

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Arbeitszeit: 90 Minuten!

1. Die reelle Folge a_n sei definiert durch

$$a_1 = 2 \quad \text{und} \quad a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n} \quad \text{für } n \geq 1.$$

(a) Zeigen Sie mit Hilfe von vollständiger Induktion, dass für $n \geq 1$ gilt

$$a_n = \frac{n+1}{n}.$$

(b) Geben Sie die Definitionen der *Konvergenz* und *absoluten Konvergenz einer unendlichen Reihe* an. Untersuchen Sie mit Hilfe geeigneter Kriterien die beiden Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (a_n - a_{n+1})$$

auf Konvergenz *und* absolute Konvergenz (Sie dürfen dazu auch (a) verwenden).

2. (a) Stellen Sie die komplexe Zahl

$$z = \frac{4e^{i\frac{\pi}{4}}}{(i-1)^2} + \sqrt{2}$$

in der Form $x + iy$ dar und geben Sie $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $\arg z$ und $|z|$ an.

(b) Formulieren Sie (ausführlich) den Fundamentalsatz der Algebra.

Geben Sie ein Polynom dritten Grades an, das keine reellen Nullstellen besitzt.

3. Diskutieren Sie für die auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ definierte Funktion

$$f(x) = 1 - \ln(\cos x)$$

die folgenden Punkte:

- Stetigkeits- und Differenzierbarkeitsbereich
- Verhalten an den Intervallrändern, Monotonie und Extrema

Verwenden Sie die gesammelten Informationen, um eine Skizze von f anzufertigen.

4. (a) Erklären Sie den Begriff der Stammfunktion einer reellen Funktion.

Wodurch unterscheiden sich zwei Funktionen, die die gleichen Ableitungen haben?

Wodurch unterscheiden sich zwei Funktionen, die die gleichen Stammfunktionen haben?

(b) Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz:

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-1}} dx \quad \text{und} \quad \int_0^{\infty} \frac{2\sqrt{x}}{1+x^2} dx$$

Geben Sie das von Ihnen verwendete Konvergenzkriterium allgemein und ausführlich an.