Prüfung aus Mathematik (2) ALT für BI

am 24. 10. 2003

Zuname: ....

Vorname: ....

Kennzahl: ....

Mat.Nr.: ....

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Bitte für jedes Beispiel ein eigenes Blatt verwenden!
Arbeitszeit: 150 Minuten

1.) a) Lösen Sie das homogene Differentialgleichungssystem $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$ mit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ mittels EW-EV-Methode

b) mit Hilfe der Formel $\dot{\boldsymbol{y}} = e^{At}\mathbf{c}$, indem Sie die Exponentialmatrix e^{At} explizit berechnen.

Vergleichen Sie die beiden Resultate.

2.) Lösen Sie die autonome Differentialgleichung $2yy'' + {y'}^2 + {y'}^4 = 0$.

3.) Bestätigen Sie, dass $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$ eine Dichtefunktion ist (Dichte der Gaußschen Standardnormalverteilung). Da f offenbar auf ganz $\boldsymbol{R}$ positiv ist, genügt der Nachweis von $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = 1 \quad (*)$

Es ist bequemer, die Identität $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$ zu zeigen, aus der man $(*)$ mittels der Substitution $x = t/\sqrt{2}$ sofort herleitet. Anleitung: Bestätigen Sie die Richtigkeit der Beziehung $\iint\limits_{x^2+y^2 \le R^2} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \pi\left(1 - e^{-R^2}\right)$ durch Übergang auf Polarkoordinaten $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$ $(0 < r \le R,\ 0 \le \varphi < 2\pi)$.

4.) Es sei $\boldsymbol{U} = \binom{f}{g} = \operatorname{grad} v$ das Gradientenfeld mit der Potentialfunktion $v(x,y) = 2xy \quad ((x,y) \in \boldsymbol{R}^2)$.

a) Bestätigen Sie, dass $\boldsymbol{U}$ (als Geschwindigkeitsfeld aufgefasst) die Strömung einer inkompressiblen Substanz beschreibt. Wie hängt das mit der Tatsache zusammen, dass v der Imaginärteil einer auf $\boldsymbol{R}^2$ analytischen Funktion $w = u(x,y) + \mathrm{i}\,v(x,y)$ ist? Wie lautet diese Funktion und wie die zu v konjugierte harmonische Funktion v?

b) Berechnen Sie die Menge der Substanz, die pro Zeiteinheit durch einen Ursprungskreis C mit Radius R (von innen nach außen) tritt, also das Kurvenintegral $\int\limits_C f\,dy - g\,dx$.

5.) Bestimmen Sie die orts- und zeitabhängige Temperatur $u(x,y;t)$ in einer quadratischen Platte, deren Rand konstant auf 0° gehalten wird und deren Inneres zum Zeitpunkt $t = 0$ überall die Temperatur 1° hat.
Anleitung: Zu lösen ist die DG. $u_t = c^2\Delta u$ mit Separationsmethode. Die Vorgangsweise ist dabei genau wie bei der Lösung der Schwingungsgleichung $u_{tt} = c^2\Delta u$ für die quadratische Membran; lediglich der Zeitterm fällt anders aus.

Prüfung aus Mathematik (2) NEU für BI

am 24. 10. 2003

Zuname: ....

Vorname: ....
Kennzahl: ....

Mat.Nr.: ....

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Bitte für jedes Beispiel ein eigenes Blatt verwenden!
Arbeitszeit: 150 Minuten

1.) a) Lösen Sie das homogene Differentialgleichungssystem $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$ mit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ mittels EW-EV-Methode

b) mit Hilfe der Formel $\dot{\boldsymbol{y}} = e^{At}\mathbf{c}$, indem Sie die Exponentialmatrix e^{At} explizit berechnen.

Vergleichen Sie die beiden Resultate.

2.) Lösen Sie die autonome Differentialgleichung $2yy'' + y'^2 + y'^4 = 0$.

3.) Bestätigen Sie, dass $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$ eine Dichtefunktion ist (Dichte der Gaußschen Standardnormalverteilung). Da f offenbar auf ganz $\boldsymbol{R}$ positiv ist, genügt der Nachweis von $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = 1 \ \ (*)$

Es ist bequemer, die Identität $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$ zu zeigen, aus der man $(*)$ mittels der Substitution $x = t/\sqrt{2}$ sofort herleitet. <u>Anleitung</u>: Bestätigen Sie die Richtigkeit der Beziehung $\iint\limits_{x^2+y^2 \le R^2} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \pi\left(1 - e^{-R^2}\right)$ durch Übergang auf Polarkoordinaten $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ $(0 < r \le R,\ 0 \le \varphi < 2\pi)$.

4.) Es sei $\boldsymbol{U} = \binom{f}{g} = \operatorname{grad} v$ das Gradientenfeld mit der Potentialfunktion $v(x,y) = 2xy \ \ ((x,y) \in \boldsymbol{R}^2)$.

a) Bestätigen Sie, dass $\boldsymbol{U}$ (als Geschwindigkeitsfeld aufgefasst) die Strömung einer inkompressiblen Substanz beschreibt. Wie hängt das mit der Tatsache zusammen, dass v der Imaginärteil einer auf $\boldsymbol{R}^2$ analytischen Funktion $w = u(x,y) + \mathrm{i}\,v(x,y)$ ist? Wie lautet diese Funktion und wie die zu v konjugierte harmonische Funktion v?

b) Berechnen Sie die Menge der Substanz, die pro Zeiteinheit durch einen Ursprungskreis C mit Radius R (von innen nach außen) tritt, also das Kurvenintegral $\int\limits_C f\,dy - g\,dx$.

5.) Berechnen Sie das Mittel (ξ, η) der zweidimensionalen Verteilung mit Dichte

$$f(x,y) = \frac{1}{\ln 2}\frac{1}{(1+xy)^2}$$

innerhalb des Einheitsquadrats $Q : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$ und $f(x,y) = 0$ außerhalb. Hinweis: Es genügt, $\xi = \iint\limits_Q x f(x,y)\,dx\,dy$ auszurechnen.