Prüfung aus Mathematik 1

am 6. Dezember 2013

ZUNAME: ....

Vorname: ....

Mat.Nr.: ....

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Arbeitszeit: 90 Minuten!

1. Gegeben seien die komplexen Zahlen $z_1 = 1 - i$ und $z_2 = 4 + 4i$.

   (a) Erklären Sie anhand einer aussagekräftigen Skizze die Polardarstellung komplexer Zahlen am Beispiel z_1.

   (b) Führen Sie die Multiplikation $z_1 \cdot z_2$ mit Hilfe der Polardarstellung durch und skizzieren Sie z_1, z_2 und $z_1 \cdot z_2$.

   (c) Geben Sie die Konjugierte von z_2 an und zeichnen Sie z_2 und $\overline{z_2}$ in einer Skizze ein.

   (d) Formulieren Sie den Fundamentalsatz der Algebra!

2. (a) Bestimmen Sie die Grenzwerte der Folgen

   $$b_n = \frac{n}{\sqrt{n^2 + n}} \qquad \text{und} \qquad c_n = \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}}.$$

   (b) Weisen Sie die Konvergenz der Folge

   $$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}}$$

   nach, indem Sie (mit den Folgen aus (a)) zunächst

   $$b_n \leq a_n \leq c_n$$

   begründen und diese Relation dann verwenden, um den Grenzwert von a_n zu bestimmen.

3. (a) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Geben Sie die Definition der *Ableitung* von f an einer Stelle $a \in \mathbb{R}$ an und erklären Sie mit Hilfe einer aussagekräftigen Skizze ihre Bedeutung.

   (b) Verwenden Sie den Differentialquotienten zum Beweis der bekannten Differentiationsregel

   $$(x^2)' = 2x.$$

   (c) Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion

   $$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 2}}.$$

4. (a) Formulieren Sie die Leibniz'sche Sektorformel und bestimmen Sie mit ihrer Hilfe den Flächeninhalt von

   $$E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{17^2} + \frac{y^2}{42^2} \leq 1 \right\}.$$

   (b) Untersuchen Sie die folgenden unbestimmten Integrale auf Konvergenz:

   $$\int_0^\infty x e^{-x}\, dx, \qquad \int_0^\infty (-x) e^{x}\, dx, \qquad \int_0^\infty (-x) e^{-x}\, dx.$$