUNAME: ....

Vorname: ....

Mat.Nr.: ....

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Arbeitszeit: 90 Minuten!

1. (a) Bestimmen Sie die Grenzwerte der Folgen
$$b_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \qquad \text{und} \qquad c_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}.$$
   (b) Weisen Sie die Konvergenz der Folge
$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$$
   nach, indem Sie (mit den Folgen aus (a)) zunächst
$$b_n \leq a_n \leq c_n$$
   begründen und diese Relation dann verwenden, um den Grenzwert von a_n zu bestimmen.

2. (a) Zerlegen Sie folgende rationale Funktion in Partialbrüche:
$$f(x) = \frac{2x+5}{x^2+2x+1}.$$
   (b) Bestimmen Sie die Taylorreihe der Funktion f aus (a) um $x = 0$.
   Hinweis: Verwenden Sie (a) und die Summenformel der geometrischen Reihe.

3. Gegeben sei die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch
$$g(x) = \begin{cases} x^{1/x} & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x \leq 0. \end{cases}$$
   (a) Formulieren Sie die Regel von de L'Hospital.
   (b) Untersuchen Sie die Funktion g auf Stetigkeit an der Stelle $x = 0$ und berechnen Sie $\lim_{x\to\infty} g(x)$.
   (c) Bestimmen Sie die Extrema von g für $x > 0$.

4. (a) Formulieren Sie die Leibniz'sche Sektorformel und bestimmen Sie mit ihrer Hilfe den Flächeninhalt des Bereiches
$$E = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 9 \right\}.$$
   (b) Berechnen Sie die Länge der Kurve im $\mathbb{R}^2$, welche durch den Funktionsgraphen von
$$g(x) = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}, \qquad x \in [0,1],$$
   bestimmt wird.