Prüfung aus Mathematik 1

am 25. Juni 2013

ZUNAME: ....

Vorname: ....

Mat.Nr.: ....

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Arbeitszeit: 90 Minuten!

1. (a) Beweisen Sie mittels *vollständiger Induktion*:
   Für jede natürliche Zahl $n \geq 4$ gilt:
   $$3^n \leq 4n!$$
   (b) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:
   $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4n!}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+17}{n^3+42}.$$
   Formulieren Sie allfällig verwendete Konvergenz/Divergenz-Kriterien ausführlich!

2. (a) Skizzieren Sie in der Gaußschen Zahlenebene die Menge
   $$M = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 4, \arg z \in (\tfrac{\pi}{4}, \tfrac{\pi}{2})\}.$$
   Geben Sie für ein konkretes $z_0 \in M$ Ihrer Wahl den Real- und Imaginärteil von z_0 sowie die zu z_0 konjugiert komplexe Zahl an.
   (b) Formulieren Sie den Fundamentalsatz der Algebra (ausführlich)!

3. (a) Berechnen Sie
   $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$$
   einerseits mit Hilfe der Regel von de L'Hospital (formulieren Sie diese allgemein und ausführlich!) und andererseits indem Sie die Potenzreihe von $\sin(x)$ verwenden.
   (b) Es sei nun $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ eine (allgemeine) Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius und $a_0 \neq 0$. Berechnen Sie für die Summenfunktion $s(x)$ dieser Potenzreihe den Grenzwert
   $$\lim_{x \to a} \frac{s(x) - a_0 - a_1(x-a)}{s(x)}.$$
   (c) Bestimmen Sie (mittels Differentialrechnung) das Taylorpolynom zweiten Grades der Funktion $f(x) = \cos(2x^2)$ mit Entwicklungspunkt $a = 0$. Geben Sie auch die Gleichung der Tangente der Funktion $f(x)$ in $a = 0$ an!

4. (a) Es sei f eine allgemeine stetige Funktion:
   Geben Sie eine Stammfunktion F von f an und zeigen Sie, dass tatsächlich $F' = f$ gilt.
   (b) Berechnen Sie durch Anwendung geeigneter Integrationsregeln
   $$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x}}\, dx.$$