Prüfung aus Mathematik 1 für BI

am 22. Jänner 2018

ZUNAME: ....

Vorname: ....

Mat.Nr.: ....

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Arbeitszeit: 90 Minuten!

1. (a) Geben Sie die Definitionen der Konvergenz einer reellen Zahlenfolge sowie einer reellen unendlichen Reihe an.

   (b) Widerlegen Sie die folgenden *falschen* Aussagen durch Gegenbeispiele (argumentieren Sie in jedem Fall, dass es sich tatsächlich um ein Gegenbeispiel handelt):

   (i) Jede (nach oben und unten) beschränkte Folge ist konvergent.

   (ii) Ist die Folge a_n konvergent, dann konvergiert auch die Reihe $\sum a_n$.

   (iii) Ist a_n eine Nullfolge, dann konvergiert die alternierende Reihe $\sum(-1)^n a_n$.

   (c) Entscheiden Sie welche der folgenden Aussagen auf die Folge $b_n = (1+n)^{1/n}$ zutreffen (ankreuzen genügt):

   ☐ beschränkt ☐ konvergent ☐ divergent ☐ bestimmt divergent

2. Gegeben seien die folgenden Vektoren im $\mathbb{R}^2$:

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

   (a) Skizzieren Sie $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ und die Vektorsumme $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ in einem Koordinatensystem so, dass die geometrische Interpretation der Vektorsumme deutlich wird.

   (b) Berechnen Sie das Skalarprodukt $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}$ und beschreiben Sie seine geometrische Interpretation mit einer Skizze.

   (c) Skizzieren Sie die Menge aller Vektoren $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2$, für die $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{x}$ gilt.

   (d) Wir fassen nun $\mathbb{R}^2$ als Teilmenge von $\mathbb{R}^3$ auf, sodass $\boldsymbol{u}$ und $\boldsymbol{v}$ eine dritte Komponente mit Wert 0 erhalten. Berechnen Sie dann das Vektorprodukt $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$.

3. Diskutieren Sie für die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

   die folgenden Punkte:

   – Definitionsbereich und asymptotisches Verhalten für $x \to \pm\infty$
   – Polstellen und die Mengen, wo f positive bzw. negative Werte annimmt
   – Monotonieverhalten und Extrema

   Verwenden Sie die gesammelten Informationen, um eine Skizze von f anzufertigen.

4. (a) Es sei $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ eine Funktion. Geben Sie die Definition der Ableitung von g an einer Stelle $a\in\mathbb{R}$ an und erklären Sie mit Hilfe einer aussagekräftigen Skizze ihre Bedeutung.

   (b) Erklären Sie den Begriff der Stammfunktion einer reellen Funktion und formulieren Sie den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

   (c) Es sei $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ stetig. Beweisen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Integralrechnung, dass

$$G(x) := \int_{17}^{x} g(t)\,dt$$

   eine Stammfunktion von g ist.