

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!

Arbeitszeit: 90 Minuten!

1. (a) Formulieren Sie den Fundamentalsatz der Algebra!

- (b) Gegeben sei das Polynom

$$p(x) = (x^2 - 4)(x^4 + 1).$$

Bestimmen Sie alle komplexen Nullstellen von  $p$  und stellen Sie diese sowohl graphisch als auch in der Standardform  $a + ib$  dar.

2. (a) Formulieren Sie die Regel von de L'Hospital!

- (b) Bestimmen Sie

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} x^x.$$

Begründen Sie, ob dabei jeweils die Regel von de L'Hospital anwendbar ist.

3. Gegeben sei

$$f(x) = xe^x.$$

- (a) Bestimmen Sie (mit Hilfe der Exponentialreihe) die Taylorreihe von  $f$  um  $x = 0$  und geben Sie ihren Konvergenzbereich an.

- (b) Bestimmen Sie unter Verwendung von (a) die 17. Ableitung der Funktion  $f$  an  $x = 0$ , also

$$f^{(17)}(0).$$

- (c) Berechnen Sie

$$\int_0^{\infty} f(x) dx.$$

4. (a) Formulieren Sie die Leibniz'sche Sektorformel und bestimmen Sie mit ihrer Hilfe den Flächeninhalt des Bereiches

$$E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1 \right\}.$$

- (b) Berechnen Sie die Länge der Kurve im  $\mathbb{R}^2$ , welche durch den Funktionsgraphen von

$$g(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}, \quad x \in [0, 1],$$

bestimmt wird.