

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!  
Arbeitszeit: 90 Minuten!

1. Bestimmen Sie die *allgemeine* Lösung des Differentialgleichungssystems:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Gegeben seien ein Drehkegel

$$K = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq z^2, 0 \leq z \leq 1\}$$

und das Vektorfeld

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix}.$$

- (a) Bestimmen Sie mit Hilfe eines Dreifachintegrals das Volumen von  $K$ .  
(b) Bestimmen Sie das Kurvenintegral  $\int_C \mathbf{v} d\mathbf{x}$ , wobei  $C$  die Kurve bezeichnet, welche die Deckfläche von  $K$  berandet.  
(c) Bestimmen Sie das Oberflächenintegral  $\iint_F \mathbf{v} d\mathbf{O}$ , wobei  $F$  die (und nur die) Mantelfläche von  $K$  bezeichnet.
3. (a) Zeigen Sie, dass das Vektorfeld

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x^5 + y^2 \\ 2xy + y^3 \end{pmatrix}$$

ein Potentialfeld ist und bestimmen Sie eine Potentialfunktion von  $\mathbf{v}$ .

- (b) Erklären Sie den Begriff der exakten Differentialgleichung.  
(c) Bestimmen Sie mit Hilfe der in (a) ermittelten Potentialfunktion die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(2xy + y^3) + (x^5 + y^2) = 0, \quad y(0) = 1.$$

4. Bestimmen Sie für  $0 \leq x \leq 3$  und  $t \geq 0$  eine Lösung der Differentialgleichung

$$u_t = u_{xx}, \quad u_x(0, t) = u_x(3, t) = 0, \quad u(x, 0) = 1 - \cos(17\pi x).$$