Prüfung aus Mathematik 1

am 8. März 2013

ZUNAME: ....

Vorname: ....

Mat.Nr.: ....

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Arbeitszeit: 90 Minuten!

1. (a) Beweisen Sie mittels *vollständiger Induktion*:
   Für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{(n+1)n}{2}. \tag{1}$$

   (b) Geben Sie die Definition der *Konvergenz einer unendlichen Reihe* an. Verwenden Sie die von Ihnen gegebene Definition und Formel (1), um die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} k$ auf Konvergenz bzw. Divergenz zu überprüfen.

   (c) Bestimmen Sie alle (komplexen) Lösungen von $z^4 - 1 = 0$ und stellen Sie diese graphisch dar.

2. (a) Zerlegen Sie folgende rationale Funktion in Partialbrüche:

$$f(x) = \frac{x+18}{x^2+x-12}.$$

   (b) Bestimmen Sie unter Verwendung von (a) und der Summenformel der geometrischen Reihe die *Taylorreihe* der Funktion f um $x = 0$.

   (c) Ermitteln Sie den genauen *Konvergenzbereich* der Taylorreihe aus (b).

3. Diskutieren Sie für die Funktion

$$g(x) = \frac{e^x}{x}$$

   die folgenden Punkte:

   – Definitionsbereich und asymptotisches Verhalten
   – Stetigkeits- und Differenzierbarkeitsbereich
   – Monotonieverhalten und Extrema

   Verwenden Sie die gesammelten Informationen, um eine Skizze von g anzufertigen.

4. (a) Es sei $a > 0$ fest und $h(x) = x$. Bestimmen Sie das Integral

$$\int_0^a h(x)\,dx$$

   einerseits mittels der *Definition von Riemann Integralen* (dabei ist Formel (1) nützlich) und andererseits mit Hilfe des *Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung.*

   (b) Formulieren Sie (ausführlich) den *Eindeutigkeitssatz der Differentialrechnung.*
   Bestimmen Sie *alle* Lösungen der Differentialgleichung

$$y'(x) = 17y(x) + 42.$$