Prüfung aus Mathematik 1 für BI und UI

am 27. Jänner 2020

ZUNAME: ....

Vorname: ....

Mat.Nr.: ....

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Arbeitszeit: 90 Minuten!

1. Gegeben sei für $\alpha \in \mathbb{R}$ die Reihe

$$R(\alpha) := \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^{\alpha}.$$

   (a) Formulieren Sie das Integralkriterium von Cauchy und verwenden Sie es, um den genauen Bereich für α anzugeben, in dem $R(\alpha)$ *absolut* konvergent ist.

   (b) Formulieren Sie das Kriterium von Leibniz und verwenden Sie es, um den genauen Bereich für α anzugeben, in dem $R(\alpha)$ *bedingt* konvergent aber nicht absolut konvergent ist.

   (c) Formulieren und verwenden Sie ein geeignetes Kriterium, um den genauen Bereich für α anzugeben, in dem $R(\alpha)$ weder bedingt konvergent noch absolut konvergent ist.

2. Diskutieren Sie für die auf $[-2, 5]$ definierte Funktion $f(x) = 2x^2 - |x|$ folgende Punkte:

   – Differenzierbarkeit an $x_0 = 0$

   – Monotonieverhalten und Extrema (inkl. Randextrema)

   Verwenden Sie die gesammelten Informationen, um eine Skizze von f anzufertigen.

3. (a) Geben Sie für $n \in \mathbb{N}$ und $p \in \mathbb{R}$ die Definition des verallgemeinerten Binomialkoeffizienten $\binom{p}{n}$ an und zeigen Sie, dass

$$\binom{p}{n} + \binom{p}{n+1} = \binom{p+1}{n+1}. \tag{1}$$

   (b) Verwenden Sie nun Formel (1) aus (a), um zu zeigen, dass für $x \in (-1, 1)$ die Reihe $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{p}{n} x^n$ die folgende Differentialgleichung erfüllt:

$$(1 + x)s'(x) = ps(x).$$

   (c) Offenbar erfüllt auch $y(x) = (1 + x)^p$ die Differentialgleichung $(1 + x)y'(x) = py(x)$. Verwenden Sie dies zur Berechnung von

$$\left(\frac{s(x)}{y(x)}\right)'$$

   und argumentieren Sie schließlich mit Hilfe von $s(0) = y(0) = 1$, dass $s(x) = y(x)$ gilt.

4. (a) Es sei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und $a \in \mathbb{R}$ beliebig. Bestimmen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Integralrechnung und der Definition des Differentialquotienten die Ableitung von

$$H(x) = \int_a^x h(t)\, dt.$$

   (b) Berechnen Sie für $x \in \mathbb{R}$ den Wert des bestimmten Integrals

$$F(x) = \int_0^x \operatorname{sgn} t\, dt$$

   und skizzieren Sie $F(x)$. Diskutieren Sie, ob $F(x)$ eine Stammfunktion von $\operatorname{sgn} x$ ist.