Prüfung Mathematik – 26.6.2012

Name/ Matrikelnummer:...

Lösen Sie die Beispiele der Angabe entsprechend, begründen Sie Ihre Antworten, aber fassen Sie sich kurz!

1. (a) Bestimmen Sie den Real– und den Imaginärteil von $z = -\frac{3}{2}i + \frac{2+i}{(1-i)^2}$.
   (b) Sei n eine feste natürliche Zahl und $z_l = e^{(i\frac{2\pi l}{n})}$ eine komplexe Zahl in Exponentialdarstellung.
      i. Geben Sie zwei verschiedene Zahlen l und k an, sodass $z_l = z_k$ gilt.
      ii. Begründen Sie rechnerisch, dass $z_l = e^{(i\frac{2\pi l}{n})}$ für jede natürliche Zahl l eine n–te komplexe Wurzel der Zahl 1 ist.
      iii. Zeigen Sie unter Verwendung der Summenformel der endlichen geometrischen Reihe, dass für obige Zahlen z_l, d.h. für alle n–ten Einheitswurzeln der Zahl 1, $\sum_{k=0}^{n-1} z_l^k = 0$ gilt.

   5 Punkte (1,5+3,5(1+1+1,5))

2. Angenommen Sie hätten unendlich viele kleiner werdende Würfel mit Seitenlängen $2/(n+1)$, $n = 1, 2, \ldots$, und Sie würden einen Turm bauen, indem Sie beginnend mit dem größten Würfel auf jeden Würfel jeweils mittig den nächstkleineren Würfel plazieren.
   (a) Weisen Sie nach, dass Ihr Turm unendlich hoch wird, indem Sie die Divergenz der unendlichen Reihe $\sum a_n$, welche die Höhe berechnet, mit dem Cauchy'schen Integralkriterium nachweisen.
   (b) Weisen Sie nach, dass der Turm andererseits endliche Oberfläche hat, indem Sie für die Reihe $\sum b_n$, welche die Oberfläche berechnet (Achtung: die Würfel stehen aufeinander, d.h. die Oberfläche ist nicht die Summe der einzelnen Würfeloberflächen) eine konvergente Majorante der Gestalt $c \sum \frac{1}{n^2}$, $c > 0$ passend, angeben. Bestätigen Sie rechnerisch, dass mit Ihrer Wahl für c die Reihe $c \sum \frac{1}{n^2}$ tatsächlich eine Majorante für $\sum b_n$ ist. (Dass die Reihe $c \sum \frac{1}{n^2}$ konvergiert, muss hier nicht gezeigt werden.)

   4 Punkte (2+2)

3. Welche der folgenden Aussagen/ Gleichungen sind richtig, welche sind falsch? Wenn Sie eine Aussage für richtig halten, argumentieren Sie dies mit einer **kurzen aber schlüssigen** Erklärung. Falsche Aussagen widerlegen Sie durch ein Gegenbeispiel.
   Achtung: Ohne richtige Erklärung, z.B. für Raten, gibt es keine Punkte!
   (a) Wenn $f(x)$ und $g(x)$ auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen sind, und $g(x)$ an der Stelle $a = 17$ eine waagrechte Tangente hat, so hat auch $(f \cdot g)(x)$ an $a = 17$ eine waagrechte Tangente.
   (b) Wenn $f(x)$ und $g(x)$ auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen sind, und $g(x)$ an der Stelle $a = 17$ eine waagrechte Tangente hat, so hat auch $(f \circ g)(x)$ an $a = 17$ eine waagrechte Tangente.
   (c) Wenn $f(x)$ auf ganz $\mathbb{R}$ zwei mal differenzierbar und konvex ist, so hat $f(x)$ zumindest ein lokales Minimum.
   (d) Wenn $f(x)$ auf $[a, b]$ zwei mal differenzierbar und konvex ist, so hat $f(x)$ zumindest ein lokales Minimum.

   4 Punkte (1+1+1+1)

4. Sei $f(x) = \frac{17}{17-7x}$.
   (a) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass
   $$f^{(n)}(x) = \frac{17(n!)(7^n)}{(17-7x)^{n+1}}, \tag{1}$$
   wobei $f^{(n)}(x)$ für die n–te Ableitung von $f(x)$ steht.
   (b) Geben Sie unter Verwendung von Gleichung (1) die Taylorreihe von $f(x)$ mit Anschlussstelle $a = 10/7$ an.
   (c) Bestätigen Sie Ihr Ergebnis aus (b), indem Sie die Taylorreihe von $f(x)$ durch geeignete Umformungen aus der Summenformel der geometrischen Reihe herleiten.

   5 Punkte (2+1+2)

5. (a) Berechnen Sie alle Stammfunktionen von $\cos(x)\cosh(x)$ mittels partieller Integration.
   (b) Machen Sie die Probe zu Ihrem Ergebnis aus (a).

   2 Punkte (1,5+0,5)

Viel Erfolg!