Prüfung Mathematik für BI – 12.10.2012

Name/ Matrikelnummer:...

Lösen Sie die Beispiele der Angabe entsprechend, begründen Sie Ihre Antworten, aber fassen Sie sich kurz!

Die mündlichen Prüfungen finden voraussichtlich am Freitag, den 19.10.2012 bzw. am Montag, den 22.10.2012 statt.

---

1. (a) Bestimmen Sie die Matrix A, welche den Vektor $\boldsymbol{a} = \binom{2}{1}$ am Ursprung spiegelt und den Vekor $\boldsymbol{b} = \binom{1}{1}$ um 90 Grad gegen den Uhrzeigersinn dreht.

   (b) Geben Sie ohne weitere Rechnung einen Eigenvektor der Matrix A aus (a) und dessen Eigenwert an. Begründen Sie Ihre Wahl.

   (c) Betrachtet wird der Vektorraum M_2 der quadratischen 2×2 Matrizen.

      i. Geben Sie drei linear unabhängige (2×2) Matrizen A, B, C an. Weisen Sie nach, dass Ihre Matrizen tatsächlich die Definition von linearer Unabhängigkeit erfüllen.

      ii. Geben Sie eine weitere (2×2) Matrix D an, welche von Ihren zuvor gewählten Matrizen linear abhängig ist.

   4,5 Punkte (1,5+1+2(1,5+0,5))

2. (a) Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'' - 2y + 5 = \sin(2x), \qquad y(0) = y'(0) = 0.$$

   (b) Berechnen Sie mit der Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren die Extrema auf $f(x, y) = xy$ über der Ellipse $x^2 + 2y^2 - 1$.

   5 Punkte (3+2)

3. (a) Sei D der (eindeutig bestimmte) Bereich, welcher von den Flächen $z = y^2$, $z = x$ und $x = 4$ begrenzt wird.

      i. Berechnen Sie das Volumen von D mittels Säulenintegration eines geeigneten Dreifachintegrals, d.h. berechnen Sie $\iiint_D f(x, y, z)dzdxdy$ in dieser Integrationsreihenfolge mit passenden Grenzeun und passendem Integranden.

      ii. Stellen Sie das Integral aus i. noch als Schichtenintegral dar, d.h. bestimmen Sie die Grenzen entsprechend der Integrationsreihenfolge$\iiint_D f(x, y, z)dxdydz$.
      Anmerkung: Sie müssen nur die Integrationsgrenzen richtig bestimmen, das Integral ist nicht nochmals zu berechnen.

   (b) Weisen Sie nach, dass die Differentialgleichung $x + y' = 0$ exakt ist und bestimmen Sie Ihre allgemeine Lösung nach dem Lösungsverfahren für exakte Differentialgleichungen

   5,5 Punkte (4(2+2)+1,5)

4. (a) Fixieren Sie die Konstante a reell so, dass die Funktionen $\phi_0(x) = ax - 2$ und $\phi_1(x) = 2x$ orthogonal bezüglich des inneren Produktes $< f, g >= \int_0^1 fgdx$ werden.

   (b) Berechnen Sie $\|\phi_0\|^2$ mit dem inneren Produkt von (a).
   Anmerkung: Im Weiteren können Sie $\|\phi_1\|^2 = 4/3$ ohne Nachrechnen verwenden.

   (c) Berechnen Sie c_0 und c_1 so, dass die Funktion $c_0\phi_0(x) + c_1\phi_1(x)$ die Funktion $f(x) = x^2$ bestmöglich (im Sinne $\|f - c_0\phi_0(x) + c_1\phi_1(x)\|^2$ ist minimal) annähern. Skizzieren Sie sowohl x, als auch $c_0\phi_0(x) + c_1\phi_1(x)$.

   5 Punkte (1+1+3)

Viel Erfolg!