Prüfung aus Mathematik 1 für Bauingenieurwesen ZUNAME: ....

am 9. Dezember 2016 Vorname: ....

Mat.Nr.: ....

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Arbeitszeit: 90 Minuten!

Das Ergebnis der Prüfung wird in der Woche vom 19. Dezember bekannt gegeben.

1. Gegeben sei die Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, definiert durch
$$f(x) = x \tanh(x).$$
   (a) Zeigen Sie, dass f monoton steigend ist.
   (b) Formulieren Sie das Leibnizsche Kriterium über die Konvergenz alternierender Reihen.
   (c) Untersuchen Sie die Reihe
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \tanh(n)}$$
   auf Konvergenz *und* absolute Konvergenz.

2. Gegeben sei die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch
$$g(x) = \begin{cases} x^{1/x} & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x \leq 0. \end{cases}$$
   (a) Formulieren Sie die Regel von de L'Hospital.
   (b) Zeigen Sie, dass g bei $x = 0$ stetig ist und berechnen Sie $\lim_{x\to\infty} g(x)$.
   (c) Bestimmen Sie die Extrema von g für $x > 0$.

3. (a) Geben Sie eine Definition der Exponentialfunktion e^x und des natürlichen Logarithmus $\ln y$ an.
   (b) Formulieren Sie den Satz über die Differentiation der Umkehrfunktion und erläutern Sie damit den Zusammenhang zwischen $\frac{d}{dx}e^x$ und $\frac{d}{dy}\ln y$.
   (c) Entwickeln Sie $\ln(2x + 1)$ in eine Potenzreihe mit Entwicklungspunkt 0 und bestimmen Sie ihr genaues Konvergenzintervall (Randpunkte beachten).

4. (a) Erklären Sie den Begriff der Stammfunktion einer stetigen Funktion.
   (b) Geben Sie eine Funktion an, die $\cos(x) + 17$ als Stammfunktion besitzt.
   (c) Formulieren Sie den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.
   (d) Berechnen Sie
   $$\int_0^{x^2} \frac{d}{dt} e^{\sin^2 t}\, dt, \qquad \frac{d}{dx} \int_0^{x^2} e^{\sin^2 t}\, dt, \qquad \frac{d}{dt} \int_0^{x^2} e^{\sin^2 t}\, dt.$$
   (Hinweis: $e^{\sin^2 x}$ lässt sich nicht elementar integrieren!)