Prüfung aus Mathematik 1 für BI

am 4. Mai 2018

ZUNAME: ....

Vorname: ....

Mat.Nr.: ....

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Arbeitszeit: 90 Minuten!

1. (a) Formulieren Sie (ausführlich) den *Fundamentalsatz der Algebra.*

   (b) Gegeben sei nun das Polynom
   $$p(x) = 2x^3 + a_2x^2 + a_1x - 2.$$
   Sind auch die Koeffizienten a_2 und a_1 ganzzahlig, dann gibt es vier Zahlen $q_1, q_2, q_3, q_4 > 0$ derart, dass für jede rationale Nullstelle α von p entweder $\alpha = q_i$ oder $\alpha = -q_i$ gilt. Bestimmen Sie diese Zahlen q_i.

   Hinweis: Beachten Sie, dass $4p(x) = (2x)^3 + a_2(2x)^2 + 2a_1(2x) - 8$ *und setzen Sie* $t = 2x$.

   (c) Bestimmen Sie alle Nullstellen des Polynoms p aus (b) mit $a_2 = 3$ und $a_1 = -3$ und geben Sie ein Polynom $r(x)$ vom Grad ≤ 3 mit ganzzahligen Koeffizienten an, dessen Nullstellen genau die rationalen aber nicht ganzzahligen Nullstellen von p aus (b) sind.

2. (a) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Geben Sie die Definition der *Ableitung* von f an einer Stelle $a \in \mathbb{R}$ an und erklären Sie mit Hilfe einer aussagekräftigen Skizze ihre Bedeutung.

   (b) Überprüfen Sie folgende Funktionen auf *Differenzierbarkeit*:
   $$f(x) = \begin{cases} -x^3 & \text{für } x < 0, \\ x^2(x-1) & \text{für } x \geq 0 \end{cases} \qquad \text{und} \qquad g(x) = e^{-|x|}.$$

   (c) Bestimmen Sie die *Extremstellen* und Extremwerte der Funktion f aus (b) auf $[-1, 1]$.

3. (a) Bestimmen Sie den genauen Konvergenzbereich der Potenzreihe
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n.$$

   (b) Geben Sie eine Formel für die n-te Ableitung der Funktion $g(x) = \ln(1 + x)$ an der Stelle $x_0 = 0$ an und beweisen Sie diese mittels vollständiger Induktion.

   (c) Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Potenzreihe aus Beispiel 3 (a) und der Funktion g aus Beispiel 3 (b)?

4. (a) Es seien $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbare Funktionen. Zeigen Sie durch direktes Nachrechnen, dass die Funktion
   $$u(x,t) = \frac{g(x-3t) + g(x+3t)}{2} + \frac{1}{6} \int_{x-3t}^{x+3t} h(s)\, ds$$
   die Gleichung
   $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
   und die Anfangsbedingungen $u(x, 0) = g(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = h(x)$ erfüllt.

   (b) Bestimmen Sie die Funktion u aus (a) explizit für $g(x) = x^2$ und $h(x) = 2x$.