Prüfung aus Mathematik 2 für Bauingenieurwesen

am 14. Oktober 2016

ZUNAME: ....

Vorname: ....

Mat.Nr.: ....

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Arbeitszeit: 90 Minuten!

Die mündlichen Prüfungen finden am 27. und 28. Oktober statt! Ihren genauen Termin erfahren Sie mit dem Ergebnis der schriftlichen Prüfung am Montag, den 24. Oktober (TISS Aussendung).

1. Gegeben seien
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
Zeigen Sie mit Hilfe des Rangkriteriums, dass das Gleichungssystem $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$ unlösbar ist und bestimmen Sie eine Lösung des entsprechenden *Ausgleichsproblems*.

2. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Anfangswertproblems
$$y''(x) + 3y'(x) - 4y(x) = e^{2x} + 4, \qquad y(0) = -1.$$

3. Gegeben sei das Vektorfeld
$$\boldsymbol{v}_\alpha(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{y}{x^2+y^2} \\ \frac{\alpha x}{x^2+y^2} \end{pmatrix},$$
wobei $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Parameter ist.
   (a) Bestimmen Sie das Kurvenintegral
   $$\int_C \boldsymbol{v}_\alpha d\boldsymbol{x},$$
   wobei C den *im Uhrzeigersinn* durchlaufenen Kreis mit Radius 1 und Mittelpunkt im Ursprung bezeichnet.
   (b) Entscheiden Sie, ob es ein α gibt, sodass $\boldsymbol{v}_\alpha$ die Integrabilitätsbedingung erfüllt.
   (c) Begründen Sie mit Hilfe Ihrer Ergebnisse aus (a) und (b), warum es kein α gibt, sodass $\boldsymbol{v}_\alpha$ eine Potentialfunktion auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ besitzt.

4. Gegeben sei der Kegel $K = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq z^2,\ 0 \leq z \leq 1\}$ sowie das Vektorfeld
$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x + y \\ x - y \\ z^2 \end{pmatrix}.$$
Berechnen Sie das Oberflächenintegral
$$\iint_{\partial K} \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{O}$$
über die Randfläche ∂K von K unter Verwendung eines geeigneten Integralsatzes.
Formulieren Sie den von Ihnen verwendeten Integralsatz auch allgemein und ausführlich!