

Prüfung Mathematik für BI – 13.10.2011

Name/ Matrikelnummer:

Lösen Sie die Beispiele der Angabe entsprechend, begründen Sie Ihre Antworten, aber fassen Sie sich kurz!

1. (a) Berechnen Sie die Matrix A , welche den Vektor $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ als Eigenvektor zum Eigenwert -2 und den Vektor $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ als Eigenvektor zum Eigenwert -1 besitzt.
- (b) Bestätigen Sie Ihr Ergebnis aus (a), indem Sie anhand der Definition (und nur an dieser, für andere Rechnungen gibt es keine Punkte!) zeigen, dass der Vektor \mathbf{a} tatsächlich ein Eigenvektor zum Eigenwert -2 Ihrer Matrix A aus (a) ist.
- (c) Bestimmen Sie alle Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 &= 4 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 3 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 5 \end{aligned}$$

- (d) Bestätigen Sie Ihr Ergebnis aus (c), indem Sie für eine konkrete Lösung (explizite Zahlenwerte) die Probe für Beispiel (c) machen.

6 Punkte (2+1+2+1)

2. (a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y''' + 2y'' - y' - 2y = e^{-2x}.$$

mittels Ansatzmethode.

Hinweis: 1 ist eine Nullstelle der charakteristischen Gleichung.

- (b) Bestimmen Sie die Extrema von $f(x, y) = x^2y$ unter der Nebenbedingung $x^2 + xy = 1$ mittels Lagrange'schem Multiplikator.

5 Punkte (2,5+2,5)

3. Sei $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2y \\ x+y \end{pmatrix}$ ein Vektorfeld und B der (beschränkte) Bereich berandet von den Kurven $y = -x$ und $y = x^2$.

- (a) Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_C \mathbf{u} d\mathbf{x}$, wobei C die (gegen den Uhrzeigersinn durchlaufene) Randkurve von B ist

i. direkt.

ii. mit einem geeigneten Integralsatz.

- (b) Wie groß ist der Flächeninhalt von B ? Begründen Sie Ihre Vorgehensweise.

5 Punkte (4 (2+2)+1)

4. Gegeben ist das Sturm Liouville'sche Randwertproblem

$$y''(x) = \lambda y(x), \quad y(1) = 0, y'(0) = 0.$$

- (a) Bestimmen Sie alle Lösungen (Eigenfunktionen) des Randwertproblems (alle Fälle sind zu diskutieren).

- (b) Wie lauten die Koeffizienten c_k der Entwicklung von $f(x) = \cos(\frac{17}{2}x)$ nach den Eigenfunktionen aus (a)?

4 Punkte (3+1)

Viel Erfolg!