Prüfung Mathematik – 20.1.2012

Name/ Matrikelnummer:...

Lösen Sie die Beispiele der Angabe entsprechend, begründen Sie Ihre Antworten, aber fassen Sie sich kurz!

1. (a) Gegeben ist die komplexe Zahl $w = \frac{3-i}{2+i}i$.
   i. Bringen Sie w auf die Gestalt $a + bi$ und skizzieren Sie w in der Gauß'schen Zahlenebene.
   ii. Bringen Sie w auf die Gestalt $re^{i\phi}$.
   iii. Skizzieren Sie die Menge aller komplexen Zahlen z mit $|z| \leq |w|$ in der Gauß'schen Zahlenebene.

   (b) Begründen Sie mit der Zerlegung von Polynomen nach dem Fundamentalsatz der Algebra folgende Aussage über zwei reelle Polynome $p(x)$ und $q(x)$:
   Wenn $a \in \mathbb{R}$ eine Nullstelle von $p(x)$ mit Vielfachheit n und eine Nullstelle von $q(x)$ mit Vielfachheit m ist, so ist a eine Nullstelle vom Polynom $r(x) = p(x) \cdot q(x)$ von Vielfachheit $m + n$.

   3,5 Punkte (2(1+0,5+0,5)+1,5)

2. (a) Überprüfen Sie anhand der Definition von Stetigkeit bzw. Differenzierbarkeit, für welche nichtnegativen ganzen Zahlen $k = 0, 1, 2, 3\ldots$ die Funktion
$$f(x) = \begin{cases} x^k \cos(\frac{1}{x}) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \end{cases}$$
   stetig bzw. differenzierbar ist.

   (b) Seien $g(x) = \mathrm{sgn(x)}$ und $h(x) = |x| - 1$. Skizzieren Sie $g \circ h(x)$.

   4 Punkte (2,5(1+1,5)+1,5)

3. Welche der folgenden Aussagen/ Gleichungen sind richtig, welche sind falsch? Wenn Sie eine Aussage für richtig halten, argumentieren Sie dies mit einer **kurzen aber schlüssigen** Erklärung. Falsche Aussagen widerlegen Sie durch ein Gegenbeispiel.
   Achtung: Ohne richtige Erklärung, z.B. für Raten, gibt es keine Punkte!

   (a) Gilt für $N = 100$, dass alle Folgenglieder einer reellen Folge (a_n) ab dem Index N im Intervall $[-\frac{1}{100}, \frac{1}{100}]$ liegen, so ist (a_n) konvergent.

   (b) Gilt für jede natürliche Zahl N, dass alle Folgenglieder einer reellen Folge (a_n) ab dem Index N im Intervall $[-\frac{1}{N}, \frac{1}{N}]$ liegen, so ist (a_n) konvergent.

   (c) Wenn $1 - \frac{1}{n}$ die n–te Partialsumme einer unendlichen Reihe ist, so konvergiert diese Reihe.

   (d) Wenn $1 - \frac{1}{n}$ der n–te Summand einer unendlichen Reihe ist, so konvergiert diese Reihe.

   4 Punkte (1+1+1+1)

4. Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

   (a) Bestätigen Sie mit vollständiger Induktion die Gültigkeit der Gleichung $f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{(n+1)!}{x^{n+2}}$ für $n = 0, 1, 2, \ldots$, wobei $f^{(n)}(x)$ für die n–te Ableitung von $f(x)$ steht.

   (b) Berechnen Sie die Taylorreihe für $f(x)$ mit Entwicklungspunkt 1.
   Hinweis zur Berechnung: Die Gleichung aus (a) kann verwendet werden, egal ob Sie (a) lösen konnten oder nicht.

   (c) Berechnen Sie den Konvergenzbereich der Taylorreihe aus (b).

   4 Punkte (2+1+1)

5. (a) Berechnen Sie alle Stammfunktionen von $\frac{u+1}{2u(u-1)}$ mittels Partialbruchzerlegung.

   (b) Berechnen Sie die Länge der Kurve, welche durch den Graph der Funktion $\ln(\frac{e^x+1}{e^x-1})$ über dem Intervall $[a, b]$ beschrieben wird.
   Eine Möglichkeit der Berechnung: Wenden Sie richtig die Kurvenlängenformel an, formen Sie das auftretende Integral mittels binomischer Formeln und durch Substitution $u = e^{2x}$ auf das Integral aus (a) um und verwenden Sie Ihr Ergebnis aus (a).

   4,5 Punkte (2+2,5)

Viel Erfolg!