

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
 Bitte für jedes Beispiel ein eigenes Blatt verwenden!
 Arbeitszeit: 150 Minuten

1.) a) Lösen Sie das homogene Differentialgleichungssystem $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ mit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Hinweis: Die Matrix A ist symmetrisch und daher diagonalisierbar; sie hat die Eigenwerte 1, 1, -1, -1 (nicht nachrechnen).

b) Wie lautet der Ansatz für eine Partikulärlösung des inhomogenen Systems $\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{r} \sin t + \mathbf{s} e^t$, wobei $\mathbf{r}, \mathbf{s} \in \mathbf{R}^3$ konstante Spaltenvektoren sind.

2.) a) Bestimmen Sie die Menge aller parabolischen Punkte (x, y, z) der Fläche $z = z(x, y) = \cos x \cos y$.
Hinweis zur Kontrolle: die Stellen (x, y) bilden eine Schar paarweise senkrechter Geraden (Skizze); bei der Berechnung von $D(x, y)$ empfiehlt sich die Heranziehung des Cosinus-Summensatzes.

b) Weisen Sie nach, dass der Punkt $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 0)$ ein Sattelpunkt ist und dass bei $(0, 0, 1)$ ein relatives (und sogar absolutes) Maximum vorliegt.

3.) Es sei $\mathbf{U} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \text{grad } u$ das Gradientenfeld mit der Potentialfunktion $u(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ ($(x, y) \in G = \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$).

a) Bestätigen Sie, dass \mathbf{U} (als Geschwindigkeitsfeld aufgefasst) die Strömung einer inkompressiblen Substanz beschreibt. Wie hängt das mit der Tatsache zusammen, dass u der Realteil einer (auf $\mathbf{C} \setminus \{(0, 0)\}$) analytischen Funktion $w = u(x, y) + i v(x, y)$ ist? Wie lautet diese Funktion und wie die zu u konjugierte harmonische Funktion v ?

b) Berechnen Sie die Menge der Substanz, die pro Zeiteinheit durch einen Ursprungskreis C mit Radius R (von innen nach außen) tritt, also das Kurvenintegral $\int_C f dy - g dx$. Was fällt auf?

4.) Bestimmen Sie die stationäre Temperaturverteilung $u(r, \varphi)$, die sich in einer an Ober- und Unterseite isolierten kreisförmigen Platte vom Radius 1 einstellt, wenn man die Randtemperatur

$$u(1, \varphi) = f(\varphi) = \begin{cases} \varphi & \dots & -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \dots & -\pi \leq \varphi \leq -\frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi \end{cases}$$

aufrechterhält. Schreiben Sie die ersten 4 Glieder der Lösungsreihe an.

5.) Gegeben sei eine aus 50 Nullen und 50 Zweien bestehende Folge x_1, x_2, \dots, x_{100} , die aus $n = 100$ unabhängigen Beobachtungen einer normalverteilten Variablen mit unbekanntem Mittel und unbekannter Varianz stammen soll. Bestimmen Sie das Konfidenzintervall für die Varianz zum Konfidenzniveau $\gamma = 0.80$.

Hinweis: man kann die χ^2 -Verteilung bei so großem Freiheitsgrad $n - 1$ bereits durch die Normalverteilung mit Mittel $\mu = n - 1$ und Standardabweichung $\sigma = \sqrt{2(n - 1)}$ ersetzen. Die Berechnung der benötigten Fraktile lässt sich aber leicht auf die entsprechenden Fraktile der Standardnormalverteilungsfunktion $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$ zurückführen, sodass Sie mit der Information $\Phi^{-1}(0.1) = -1.282$ allein bereits vollständig durchkommen (die ganze Rechnung erfordert nur wenige Zeilen).