Prüfung Mathematik für BI – 9.3.2012

Name/ Matrikelnummer: ....

Lösen Sie die Beispiele der Angabe entsprechend, begründen Sie Ihre Antworten, aber fassen Sie sich kurz!

1. (a) Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

   i. Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren von A.

   ii. Geben Sie die spezielle Lösung des Differentialgleichungssystems $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$ an, welche dem Anfangswert $\boldsymbol{y}(0) = (1, 2, 0)^T$ genügt.

   (b) Berechnen Sie eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung $y'' - 3y' + 2y = 2\cos(2x)$ mit der Ansatzmethode.

   5 Punkte (3,5(2+1,5)+1,5)

2. (a) Berechnen Sie die Richtungsableitung von $F(x, y) = e^{(x^2)}y$ im Punkt $P = (0, 4)$ in Richtung des Vektors, welcher ausgehend von P zum Ursprung $(0, 0)$ zeigt.

   (b) Angenommen $F(x, y) = e^{(x^2)}y$ wäre die Potentialfunktion eines ebenen Vektorfeldes $\boldsymbol{v}$ und C wäre irgendeine Kurve, welche die Punkte $(0, 0)$ und $(0, 4)$ verbindet. Was wäre der Wert des Kurvenintegrals $\int_C \boldsymbol{v} d\boldsymbol{x}$?
   Anmerkung: Den Wert kann man – unter richtiger Anwendung der Theorie – sofort berechnen.

   (c) Weisen Sie nach, dass die Differentialgleichung

   $$2xye^{(x^2)} + e^{(x^2)}y' = 0$$

   exakt ist und bestimmen Sie ihre Lösung.

   4 Punkte (1+1+2)

3. Gegeben sei der Zylinder $Z = \{(x, y, z)^T : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 2\}$.

   (a) Parametrisieren Sie den Zylindermantel sowie die Deckfläche des Zylinders.

   (b) Berechnen Sie das Oberflächenintegral $\iint_F \boldsymbol{v} d\boldsymbol{O}$, wobei $\boldsymbol{v} = (2x, y, y)^T$ und F die Randfläche von Z ist, mittels geeignetem Integralsatz.

   (c) Berechnen Sie den Fluss durch die Deckfläche von Z für das Vektorfeld $\boldsymbol{v} = (2x, y, y)^T$ direkt.

   (d) Folgern Sie direkt aus Ihrem Ergebnis aus (b), wie groß das Volumen von Z ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

   6 Punkte (1+2+2+1)

4. (a) Berechnen Sie die Fourierreihe $F(x)$ der Funktion

   $$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in [-\pi, -\pi/2), \\ -1 & \text{für } x \in [-\pi/2, 0), \\ 1 & \text{für } x \in [0, \pi/2), \\ 0 & \text{für } x \in [\pi/2, \pi], \end{cases} \qquad 2\pi\text{–periodisch fortgesetzt.}$$

   (b) An welchen Stellen $x \in [-\pi, \pi)$ nimmt die Fourierreihe $F(x)$ aus (a) den Wert $\frac{1}{2}$ an. Warum?
   Anmerkung: Diese Aufgabe können Sie unabhängig von (a) beantworten.

   (c) Setzen Sie das kleinste positive x aus (b) in Ihre Fourrierreihe $F(x)$ ein und bestätigen Sie (durch Umformungen) die Gleichung $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(4k+1)(4k+3)} = \frac{\pi}{8}$.

   5 Punkte (2,5+1+1,5)

Viel Erfolg!