Prüfung aus Mathematik für Bauingenieure
am 11. Oktober 2013

ZUNAME: ....
Vorname: ....
Kennzahl: ....
Mat.Nr.: ....

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Arbeitszeit: 90 Minuten!

Die mündlichen Prüfungen finden am Donnerstag, den 17. Oktober statt.

1. Gegeben sei die Matrix
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & -2 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$
   (a) Bestimmen Sie eine Matrix S, sodass
   $$D := S^{\mathrm{T}} \cdot A \cdot S$$
   eine Diagonalmatrix ist. **Hinweis:** Ein Eigenwert der Matrix A ist $\lambda_1 = -6$.
   (b) Bestimmen Sie $\det A$ unter Verwendung von (a) (ohne zusätzlichen Rechenaufwand).

2. (a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für die Differentialgleichung
   $$y^{(4)} + 2y'' + y = 0.$$
   (b) Geben Sie den Ansatz zur Bestimmung einer partikulären Lösung für
   $$y^{(4)} + 2y'' + y = x^2 + \sin x$$
   an. **Beachten Sie:** Es ist nur der Ansatz und nicht die genaue Lösung gefragt!

3. Auf der oberen Halbebene $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ sei folgendes Vektorfeld gegeben
$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} -\frac{y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}.$$
   (a) Geben Sie die drei hinreichenden Bedingungen für die Existenz einer Potentialfunktion von $\boldsymbol{u}$ an und entscheiden Sie, ob diese auf G erfüllt sind und damit alle Kurvenintegrale von $\boldsymbol{u}$ über geschlossene Kurven in G verschwinden.
   (b) Bestimmen Sie den Wert des Kurvenintegrals
   $$\int_C \boldsymbol{u}\, d\boldsymbol{x},$$
   wobei C den Einheitskreis mit Mittelpunkt im Ursprung bezeichnet.
   Wie passt Ihr Ergebnis mit (a) zusammen?

4. Bestimmen Sie eine möglichst allgemeine Lösung der Wärmeleitungsgleichung
$$u_t = u_{xx}, \qquad u(0,t) = u(1,t) = 0.$$
   Beschreiben Sie allgemein, wie man die Lösung an eine Anfangsbedingung $u(x,0) = f(x)$ anpassen kann.